METHODEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

R. COURANT UND D. HILBERT

PROFESSOR AN DER NEW YORK UNIVERSITY

ORD. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

ZWEITER BAND

MIT 57 ABBILDUNGEN

Published and Distributed in the Public Interest with the consent of the Alien Property Custodian under License No. A-82.

Photo-lithoprint Reproduction

Distributors: INTERSCIENCE PUBLISHERS, INC. New York

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1937

Vorwort.

Der vorliegende Band behandelt Teilgebiete aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, welche mit Begriffen der Physik zusammenhängen. Auch mit dieser Einschränkung ist keineswegs Vollständigkeit angestrebt. Vielmehr werden vorzugsweise Gegenstände diskutiert, bei welchen ich glaube, in der Sache oder in der Form der Darstellung etwas beitragen zu können. Das Ziel ist, wichtige Zweige der Analysis zugänglicher und durchsichtiger zu machen und weiteren Untersuchungen den Weg zu ebnen.

Wenn dies gelungen sein sollte, so teile ich das Verdienst mit meinen Schülern und Mitarbeitern, mit denen zusammen ich mich jahrelang um ein tieferes Verständnis des Gebietes bemüht habe. Die Rolle dieser Mitarbeit bei dem, was hier mehr oder weniger neu erscheinen mag, ist größer, als dies in Hinweisen auf besondere Einzelpublikationen zum Ausdruck kommen kann.

Auch anderen Mathematikern verdankt dieses Werk viel. In erster Linie gilt dies von meinem verehrten Lehrer D. HILBERT. Ich hoffe, daß in dem Buche etwas von seinem stets auf den wesentlichen Kern gerichteten Geist zu verspüren sein wird. — Für manche Teile des Buches sind die Untersuchungen von HADAMARD zur Theorie der Wirkungsausbreitung eine Quelle der Anregung gewesen. — Die grundsätzlichen Auffassungen von J. V. NEUMANN und M. H. STONE über lineare Operatoren im Hilbertschen Raum haben das Kapitel über direkte Variationsmethoden beeinflußt.

Das Erscheinen dieses Bandes hatte sich unter dem Druck administrativer Tätigkeit verzögert. Nachdem ich nunmehr eine ruhige Zeitspanne zur Ausarbeitung fand, glaubte ich, den Termin nicht noch länger hinausschieben zu sollen. Daher habe ich auf die Beseitigung mancher Unvollkommenheiten verzichtet, insbesondere davon abgesehen, einen systematischen Nachweis der Literatur zu geben. Ich hoffe, daß dabei kein ernsthaftes Übersehen fremder Verdienste unterlaufen ist.

Manche wichtige Gruppe von Untersuchungen, welche mit unserem Gegenstande zusammenhängen, ist nicht berücksichtigt worden. Abgesehen von klassischen Theorien nenne ich vor allem die neueren Arbeiten von GIRAUD, SCHAUDER und LERAY sowie E. HOPF. Auch vieles von dem Material, welches ursprünglich für diesen Band vorgesehen und vorbereitet wurde, insbesondere zu den direkten Methoden der Analysis, hat mit Rücksicht auf die gebotene Umfangsbeschränkung zurückgestellt werden müssen.

Über den Inhalt im einzelnen unterrichtet das ausführliche Verzeichnis. Zur Form ist etwas Grundsätzliches zu sagen: Das klassische Ideal einer gewissermaßen atomistischen Auffassung der Mathematik verlangt, den Stoff in Form von Voraussetzungen, Sätzen und Beweisen zu kondensieren. Dabei ist der innere Zusammenhang und die Motivierung der Theorie nicht unmittelbar Gegenstand der Darstellung. In komplementärer Weise kann man ein mathematisches Gebiet als stetiges Gewebe von Zusammenhängen betrachten, bei dessen Beschreibung die Methode und die Motivierung in den Vordergrund treten und die Kristallisierung der Einsichten in isolierte scharf umrissene Sätze erst eine sekundäre Rolle spielt. Wo eine Synthese beider Auffassungen untunlich schien, habe ich den zweiten Gesichtspunkt bevorzugt.

New Rochelle, New York, 24. Oktober 1937.

R. Courant.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Vorbereitung. — Grundbegriffe.

Anhang zum ersten Kapitel.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Anhang zum zweiten Kapitel.

Drittes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung im allgemeinen.

Anhang zum dritten Kapitel.

Viertes Kapitel.

Elliptische Differentialgleichungen, insbesondere Potentialtheorie.

Seite

Fünftes Kapitel.

Hyperbolische Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Anhang zum fünften Kapitel.

Seite

Sechstes Kapitel.

Hyperbolische Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen.

Siebentes Kapitel.

Lösung der Rand- und Eigenwertprobleme auf Grund der Variationsrechnung.

Berichtigungen Band II

S. 8, Z. 6, v. o., lies „$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$“ statt „$f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$“.

S. 17, Formel (7), lies „$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - r^2) g(\varphi)\, d\varphi}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2}$“

S. 28, Formel (5), statt „$x_1 = \xi_1$“ lies „$u_{x_1} = \xi_1$.“

S. 29, Formel (6), lies „$u_{x_i x_k}$“ statt „$U_{x_i x_k}$.“

S. 29, Formel (8), lies „$G = F(\omega_\xi, \omega_\eta, \xi\omega_\xi + \eta\omega_\eta - \omega, \xi, \eta, \rho\omega_{\eta\eta}, -\rho\omega_{\xi\eta}, \rho\omega_{\xi\xi}) = 0$“.

S. 55, Am Schluß vom ersten Absatz hinzufügen: „Oder es ist wenigstens die Grundkurve von C Enveloppe der charakteristischen Grundkurven. In der Umgebung der Grundkurve von C kann u nicht mehr als eine eindeutige Funktion von x und y definiert werden.“

S. 57, Z. 7 v. o.: Letzter Satz soll lauten: „C ist zwar keine Rückkehrkante der Fläche $u = u(x, y)$; jedoch ist C auf der Fläche singulär in dem Sinne, daß in der Umgebung der Projektion von C auf die x, y-Ebene u nicht mehr eindeutig definiert ist.“

S. 65, In Zeile 4 hinzufügen: „Einbettung bedeutet dabei, daß in der Umgebung der Projektion der Fokalkurve auf die x, y-Ebene u eine eindeutig definierte zweimal stetig differenzierbare Funktion von x und y ist.“

S. 69, Z. 9 v. o.: statt „C“ lies „C_1“.

S. 70, Z. 6: Hinzufügen hinter „sind“.: „Oder daß jedenfalls u in der Umgebung der Projektion von C auf die x, y-Ebene nicht mehr als eindeutige Funktion von x und y definierbar ist.“

S. 71, Z. 16 v. o., lies „3“ statt „4“.

S. 72, Z. 20 v. o.: statt „Anfangsmannigfaltigkeit“ lies „Anfangskurve“.

S. 75, Z. 16 v. o. lies „$y = q_0 s + y_0$“ statt „$y = y_0 s + q_0$“.

S. 84/85, Fußnote: Streiche Formelnummer (9). Die erste Summe der Formel ist mit dem negativen Zeichen zu versehen und

$U_\nu = \frac{\partial u}{\partial t_\nu} - \sum_{i=1}^{n} p i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}$ zu definieren. Ferner ist die Identität

$U \quad \sum p_i X_i$ hinzuzufügen.

S. 85, Z. 6 v. o., lies „$n - 2$“ statt „$n - 1$“.

S. 88, Z. 8 v. o., lies „$x_i(a_1, \cdots, a_n; b_1, \cdots, b_n; \lambda)$“.

S. 89, letzte Zeile der Fussnote: lies „der Dimension $n - m$“.

S. 97, Formel (8), ergänze „ $= 0$“.

S. 99, Z. 5 v. u., $\sum_\nu$ im Inneren des Integranden ist vor das Integralzeichen zu setzen.

S. 99, Z. 3 v. u., setze $\sum$ vor das Integralzeichen.

S. 100, Z. 19, v. o., lies „$\dot{u}_\nu$“ statt „$\dot{u}$“ unter dem Summenzeichen.

S. 102, Z. 19 v. o., lies „Felde“ statt „Falde“.

S. 107, Z. 26 v. o., statt „$| J a_\nu q_\mu | = 0$“ lies „$| J a_\nu q_\mu | \neq 0$“.

S. 108, in der zweiten der Formeln (29) lies „$\dot{v}_\nu$“ statt „v_ν“; ebenso in der zweiten der Formeln (31) lies „$\dot{\eta}_\nu$“ statt „η_ν“.

S. 112, Z. 22 v. o., lies „x_k“ statt „k_k“.

S. 113, letzte Zeile, lies „$\frac{\partial}{\partial s}$“ statt „$\frac{\partial}{ds}$“.

S. 116, Z. 13 v. u., lies „$n - 1$“ statt „$u - 1$“.

S. 116, Formel (14), lies „F_{p_s}“ statt „E_{p_s}“.

S. 118, letzte Zeile, lies „x_n“ statt „x_m“.

S. 127, Z. 5 v. u., lies „W“ statt „w“.

S. 131, Z. 1 v. u.: statt „$\frac{\xi - \eta}{2} \quad \rho; \cdots$“, lies „$\frac{\xi + \eta}{2} \quad \rho;$

S. 133, Z. 13 und 12 v. u.: statt „unserer Ausgangsgleichung“ lies „a, b, c“.

S. 134, Z. 12 v. u.: füge „geschlossenen“ ein vor dem Wort „Kurve“.

S. 138, Formel (8): das letzte „+“ ist durch „−“ zu ersetzen.

S. 139, Z. 17 v. u.: statt „$C(y) = \sum a_{i_1,\cdots,i_n} y_1^{i_1}, \cdots, y_n^{i_n} = \sum \alpha_{i_1,\cdots,i_n} \eta_1^{i_1}, \cdots, \eta_n^{i_n}$“ lies „$C(y) = \sum a_{i_1,\cdots,i_n} y_1^{i_1} \cdots y_n^{i_n} = \sum \alpha_{i_1,\cdots,i_n} \eta_1^{i_1} \cdots \eta_n^{i_n}$“.

S. 140, Z. 4 v. u.: statt „$u_{tt} = \Delta\Delta u$“ lies „$u_t = \Delta\Delta u$“.

S. 141, Z. 7 v. o.: statt „$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^2 u \quad \Delta\Delta u - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$“

lies „$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u \quad \Delta\Delta u - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$“.

S. 143, Z. 11 v. u.: die Formel muß ein „−“-Zeichen vorgesetzt erhalten.

S. 145, erste Zeile: das zweite α_3 ist durch α_4 zu ersetzen.

S. 147, Z. 4 v. o.: statt „$\sum a_{i_1,\cdots,i_n} y_1^{i_1}, \cdots, y_{n+1}^{i_{n+1}}$“

lies „$\sum a_{i_1,\cdots,i_n} y_1^{i_1} \cdots y_{n+1}^{i_{n+1}}$“.

S. 147, Z. 4 v. u.: statt „$A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (a, x)$“ lies „$A = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (a, x) = ax$“.

S. 148, Z. 4 v. o.: Buchstabe b vor „betrachten“ ist zu beseitigen.

S. 150, Z. 12 v. o., lies „(6)“ statt „(7)“.

S. 151, Z. 3 v. o.: statt „Geschwindigkeit $P_x(a_i) =$“

lies „Geschwindigkeit $P_\kappa(a_i) =$“.

S. 151, Z. 9 v. o.: statt „$\Delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} u x_i - u_t$

lies „$\Delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} - u_t = 0$“.

S. 152, Z. 16 v. o., lies „$v = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}t} u$“.

S. 155, Z. 5 v. o., lies „$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi}$“ statt „$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi}$“.

S. 155, Z. 10 v. o., lies „$\int_0^{\pi}$“ statt „$\int_0^{2\pi}$“.

S. 156, Z. 18 v. o.: statt „beschränkt mit $\varphi(x) < M$“ lies „beschränkt mit $|\varphi(x)| < M$“.

S. 162, Formel (20), lies „$W(a_1, a_2, a_3)$“ statt „$W(\xi, \eta, \zeta)$“.

S. 162, Z. 5 v. o., lies „$\varphi(\xi, \eta, \zeta)$“ statt „$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$“.

S. 165, Z. 7 v. u., lies „$\xi = x + \tau\alpha,\ \eta = y + \tau\beta,\ \zeta = z + \tau\gamma$“.

S. 166, Z. 21 v. o., der Integrationsbereich soll $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = t^2$ statt $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ sein.

S. 176, Z. 1 v. u.: streiche die Worte: „Forderung der“.

S. 193, Formel (18), lies „$\sqrt{p + \alpha^2}$“ statt „$\sqrt{p^2 + \alpha^2}$“.

S. 199, Z. 6 v. u., lies „$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\gamma^n} e^{\gamma t}\right]_{\gamma=0}$“ statt „$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n} e^{\gamma t}\right]_{t=0}$“.

S. 199, letzte Zeile, der Integrationsweg des ersten Integrals soll L statt L' sein.

S. 203, letzte Zeile, lies „$e^{x\sigma}$“ statt „$e^{\gamma\sigma}$“.

S. 228, Z. 14 v. o.: statt „im Gebiet G stetig“ lies „im Gebiet G stückweise stetig“.

S. 228, Fußnote[1] Z. 5 v. o.: statt „$z = f(x_1 \cdots),$“ lies „$z = f(x_1, \cdots),$“.

S. 228, Fußnote[1] Z. 2 v. u.: statt „der Funktion“ lies „einer stetigen Funktion“.

S. 238, Z. 7 v. o., lies „$u = \sigma$“ statt „$w = \sigma$“.

S. 240, Z. 3 v. u., lies „g“ statt „G“.

S. 241, in Zeilen 11, 13 v. o. ersetze die Integranden K durch Kg.

S. 242, Z. 17 v. o., lies „nicht positiv“ statt „nicht negativ“.

S. 242, nach Formel (7) ergänze „$\rho^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$“,

S. 243, Z. 21 v. o., lies „$R\omega_n H$“ statt „$\omega_n H$“.

S. 245, ergänze den Faktor $\frac{1}{R}$ zu den Ausdrücken auf Z. 12 und 13.

S. 248, erste Zeile, lies „$\bar{u}$“ statt „u“.

S. 260, Z. 10 v. u.: statt „$M(R) = uo \cdots$“ lies „$M(R) = u_o \cdots$“.

S. 262, Z. 2 v. u.: statt „Gebieten G_ν“ lies „Teilgebieten G_ν“.

S. 263, Z. 14 v. o.: statt „im Innern von G“ lies „in G“.

S. 265, Z. 17 v. o., lies „Abb. 22“ statt „Abb. 23“.

S. 269, Z. 22 v. o.: statt „E. NEUMANN“ lies „C. NEUMANN“.

S. 269, Z. 1 v. u.: der letzte Teil der Gleichung (3) ist einschließlich des Gleichheitszeichens zu streichen.

S. 273, Z. 1 v. o.: lies richtig „Bei Annäherung an den Nullpunkt mit $x > 0$ nähert …“.

S. 274, Z. 2 v. u.: „SCHAUDER“ statt „SCHANDER“.

S. 285, Z. 26 v. o.: hinter „Funktion“ füge ein: „—oder allgemein eine nicht-negative additive Mengenfunktion —“.

S. 307, Z. 11 v. u.: Vertausche die Sätze: „Mit anderen Worten, ⋯ gehört“. und „Endlich ⋯ bestimmt ist.“

S. 310, Z. 4 v. u.: statt „$\delta u u_t$“ lies „$2\delta u u_t$“ im letzten Teil der Formel.

S. 312, Formel (3), lies „$vL[u]$“ statt „$Lv[u]$“.

S. 313, Z. 10 v. o., lies „$q = u_y$“ statt „$p = u_y$“.

S. 314, Formel (6), Zeile 2, das „+“ vor dem Integralzeichen ist durch „−“ zu ersetzen, während das „−“ vor dem letzten Klammerausdruck des Integranden durch „+“ zu ersetzen ist.

S. 317, Z. 4 v. o., lies „$f(z)$“ statt „$g(z)$“.

S. 326, Formel (1) lies „$<$“ statt „$>$“.

S. 331, Z. 14 v. u., lies „$A = u - px_\alpha - qy_\alpha = 0$“.

S. 333, Z. 16 v. o.: statt „unabhängigen Koeffizienten“ lies „abhängigen Koeffizienten“.

S. 356, vor den Ausdrücken in Z. 9 und 12 v. o. ist ein $\sum$ zu setzen.

S. 356, Z. 13 v. o.: der letzte Satz soll lauten: „Jedes Flächenelement, dessen Normale zeitartig gerichtet ist, ist raumartig“.

S. 359, Formel (4): „$\operatorname{grad}\psi^2$“ ist durch „$\sqrt{(\operatorname{grad}\psi)^2}$“ zu ersetzen.

S. 360, Z. 8 v. u., lies „$| v_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, \epsilon) - v_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, -\epsilon) | < A\epsilon$“.

S. 387, Z. 10 v. o. lies:

$$\int_{o_m} \cdots \int f\, do_m = r \int_{\rho \leq r} \cdots \int f(x_1, \cdots, x_{m-1}, \sqrt{r^2 - \rho^2}) \frac{dx_1 \cdots dx_{m-1}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$
$$+ r \int_{\rho \leq r} \cdots \int f(x_1, \cdots, x_{m-1}, \sqrt{r - \rho^2}) \frac{dx_1 \cdots dx_{m-1}}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

S. 390, Zwischen 7. und 8. Zeile v. u.

lies „$\int_t^\infty$“ statt „$\int_0^\infty$“

Zwischen 6. and 7. Zeile v. u.

lies „$\int_0^\infty$“ statt „$\int_t^\infty$“

S. 390, Fussnote: 1. Zeile: lies „$r < t$“ statt „$r > t$“.

S. 395, Z. 16 v. o., lies „bei geradem $m \cdots$" statt „bei ungeradem m

S. 404, Z. 14 v. o., lies „$u = 0$ für $r > t$ und für $r < t$:"

S. 409, Z. 7 v. u., die obere Grenze des Integrals soll t sein.

S. 411, Z. 3 v. u., der Integrand „Δf" ist durch „$\Delta\psi$" zu ersetzen.

S. 416, Z. 19 v. o., lies „$(\nu + 1)d_{m,\nu} = \frac{m-3}{2} - \nu$".

437, Z. 2 der Fussnote, lies „in $b + \frac{\omega}{\eta}(1 + \eta + \cdots)$".

S. 474, Z. 6 v. o., statt „$\sum_{n=1}^{\infty}$" lies „$\sum_{\nu=1}^{\infty}$".

S. 477, Z. 13 v. o.: Ergänze die Fussnote: „Nach der Transformation braucht der Integrand nötigenfalls nicht mehr den Bedingungen (3) und (4) zu genügen".

S. 483, Z. 3 v. o., ersetze „u" durch „$u - g$".

S. 485, Z. 11 v. o., lies „S. 479" statt „S. 470".

S. 485: Z. 18–21 ist zu ersetzen durch: „Wenn wir Abschätzung (11) auf $\psi = \varphi - g$ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ anwenden und $E[\varphi] \geq 0$ beachten, erhalten wir
Satz 2. Das Variationsproblem I ist sinnvoll, d. h. der Ausdruck $E[\varphi] - 2H[f, \varphi]$ hat eine endliche untere Grenze für φ aus $\mathfrak{D}$ und $\varphi - g$ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$.

S. 486, Z. 4 v. o., lies „φ^ν aus $\mathfrak{D}$ mit $\varphi^\nu - g$ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$" statt „φ^ν aus $\mathring{\mathfrak{D}}$".

S. 486, Z. 2 v. o.: nach (11) füge hinen „und der Dreiecksungleichung".

S. 487, Z. 4 v. u. lies, „$E[u] - 2H[f, u] = d$" statt „$D[u] = d$".

S. 487, Z. 12 v. u. ersetze „$\mathring{\mathfrak{D}}$" durch „$\mathfrak{D}$".

S. 488, Z. 20 v. o., lies „mit $k(x_1, y_1)k(x_2, y_2)$" statt „mit k".

S. 499, Z. 23 v. o., lies „in $\dot{\mathfrak{D}}$" statt „in $\mathring{\mathfrak{D}}$".

S. 500, Z. 27, v. o., das „$-$" ist durch „$+$" vor dem Ausdruck H zu ersetzen.

S. 501, erste Zeile, lies „§2" statt „§1".

S. 504, Z. 17 v. o., lies „Relation (4)" statt „Relation (7)".

S. 504, Z. 20 und 23 v. o., lies „$+$" vor den Ausdrücken H.

S. 509, Z. 13 v. o., lies „$\sqrt{p}\,\varphi = \varphi_1$" statt „$\sqrt{p}\,\varphi = \psi$".

S. 509, Z. 14 v. o., lies „φ_1" statt „ψ".

Der vorliegende zweite Band, welcher vom vorangehenden im wesentlichen unabhängig ist, enthält eine systematische Theorie der partiellen Differentialgleichungen unter Gesichtspunkten der mathematischen Physik. Im letzten, siebenten, Kapitel werden auf Grund direkter Methoden der Variationsrechnung Existenzbeweise für Randwert- und Eigenwertprobleme elliptischer Differentialgleichungen erbracht in dem Umfange, in welchem solche Probleme vorher in diesem Werke aufgetreten sind.

Erstes Kapitel.

Vorbereitung. – Grundbegriffe.

Wir beginnen mit einer vorbereitenden Orientierung über Grundbegriffe, Fragestellungen und Ansätze zur Lösung von Problemen.

Das Grundproblem der Theorie der partiellen Differentialgleichungen läßt sich folgendermaßen formulieren. Gegeben sei eine Relation

$$F(x, y, \ldots; u; u_x, u_y, \ldots; u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0, \tag{1}$$

wobei F eine Funktion der Variablen $x, y, \ldots; u; u_x, u_y, \ldots; u_{xx}, u_{xy}, \ldots$ ist. Gesucht ist eine Funktion $u(x, y, \ldots)$ der unabhängigen Veränderlichen $x, y, \ldots$ derart, daß F identisch in diesen Veränderlichen verschwindet, wenn wir für u diese Funktion $u(x, y, \ldots)$ und weiterhin

$$\begin{array}{ll} u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, & u_y \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots \\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}$$

einsetzen.

Eine Funktion $u(x, y, \ldots)$ dieser Art heißt eine *Lösung*, manchmal auch ein *„Integral" der partiellen Differentialgleichung* (1). Es wird sich nicht nur darum handeln, einzelne („partikuläre") Lösungen aufzufinden, sondern, eine Übersicht über die Gesamtheit der Lösungen zu gewinnen und darum, individuelle Lösungen durch weitere zur Differentialgleichung (1) hinzutretende Zusatzbedingungen zu kennzeichnen.

Die partielle Differentialgleichung (1) geht in eine gewöhnliche Differentialgleichung über, wenn die Anzahl der Veränderlichen Eins ist. Den Grad der höchsten in der Differentialgleichung auftretenden Ableitung bezeichnen wir als die *Ordnung* der Differentialgleichung.

Wir werden vielfach die unabhängigen Veränderlichen $x, y, \ldots$ auf ein bestimmtes Gebiet des $x, y, \ldots$-Raumes beschränken und ebenso auch F nur in einem beschränkten Bereiche des $x, y, \ldots, u, u_x, u_y \ldots$-Raumes betrachten; dies letztere bedeutet dann, daß man in dem zugrunde liegenden $x, y, \ldots$ -Bereiche nur solche Funktionen $u(x, y, \ldots)$ zuläßt, für welche die betreffenden den Argumenten von F auferlegten Beschränkungen zutreffen. Den Vorbehalt, daß alle unsere Betrachtungen sich immer nur auf gewisse passend eng zu wählende Bereiche beziehen, machen wir ein für alle Male[1]. Ebenso setzen wir ein für alle Male voraus, daß die auftretenden Funktionen $F, u, \ldots$ stetig sind und stetige Ableitungen aller vorkommenden Ordnungen besitzen, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes bemerkt wird[1].

Wenn F linear in den Größen $u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy} \ldots$ ist mit Koeffizienten, welche nur von den unabhängigen Veränderlichen $x, y, \ldots$ abhängen, dann heißt die Differentialgleichung *linear*. Ist F wenigstens linear in den Ableitungen der höchsten, etwa n^{ten}, auftretenden Ordnung mit Koeffizienten, welche außer von $x, y \ldots$ noch von u und den Ableitungen von u bis zur $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung abhängen dürfen, so heißt die Differentialgleichung *quasilinear*.

Meist werden wir es mit linearen oder höchstens quasilinearen Differentialgleichungen zu tun haben; allgemeinere Differentialgleichungen werden wir vielfach auf solche zurückführen.

Für viele unserer Untersuchungen wird es genügen, nur zwei unabhängige Veränderliche zu betrachten. Wir können dann die Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung (1) geometrisch als Fläche, „*Integralfläche*", im x, y, u-Raume deuten.

§ 1. Orientierung über die Mannigfaltigkeit der Lösungen.

1. Beispiele. Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist die Gesamtheit der Lösungen (eventuell bis auf „singuläre" Lösungen) gegeben durch eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x, welche außerdem noch von n willkürlichen Integrationskonstanten $c_1, \ldots, c_n$ abhängt; umgekehrt erhält man zu einer n-parametrigen Funktionenschar

$$u = \varphi(x; c_1, \ldots, c_n)$$

eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit $u = \varphi$ als Lösung, indem man aus dieser Gleichung und aus den durch Differentiation entstehenden n Gleichungen

---

[1] Dies gilt insbesondere auch stets, wenn Gleichungssysteme aufgelöst werden. Die Überlegungen beziehen sich dann, ohne daß dies stets besonders hervorgehoben wird, auf die Umgebung einer Stelle, an welcher z. B. die betreffende Funktionaldeterminante nicht verschwindet.

$$u' = \varphi'(x; c_1, \ldots, c_n)$$

$$u^{(n)} = \varphi^{(n)}(x; c_1, \ldots, c_n)$$

die Parameter $c_1, \ldots, c_n$ eliminiert.

Bei partiellen Differentialgleichungen liegen die Verhältnisse komplizierter. Auch hier kann man nach der Lösungsgesamtheit oder der „*allgemeinen Lösung*" fragen, d. h. nach einer Lösung, welche durch Spezialisierung gewisser in ihr auftretender willkürlicher Elemente alle individuellen Lösungen (eventuell wieder mit Ausnahme gewisser „singulärer" Lösungen) liefert. Es zeigt sich nun, daß solche willkürlichen Elemente bei partiellen Differentialgleichungen nicht mehr in der Form willkürlicher Integrationskonstanten, sondern in Form willkürlicher Funktionen auftreten, in einer Anzahl, die im allgemeinen gleich der Ordnung der Differentialgleichung ist. Diese willkürlichen Funktionen hängen dabei von einer Variablen weniger ab als die Lösung u. Eine Präzisierung dieser Verhältnisse wird sich aus dem Existenzsatze des § 7 ergeben. Hier begnügen wir uns mit einer Orientierung an Hand einiger Beispiele.

Abb. 1.

1. Die Differentialgleichung

$$u_y = 0$$

für eine Funktion $u(x, y)$ sagt aus, daß u nicht von y abhängt; also ist

$$u = w(x),$$

wobei $w(x)$ eine willkürliche Funktion von x bedeutet[1].

2. $$u_{xy} = 0.$$

Als Gesamtheit der Lösungen ergibt sich sofort

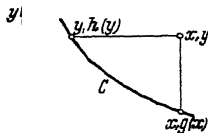
$$u = w(x) + v(y).$$

3. Als Lösung der unhomogenen Differentialgleichung

$$u_{xy} = f(x, y)$$

erhalten wir die Funktion

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + w(x) + v(y)$$

mit willkürlichen Funktionen w und v und Werten x_0, y_0; man kann allgemeiner für das Integral ein Gebietsintegral schreiben, wenn man als Integrationsgebiet ◸ ein Dreieck wie in der obenstehenden Abb. 1 nimmt, dessen krummlinige Begrenzung aus einer Kurve C: $y = g(x)$

[1] Mit w und v sollen im allgemeinen auch im folgenden willkürliche Funktionen bezeichnet werden.

oder $x = h(y)$ besteht, die von keiner Parallelen zur x- oder y-Achse in mehr als einem Punkte geschnitten wird. Es ist dann

$$u(x, y) = \iint_G f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + w(x) + v(y) \tag{2}$$

$$u_x = \int_{g(x)}^{y} f(x, \eta)\, d\eta + w'(x), \qquad u_y = \int_{h(y)}^{x} f(\xi, y)\, d\xi + v'(y).$$

Die spezielle Lösung der Differentialgleichung, die sich für $w(x) = v(y) = 0$ ergibt, hat also die Eigenschaft, daß für einen Punkt x, y auf der Kurve C

$$u = u_x = u_y = 0$$

wird.

4. Die partielle Differentialgleichung

$$u_x = u_y$$

geht durch die Variablentransformation

$$x + y = \xi, \qquad x - y = \eta; \qquad u(x, y) = \omega(\xi, \eta)$$

über in

$$2\omega_\eta = 0,$$

woraus sich die „allgemeine Lösung" $\omega = w(\xi)$, d. h.

$$u = w(x + y)$$

ergibt.

Ebenso findet man bei konstantem α und β für die Differentialgleichung

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0$$

als Lösungsgesamtheit

$$u = w(\beta x - \alpha y).$$

5. Ist allgemein $g(x, y)$ eine gegebene Funktion von x, y, so bedeutet die partielle Differentialgleichung

$$u_x g_y - u_y g_x = 0,$$

d. h. das Verschwinden der Funktionsdeterminante $\frac{\partial(u, g)}{\partial(x, y)}$ von u, g nach x, y, nach elementaren Sätzen der Differentialrechnung, daß u von g abhängig ist, d. h. daß

$$u = w(g(x, y)) \tag{3}$$

gilt, wobei w eine willkürliche Funktion der Größe g bedeutet. Da auch umgekehrt jede solche Funktion der Differentialgleichung $u_x g_y - u_y g_x = 0$ genügt, so haben wir damit die Gesamtheit der Lösungen mittels der willkürlichen Funktion w gewonnen.

Bemerkenswerterweise gilt genau dasselbe Resultat für die allgemeinere — nämlich quasilineare — Differentialgleichung

$$u_x g_y(x, y, u) - u_y g_x(x, y, u) = 0,$$

wobei nunmehr g explizite nicht nur von x, y, sondern auch noch von der unbekannten Funktion $u(x,y)$ abhängt. Für die Funktionaldeterminante von $u(x,y)$ und $\gamma(x,y) = g(x,y,u(x,y))$ gilt nämlich

$$u_x \gamma_y - u_y \gamma_x = u_x g_y - u_y g_x + u_x g_u u_y - u_y g_u u_x = 0.$$

Also ist auch jetzt die Lösung durch die Relation

$$u(x,y) = W(g(x,y,u)) \tag{4}$$

gegeben, die wir als implizite Definition von u mittels der willkürlichen Funktion W anzusehen haben.

Zum Beispiel ergibt sich für die Lösung $u(x,y)$ der Differentialgleichung

$$\alpha(u) u_x - \beta(u) u_y = 0$$

die implizite Definition $\alpha(u)\, y + \beta(u)\, x = w(u)$ oder

$$u = W(\alpha(u)\, y + \beta(u)\, x), \tag{5}$$

so daß also u von der willkürlichen Funktion W in verhältnismäßig komplizierter Weise abhängt. (Eine Anwendung dieser Betrachtung wird in § 7 gemacht werden.)

6. Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

geht durch die Transformation $x + y = \xi$, $x - y = \eta$, $u(x,y) = \omega(\xi,\eta)$ über in

$$4\,\omega_{\xi\eta} = 0.$$

Ihre Lösungen sind so nach Beispiel 2:

$$u(x,y) = w(x+y) + v(x-y).$$

7. Ganz ähnlich erhalten wir als Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$u_{xx} - \frac{1}{t^2} u_{yy} = 0$$

für einen beliebigen Wert des Parameters t den Ausdruck

$$u = w(x + t\,y) + v(x - t\,y).$$

Insbesondere muß also die Funktion

$$u = (x + t\,y)^n$$

oder

$$u = (x - t\,y)^n$$

eine Lösung sein, d. h. es muß

$$t^2 u_{xx} - u_{yy}$$

für alle Werte von x und y bei reellem t verschwinden. Nach einem bekannten Satz der Algebra verschwindet aber eine ganze rationale

Funktion in t, die für alle reellen Werte von t verschwindet, auch für alle komplexen t-Werte. Setzen wir daher $t = i = \sqrt{-1}$, so geht die Differentialgleichung über in die *Potentialgleichung*

8. $$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

und wir erhalten für diese Lösungen in der Form

$$(x + iy)^n = P_n(x, y) + i\,Q_n(x, y)$$
$$(x - iy)^n = P_n(x, y) - i\,Q_n(x, y),$$

wo P_n und Q_n Polynome mit reellen Koeffizienten sind, die selbst der Potentialgleichung genügen müssen[1]. So gewinnen wir für $n = 0, 1, 2 \ldots$ unendlich viele Lösungen der Potentialgleichung, aber im Gegensatz zu den früheren Beispielen zunächst nur abzählbar viele.

Bei Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ durch $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ wird

(6) $$P_n(x, y) = r^n \cos n\vartheta, \qquad Q_n(x, y) = r^n \sin n\vartheta.$$

Die Funktionen

$$P_\alpha(x, y) = r^\alpha \cos\alpha\vartheta, \qquad Q_\alpha(x, y) = r^\alpha \sin\alpha\vartheta$$

genügen nun auch bei beliebigem reellen α in jedem den Nullpunkt $x = y = 0$ ausschließenden Gebiet der x, y-Ebene der Potentialgleichung; man erkennt dies sofort nach Transformation von Δu auf Polarkoordinaten (vgl. Bd. I, 2. Aufl., S. 195)

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2} u_{\vartheta\vartheta}.$$

Wählen wir zwei Funktionen $w(\alpha)$ und $v(\alpha)$ derart, daß die Ableitungen der Integrale

$$\int_a^b w(\alpha)\, r^\alpha \cos\alpha\vartheta\, d\alpha \qquad \text{und} \qquad \int_a^b v(\alpha)\, r^\alpha \sin\alpha\vartheta\, d\alpha$$

bis zur zweiten Ordnung durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewonnen werden können, so haben wir in der Form

$$\int_a^b r^\alpha \left(w(\alpha)\cos\alpha\vartheta + v(\alpha)\sin\alpha\vartheta\right) d\alpha$$

eine von zwei willkürlichen Funktionen w und v abhängige Lösungsmannigfaltigkeit.

9. Als Beispiel für eine Differentialgleichung höherer Ordnung betrachten wir

$$u_{xxyy} = 0$$

---

[1] Diese Lösungen bilden ein elementares Beispiel für die allgemeine Tatsache, daß Realteil sowie Imaginärteil jeder analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen $x + iy$ der Potentialgleichung genügt.

und finden als allgemeine Lösung

$$u(x, y) = w(y) + x w_1(y) + v(x) + y v_1(x).$$

10. Ist die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen größer als zwei — z. B. drei —, so wird man in der Lösungsgesamtheit das Auftreten von willkürlichen Funktionen erwarten, die von zwei bzw. noch mehr unabhängigen Veränderlichen abhängen. Z. B. besitzt die partielle Differentialgleichung

$$u_x = 0$$

für die Funktion $u(x, y, z)$ die allgemeine Lösung

$$u = w(x, y).$$

2. Differentialgleichungen zu gegebenen Funktionenscharen und -familien. Wir stellen uns die Frage, ob ähnlich wie in Nr. 1 für den Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen auch partielle Differentialgleichungen konstruiert werden können, denen alle Funktionen einer gegebenen Mannigfaltigkeit genügen. Eine Mannigfaltigkeit von Funktionen, die von willkürlichen Funktionen abhängen, nennt man eine Funktionenfamilie.

Wir denken z. B. eine Funktionenfamilie in der Gestalt

$$u = f(x, y, w(g(x, y))) \tag{7}$$

gegeben, wobei f eine gegebene Funktion der Argumente x, y, w und $g(x, y)$ eine gegebene Funktion von x und y, z. B. $g = xy$ ist. Um zu einer partiellen Differentialgleichung für diese Funktionenfamilie zu gelangen, differenzieren wir die Gleichung (7) nach x und y und erhalten die beiden Gleichungen

$$u_x = f_x + f_w w' g_x$$
$$u_y = f_y + f_w w' g_y.$$

Durch Elimination von w' gewinnen wir dann als gesuchte Differentialgleichung

$$(u_x - f_x) g_y - (u_y - f_y) g_x = 0, \tag{8}$$

wobei die willkürliche Funktion w, die noch in f_x und f_y steckt, aus der Gleichung (7) durch x, y, u ausgedrückt zu denken ist.

Die so entstehende partielle Differentialgleichung ist noch von speziellem, nämlich quasilinearen Typus, da sie die Ableitungen linear enthält. Die angegebene Darstellung unserer Funktionenfamilie ist also nicht allgemein genug, um zu jeder Differentialgleichung erster Ordnung zu führen.

Gehen wir dagegen nicht von einer Funktionenfamilie, sondern von einer nur von zwei Parametern α, β abhängigen Funktionenschar

$$u = f(x, y; \alpha, \beta)$$

aus und bilden die Ableitungen

$$u_x = f_x(x, y; \alpha, \beta),$$
$$u_y = f_y(x, y; \alpha, \beta),$$

so haben wir drei Gleichungen, aus denen wir im allgemeinen α und β eliminieren können (sicher dann, wenn $f_{x\alpha} f_{y\beta} - f_{x\beta} f_{y\alpha} \neq 0$ ist). Wir erhalten eine partielle Differentialgleichung $f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, die im allgemeinen nicht mehr linear in u_x und u_y sein wird.

Die Paradoxie, daß eine engere Mannigfaltigkeit von Lösungen zu einem allgemeineren Typus von Differentialgleichungen führt, wird sich in § 4 in einfacher Weise aufklären.

Beispiele: 1. Zu der Funktionenfamilie

$$u = w(x\,y)$$

ergibt sich durch Elimination von w' aus den Gleichungen

$$u_x = y\,w', \qquad u_y = x\,w'$$

die Differentialgleichung

$$x\,u_x - y\,u_y = 0.$$

Jede Funktion dieser Familie stellt geometrisch, wenn wir x, y, u als rechtwinklige Koordinaten deuten, eine Fläche dar, die von horizontalen Ebenen in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten wird.

2. Die Gesamtheit der *Rotationsflächen*, die aus einer ebenen Kurve durch Drehung um die u-Achse entstehen, wird durch die Funktionenfamilie

$$u = w(x^2 + y^2)$$

dargestellt. Die zugehörige Differentialgleichung ist

$$y\,u_x - x\,u_y = 0.$$

3. Als Differentialgleichung der Regelflächen, deren Erzeugende horizontale Gerade durch die u-Achse sind, deren Gesamtheit also durch die Familie

$$u = w\left(\frac{x}{y}\right)$$

dargestellt wird, finden wir

$$x\,u_x + y\,u_y = 0.$$

4. Die Differentialgleichung aller *abwickelbaren Flächen* ergibt sich aus der Definition dieser Flächen als *Enveloppen einer einparametrigen Ebenenschar*. Ihre Gesamtheit mit Ausnahme der zur x, y-Ebene senkrechten Zylinder wird durch die Funktionen

$$u = \alpha x + w(\alpha)\,y + v(\alpha) \tag{9}$$

dargestellt, wobei α aus der Gleichung

$$0 = x + w'(\alpha)\,y + v'(\alpha) \tag{10}$$

als Funktion von x und y zu berechnen ist. Die Funktion u hängt also hier von zwei willkürlichen Funktionen ab, und zwar in verwickelter Weise. Bilden wir die ersten Ableitungen u_x, u_y, so folgt wegen (9) sofort

$$u_x = \alpha$$
$$u_y = w(\alpha)\,,$$

also

$$u_y = w(u_x)\,. \tag{11}$$

Um w zu eliminieren, differenzieren wir nochmals:

$$u_{yy} = w' u_{xy}\,, \qquad u_{xy} = w' u_{xx}$$

und erhalten daraus

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0 \tag{12}$$

als gesuchte Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen mit Ausnahme der zur x, y-Ebene senkrechten Zylinder.

5. In allen diesen Beispielen läßt sich umgekehrt zeigen, daß alle Lösungen der betreffenden Differentialgleichungen den vorgegebenen Familien angehören.

6. Die Gesamtheit aller in den n unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ *homogenen Funktionen* $u(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grade α wird durch die Bedingung

$$u(t x_1, \ldots, t x_n) = t^\alpha u(x_1, \ldots, x_n)\,, \tag{13}$$

die in t identisch bestehen muß, gekennzeichnet. Setzen wir $t = \frac{1}{x_n}$, so ergibt sich

$$u(x_1, \ldots, x_n) = x_n^\alpha u\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right.$$

und daher für u die Darstellung

$$u = x_n^\alpha w\left(\frac{x_1}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right). \tag{14}$$

Da umgekehrt jede solche mit Hilfe einer willkürlichen Funktion w von $n - 1$ Argumenten gebildete Funktion u die obige Homogenitätsbedingung erfüllt, so erhalten wir in der Form (14) die gesamte Familie der vom Grade α homogenen Funktionen.

Um eine partielle Differentialgleichung zu dieser Funktionenfamilie zu erhalten, differenzieren wir diese Gleichung partiell nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und eliminieren die Funktion w. So ergibt sich die *Eulersche Homogenitätsrelation*

$$x_1 u_{x_1} + \ldots + x_n u_{x_n} = \alpha\, u\,. \tag{15}$$

Wir können übrigens diese Relation auch direkt erhalten, indem wir die Gleichung (13) nach t differenzieren und nachträglich $t = 1$ setzen.

Umgekehrt folgt aus dem Bestehen der Homogenitätsrelation (15) für eine Funktion $u(x_1, \ldots, x_n)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t^\alpha}u(t x_1, \ldots, t x_n)\right)$$

$$\frac{}{t^{\alpha+1}} \sum_{i=1} t x_i\, u_{x_i}(t x_1, \ldots, t x_n) - \alpha\, u(t x_1, \ldots, t x_n \quad = 0,$$

so daß der Ausdruck $\frac{1}{t^\alpha} u(t x_1, \ldots, t x_i)$ eine von t nicht abhängige Funktion, also speziell gleich $u(x_1, \ldots, x_n)$ sein muß. D. h. aber nach (13), das u homogen ist.

§ 2. Systeme von Differentialgleichungen.

1. Problem der Äquivalenz von Systemen und einzelnen Differentialgleichungen. Während bei gewöhnlichen Differentialgleichungen Äquivalenz zwischen der Theorie einzelner Differentialgleichungen und der Theorie von Systemen von solchen besteht, liegen die Verhältnisse bei partiellen Differentialgleichungen anders.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

kann durch die Substitution $y' = z$ auf ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für zwei Funktionen $y(x)$ und $z(x)$

$$\begin{aligned} F(x, y, z, z') &= 0 \\ y' - z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

zurückgeführt werden.

Jede Lösung der Differentialgleichung (1) führt zu einer Lösung des Systems (2) und umgekehrt. Auch umgekehrt gilt: Ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \qquad g(x, y, z, y', z') = 0 \tag{3}$$

für zwei Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ läßt sich auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine der Funktionen und auf Eliminationsprozesse zurückführen, vorausgesetzt, daß in dem betrachteten Argumentbereiche $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$ ist.

Es lassen sich nämlich dann die Gleichungen (3) nach z' und z auflösen in der Form

$$z' = \varphi(x, y, y'), \qquad z = \psi(x, y, y'), \tag{3a}$$

und durch Differentiation der zweiten Gleichung und Elimination gewinnen wir unmittelbar in

$$\varphi(x, y, y') - \psi_x - \psi_y y' - \psi_{y'} y'' = 0 \tag{3b}$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $y(x)$ allein. Setzen wir eine Lösung dieser Differentialgleichung (3b) in die Relation $z = \psi(x, y, y')$ ein, so erhalten wir sofort die zugehörige Funktion z, welche zusammen mit y das ursprüngliche System (3) oder (3a) löst.

Unter der Voraussetzung $f_z g_{z'} - f_{z'} g_z \neq 0$ ist daher unser System (3) tatsächlich einer einzigen Differentialgleichung äquivalent.

Wir betrachten nunmehr eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \tag{4}$$

für eine Funktion $u(x, y)$. Durch die Substitution $u_x = p$, $u_y = q$ gelangen wir zu einem System von drei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für drei Funktionen u, p, q:

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q, p_x, p_y, q_y) &= 0 \\ u_x - p &= 0 \\ u_y - q &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Jede Lösung u, p, q dieses Systems liefert mit u eine Lösung der Differentialgleichung (4) und umgekehrt führt jede Lösung u von (4) zu dem Lösungssystem u, u_x, u_y von (5).

Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist also einem System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung äquivalent, allerdings von recht spezieller Gestalt. *Das umgekehrte jedoch ist keineswegs richtig.* Nicht jedes System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung — und also erst recht nicht jedes System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung — ist einer Differentialgleichung zweiter Ordnung äquivalent[1].

Zur Diskussion dieser Verhältnisse untersuchen wir, ob analog zu gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen sich aus den beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} f(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) &= 0 \\ g(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

für zwei unbekannte Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ durch einmalige Differentiation und Elimination eine äquivalente partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für u allein gewinnen läßt. Durch Differentiation nach x und y erhält man vier weitere Gleichungen. Man müßte also dann aus den sechs Gleichungen die sechs unbekannten Größen v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy} eliminieren, um statt des Systems (6) eine einzige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für u zu erhalten. Eine

[1] Wir werden jedoch in § 7 sehen, daß eine solche Äquivalenz unter Umständen hergestellt werden kann, indem man zu den Differentialgleichungen noch gewisse, die Lösungsmannigfaltigkeit einschränkende „Anfangsbedingungen" hinzufügt. Vgl. im übrigen zum Äquivalenzproblem Anhang Nr. 2 und 3.

Elimination von sechs Größen aus sechs Gleichungen ist jedoch im allgemeinen nicht möglich. Daß sie nicht etwa generell durch die spezielle Struktur des gewonnenen Gleichungssystems ermöglicht wird, sieht man am besten an Hand von Gegenbeispielen ein[1].

Eine Fortsetzung des Abzählungsverfahrens zeigt, daß man auch beim Übergang zu höherer Ordnung nicht die Ersetzbarkeit des Differentialgleichungssystems (6) durch eine einzige Gleichung erwarten kann. Differenziert man z. B. jede unserer sechs Gleichungen noch einmal, so erhält man im ganzen zwölf Relationen, aus welchen man nunmehr zehn Größen $v, v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, v_{xxx}, v_{xxy}, v_{xyy}, v_{yyy}$ zu eliminieren hätte um eine Differentialgleichung dritter Ordnung für u allein zu erhalten. Da sich aber allgemein bei Elimination von 10 Größen aus zwölf Gleichungen zwei voneinander unabhängige Relationen als Ergebnis ergeben, so werden wir, wenn kein Spezialfall vorliegt[1], als Resultat der Elimination das Bestehen von zwei verschiedenen Differentialgleichungen dritter Ordnung für u allein erwarten müssen.

2. Bestimmte, überbestimmte, unterbestimmte Systeme. Die allgemeine Gestalt eines Systems von partiellen Differentialgleichungen in zwei unabhängigen Veränderlichen ist

$$(7)\quad \begin{cases} F_i(x, y, u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots\quad u^{(m)}, u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, \ldots,\quad u_x^{(m)}, u_y^{(m)}, u_{xx}^{(1)}, \ldots) = 0 \\ i = 1, \ldots, h \end{cases}$$

d.h. ein System von h Gleichungen für m Funktionen $u^{(1)}, \ldots, u^{(m)}$ der unabhängigen Veränderlichen x und y. Wir nehmen an, daß diese h Gleichungen voneinander unabhängig sind, d. h. daß keine von ihnen aus den anderen durch Differentiations- und Eliminationsprozesse gewonnen werden kann.

Ist $h = m$, so spricht man von einem *bestimmten System.* Ist $h > m$, so heißt das System *überbestimmt.* Ist dagegen $h < m$, so heißt es *unterbestimmt.*

Ein Beispiel für ein bestimmtes System sind die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* der Funktionentheorie für zwei Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$:

$$u_x - v_y = 0, \qquad u_y + v_x = 0.$$

[1] Ein Beispiel für ein solches Gleichungssystem, bei dem man durch Elimination und Differentiation nicht zu einer Gleichung zweiter Ordnung gelangt, ist

$$u_x + v_y = -yu$$
$$u_y + v_x = yv;$$

vielmehr ergeben sich hieraus für u zwei Gleichungen dritter Ordnung:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2 u + u_{yy} - u_{xx}) + u_x + yu = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2 u + u_{yy} - u_{xx}) + u_y - y(y^2 u + u_{yy} - u_{xx}) = 0.$$

Für dieses spezielle bestimmte System folgt ohne weiteres durch Differentiation und Elimination, daß u und v allein den partiellen Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta v = 0$ genügen (vgl. Nr. 1).

Das einfachste Beispiel für ein überbestimmtes System für eine Funktion $u(x, y)$ ist

$$u_x = f(x, y), \qquad u_y = g(x, y).$$

Bekanntlich ist für die Lösbarkeit dieses Systems die Bedingung

$$f_y = g_x$$

notwendig und hinreichend.

Ein weiteres Beispiel liefert uns die Theorie der *analytischen Funktionen* $f(z_1, z_2)$ *von zwei komplexen Veränderlichen*

$$z_1 = x_1 + i y_1, \qquad z_2 = x_2 + i y_2.$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, welche den analytischen Charakter der Funktion $f(z_1, z_2) = u + iv$ hinsichtlich der Variablen ausdrücken, lauten

$$(8) \qquad \begin{cases} & u_{x_2} = v_{y_2} \\ u_{y_1} = - v_{x_1}, & u_{y_2} = - v_{x_2} \end{cases}$$

und führen durch Differentiation zu dem folgenden überbestimmten System für u allein:

$$(8') \qquad \begin{cases} u_{x_1 x_1} + u_{y_1 y_1} = 0, & u_{x_1 x_2} + u_{y_1 y_2} = 0 \\ u_{x_2 x_2} + u_{y_2 y_2} = 0, & u_{x_1 y_2} - u_{x_2 y_1} = 0. \end{cases}$$

Die Überbestimmtheit dieses Systemes weist darauf hin, daß die Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher ihrem Wesen nach komplizierter ist als die klassische Theorie bei einer komplexen Veränderlichen.

Ein drittes Beispiel für ein überbestimmtes System liefert die Einführung homogener Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ an Stelle der n Variablen $x, y, \ldots$ vermittels der Relationen

Eine Funktion $u(x, y, \ldots)$ geht dann über in eine Funktion $\omega(x_1, x_2, \ldots)$, die in den neuen Variablen homogen vom nullten Grade ist und daher der Eulerschen Homogenitätsrelation

$$x_1 \omega_{x_1} + x_2 \omega_{x_2} + \ldots = 0$$

genügt. Die partiellen ersten Ableitungen der Funktion $u(x, y, \ldots)$ nach $x, y, \ldots$ drücken sich durch die Ableitungen der Funktion $\omega(x_1, x_2, \ldots)$ folgendermaßen aus:

$$u_x = x_1 \omega_{x_1}$$

$$u_y = x_1 \omega_{x_2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Ist daher für die Funktion u eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots) = 0$$

gegeben, so geht sie durch die Transformation über in eine ebensolche Differentialgleichung der Form

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, \omega, \omega_{x_2}, \omega_x \qquad = 0$$

für die Funktion $\omega(x_1, x_2 \ldots.)$, wozu noch als weitere Gleichung die Homogenitätsrelation

$$x_1\omega_{x_1} + x_2\omega_{x_2} + \ldots = 0$$

tritt. An Stelle einer Differentialgleichung erhalten wir also ein überbestimmtes System von zwei Gleichungen. Derselbe Sachverhalt tritt selbstverständlich auch auf, wenn wir ein System von Differentialgleichungen durch Einführung homogener Variablen umgestalten.

Ein Beispiel eines unterbestimmten Differentialgleichungssystems ist die Gleichung

$$u_x v_y - u_y v_x = 0,$$

die das identische Verschwinden der Funktionaldeterminante der beiden Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ besagt. Aus ihr folgt[1], daß zwischen u und v eine Relation

$$w(u, v) = 0$$

besteht, die die unabhängigen Variablen x und y nicht explizit enthält. Diese Relation können wir als die allgemeine Auflösungsformel des unterbestimmten Differentialgleichungssystems ansehen.

Allgemein gilt für ein System von n Funktionen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entsprechend, daß das Verschwinden der Funktionaldeterminante:

$$(9) \qquad \frac{\partial(u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \quad \begin{matrix} u^{(1)} & u^{(n)} \\ \\ u^{(1)} & u^{(n)} \end{matrix} \quad = 0$$

charakteristisch für eine Abhängigkeit zwischen den n Funktionen $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ ist:

$$(10) \qquad w(u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}) = 0.$$

Auch diese Relation (10) können wir daher als eine Auflösung des unterbestimmten Differentialgleichungssystems (9) auffassen.

§ 3. Integrationsmethoden bei speziellen Differentialgleichungen.

1. Separation der Variablen. Bei vielen in der mathematischen Physik vorkommenden Differentialgleichungsproblemen können wir durch spezielle Ansätze zwar nicht direkt die Gesamtheit der Lösungen, aber

[1] Vgl. § 1, Nr. 1, Beispiel 5.

doch eine von willkürlichen Parametern abhängige Schar von Lösungen gewinnen.

Wir erläutern die wichtigste Methode dieser Art, die man als die Methode der *Separation der Variablen* bezeichnet, an einer Reihe von Beispielen.

1. $$u_x^2 + u_y^2 = 1.$$

Durch den Ansatz

$$u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$$

erhalten wir

$$(\varphi'(x))^2 + (\psi'(y))^2 = 1$$

oder

$$(\varphi'(x))^2 = 1 - (\psi'(y))^2.$$

Da in dieser Gleichung die rechte Seite nicht von x, die linke nicht von y abhängt, sind beide gleich ein und derselben Konstanten α^2 und so erhalten wir unmittelbar die zweiparametrige Lösungsschar

$$u(x, y) = \alpha x + \sqrt{1-\alpha^2}\, y + \beta \tag{1}$$

mit den Parametern α und β.

2. Entsprechend erhalten wir für die Differentialgleichung

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$$

für eine Funktion u der drei Variablen x, y, z durch den Ansatz

$$u = \varphi(x) + \psi(y) + \chi(z)$$

die Lösungsschar

$$u = \alpha x + \beta y + \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\, z + \gamma, \tag{2}$$

welche von drei willkürlichen Parametern α, β, γ abhängt.

3. Der Ansatz

$$u = \varphi(x) + \psi(y)$$

führt bei der Differentialgleichung

$$f(x) u_x^2 + g(y) u_y^2 = a(x) + b(y)$$

zum Ziel. Es ergibt sich

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{a(\xi) + \alpha}{f(\xi)}}\, d\xi + \int_{y_0}^{y} \sqrt{\frac{b(\eta) - \alpha}{g(\eta)}}\, d\eta + \beta, \tag{3}$$

wobei α und β willkürlich wählbare Konstante sind.

4. Die Methode der Separation der Variablen wird häufig mit Erfolg angewandt, nachdem eine geeignete Transformation der Variablen vorangegangen ist. So geht die in der Himmelsmechanik beim *Zweikörperproblem* auftretende Gleichung

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{k}{r} - h \qquad (r^2 = x^2 + y^2;\ \ k,\ h \text{ Konstante})$$

durch Transformation der Variablen x, y auf Polarkoordinaten r, ϑ über in die Gleichung

$$u_r^2 + \frac{1}{r^2} u_\vartheta^2 = \frac{k}{r} - h \quad \text{oder} \quad r^2 u_r^2 + u_\vartheta^2 = k r - h r^2$$

für die Funktion $u(r,\vartheta)$, die durch die Transformation aus $u(x,y)$ entsteht. Die Formel (3) liefert uns daher die Lösungsschar

$$u = \int^r \sqrt{\frac{k}{\varrho} - h - \frac{\alpha^2}{\varrho^2}}\, d\varrho + \alpha\vartheta + \beta,$$

die von zwei willkürlichen Parametern α und β abhängt.

5. Bei linearen Differentialgleichungen, insbesondere bei denen zweiter Ordnung, kann man oft mit Erfolg den Produktansatz

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

anwenden; zahlreiche Beispiele dafür enthält das fünfte Kapitel des ersten Bandes (vgl. Bd. I, Kap. V, §§ 4—9).

Ein weiteres Beispiel liefert die *Wärmeleitungsgleichung*

$$u_{xx} - u_y = 0. \tag{5}$$

Wir erhalten durch unseren Ansatz die Gleichung

$$\varphi''(x) : \varphi(x) = \psi'(y) : \psi(y).$$

Es muß also rechte und linke Seite dieser Gleichung eine Konstante sein. Man kann sie positiv oder negativ annehmen und entsprechend mit ν^2 oder $-\nu^2$ bezeichnen; man erhält so die Lösungsscharen

$$u = a \operatorname{Sin} \nu(x - \alpha)\, e^{\nu^2 y}$$
$$u = a \sin \nu(x - \alpha)\, e^{-\nu^2 y}.$$

Die letzte Lösung spielt in der mathematischen Physik, wenn u die Temperatur, y die Zeit, x eine Ortskoordinate bedeutet, eine besondere Rolle als Ausdruck einer mit der Zeit abklingenden Temperaturverteilung.

2. Erzeugung weiterer Lösungen durch Superposition. Grundlösung der Wärmeleitung. Poissons Integral. Aus den gewonnenen Lösungen linearer Differentialgleichungen kann man durch Summations-, Integrations- und Differentiationsprozesse weitere Lösungen gewinnen, wofür Kap. V von Bd. I ebenfalls zahlreiche Beispiele liefert (vgl. Bd. I, Kap. V, §§ 1—9). Wir können uns daher an dieser Stelle mit wenigen weiteren Beispielen begnügen.

Um eine weitere Lösung der *Wärmeleitungsgleichung* zu gewinnen, integrieren wir die Lösung $e^{-\nu^2 y} \cos \nu x$ nach dem Parameter ν von $-\infty$ bis $+\infty$ und finden die neue Lösung

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 y} \cos \nu x \, d\nu. \qquad (y > 0)$$

Das Integral rechts kann leicht berechnet werden[1] und ergibt

$$(6)\qquad u = \sqrt{\frac{\pi}{y}}\, e^{-\frac{x^2}{4y}}.$$

Als zweites Beispiel für das Superpositionsprinzip geben wir die Lösung der *Randwertaufgabe der Potentialgleichung* $\Delta u = 0$ für den Kreis $r^2 = x^2 + y^2 < 1$, wenn für $r = 1$ die Randwerte von u als stetig differenzierbare Funktion $g(\vartheta)$ des Polarwinkels ϑ gegeben sind. Verstehen wir unter

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi$$

die Fourierschen Entwicklungskoeffizienten von $g(\vartheta)$, so konvergiert

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos\nu\vartheta + b_\nu \sin\nu\vartheta)\, r^\nu$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu P_\nu(x, y) + b_\nu Q_\nu(x, y)$$

gleichmäßig für $r \leqq q < 1$. Diese Reihe, welche für $r \leqq q$ gliedweise zweimal differenziert werden darf, stellt eine Superposition der in § 1 Nr. 8 betrachteten Potentialfunktionen P_n und Q_n dar, ist daher selbst eine Potentialfunktion. Sie löst überdies das Randwertproblem. Im Inneren des Kreises dürfen wir Summation und Integration vertauschen und erhalten somit

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int g(\varphi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} r^\nu \cos\nu(\vartheta - \varphi)\right] d\varphi.$$

Indem wir schreiben: $2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$ und dann die entstehenden geometrischen Reihen unter dem Integralzeichen summieren, gelangen wir nach kurzer Umformung zu dem Ausdruck

$$(7)\qquad u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\vartheta - \varphi) + r^2}\, g(\varphi)\, d\varphi,$$

welcher die Lösung der Randwertaufgabe durch das Poissonsche Integral darstellte. (Vgl. Kap. IV und auch Bd. I, 2. Aufl., S. 444.)

[1] Zur Berechnung setze man $\nu^2 y = \lambda^2$. Es entsteht das Integral $\frac{1}{\sqrt{y}} J(a)$ mit $a = \frac{x}{\sqrt{y}}$ und $J(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2}\cos(a\lambda)\, d\lambda$. Um $J(a)$ zu berechnen, bilden wir durch Differentiation unter dem Integralzeichen $J'(a) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2}\lambda\sin(a\lambda)\, d\lambda$ und gewinnen durch Produktintegration fast unmittelbar $J'(a) = -\frac{a}{2} J(a)$, während wir direkt $J(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda = \sqrt{\pi}$ erhalten. Hieraus folgt $J(a) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{a^2}{4}}$ und damit (6).

§ 4. Geometrische Deutung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Das vollständige Integral.

1. Die geometrische Deutung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für eine Funktion $u(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen führt die geometrische Anschauung bereits einen wesentlichen Schritt in die Integrationstheorie hinein. Die partielle Differentialgleichung

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{1}$$

wobei zur Abkürzung $p = u_x$, $q = u_y$ gesetzt ist, besagt, daß für jede durch den Punkt mit den Koordinaten x, y, u gehende Integralfläche die beiden Größen p und q, welche die Stellung der Tangentialebene in diesem Punkte bestimmen, der Bedingung (1) unterworfen sind. Die Tangentialebene einer Integralfläche in dem betreffenden Punkte[1] kann also nicht mehr beliebige Lagen einnehmen, sondern ihre Stellung muß der durch die Gleichung (1) charakterisierten Mannigfaltigkeit angehören[2]. Diese Mannigfaltigkeit sei für einen gegebenen Punkt x, y, u eine einparametrige Schar (z. B. für $p^2 + q^2 = 1$ die Schar $p = \cos t$, $q = \sin t$ mit dem Parameter t). Ist F linear in p und q, so bildet diese Schar möglicher Tangentialebenen ein Büschel von Ebenen durch eine Gerade, die „*Mongesche Achse*". Wir lassen diesen speziellen Fall der „quasilinearen" Differentialgleichung erster Ordnung, der in § 5 besonders diskutiert wird, hier beiseite und nehmen an, daß für jeden betrachteten Punkt x, y, u unsere Ebenenschar einen Kegel umhüllt, den „Mongeschen[3] Kegel". Die Differentialgleichung wird also geometrisch durch ein einem gewissen Raumteil des x, y, u-Raumes zugeordnetes „*Kegelfeld*" repräsentiert, analog wie eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung durch ein Richtungsfeld repräsentiert wird. Eine Lösung der Differentialgleichung angeben, heißt eine Fläche suchen, die in jedem ihrer Punkte den zugehörigen Mongeschen Kegel berührt.

Die geometrische Anschauung macht nun ebenso wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung den folgenden Satz evident: *Besitzt eine von einem Parameter a abhängige Schar*

$$u = f(x, y, a) \tag{2}$$

von Lösungen der Differentialgleichung $F(x, y, u, p, q) = 0$ eine Enveloppe, so ist diese Enveloppe wieder eine Lösung.

[1] Wenn man betonen will, daß von den betrachteten Tangentialebenen lediglich die unmittelbare Umgebung des betreffenden Berührungspunktes in Frage kommt, so ist es zweckmäßig, einen solchen Punkt und ein ihn umgebendes beliebig kleines Stück einer Ebene als Flächenelement zu bezeichnen und mit diesen Flächenelementen zu operieren; ebenso wie man bei der Behandlung von gewöhnlichen Differentialgleichungen Linienelemente zugrunde legen kann.

[2] Für eine genauere Diskussion vgl. Kap. II, § 3, Nr. 1.

[3] Nach Gaspard Monge 1746—1818.

In der Tat, die Enveloppe einer Schar von Integralflächen hat in jedem ihrer Punkte P eine Tangentialebene, welche dort den Mongeschen Kegel berührt, nämlich dieselbe Tangentialebene wie die die Enveloppe in P berührende Integralfläche der Schar.

Analytisch ergibt sich die Behauptung folgendermaßen: Man erhält die Enveloppe, indem man aus der Gleichung

$$f_a(x, y, a) = 0 \tag{3}$$

die Größe a als Funktion von x und y ausrechnet und dann diese Funktion $a(x, y)$ in f einsetzt, wodurch man die Enveloppe in der Form

$$u = f(x, y, a(x, y)) = \psi(x, y)$$

gewinnt. Sodann ist unter Berücksichtigung von (3)

$$\psi_x = u_x = f_x + f_a a_x = f_x; \qquad \psi_y = u_y = f_y + f_a a_y = f_y.$$

Danach stimmen in einem festen Punkte (x_0, y_0) die Werte von $\psi(x_0, y_0)$, $\psi_x(x_0, y_0)$, $\psi_y(x_0, y_0)$ bzw. mit den Werten von $f(x_0, y_0, a)$, $f_x(x_0, y_0, a)$, $f_y(x_0, y_0, a)$ überein, wo $a = a(x_0, y_0)$ gewählt ist. Da aber für die Funktion $u = f(x, y, a)$ die Differentialgleichung an der Stelle (x_0, y_0) erfüllt ist, bleibt sie auch für $u = \psi(x, y)$ erfüllt.

2. Das vollständige Integral. Wir haben in § 3 an einer Reihe von Beispielen gesehen, daß man sich vielfach bei Differentialgleichungen erster Ordnung Lösungen verschaffen kann, welche noch von willkürlichen Parametern abhängen; insbesondere bei einer Differentialgleichung

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \tag{1}$$

für eine Funktion $u(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen eine solche Lösung

$$u = \varphi(x, y, a, b), \tag{4}$$

welche noch von zwei Parametern a, b abhängt. Tritt u in F nicht explizite auf, so ist aus einer einparametrigen Lösungsschar $u = \varphi(x, y, a)$ in der Form $u = \varphi(x, y, a) + b$ eine Schar bestimmbar, die von zwei Parametern a und b abhängt.

Eine zweiparametrige Schar von Lösungen heißt ein vollständiges Integral von (1), *wenn*[1] *im betreffenden Gebiet der Rang der Matrix*

[1] Diese Bedingung schließt die Möglichkeit aus, daß die Funktion φ nur scheinbar von zwei unabhängigen Parametern abhängt, während sie in Wirklichkeit durch Einführung einer geeigneten Kombination $\gamma = g(a, b)$ in die nur von dem einen Parameter γ abhängige Form $\varphi(x, y, a, b) = \psi(x, y, \gamma)$ gebracht werden kann; man könnte dann aus den Relationen

$$\varphi_{xa} = \psi_{x\gamma}\gamma_a, \quad \varphi_{xb} = \psi_{x\gamma}\gamma_b, \quad \varphi_{ya} = \psi_{y\gamma}\gamma_a, \quad \varphi_{yb} = \psi_{y\gamma}\gamma_b,$$
$$\varphi_a = \psi_\gamma\gamma_a, \quad \varphi_b = \psi_\gamma\gamma_b$$

sofort folgern, daß der Rang der obigen Matrix nicht 2 sein kann.

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_a & \varphi_{xa} & \varphi_{ya} \\ \varphi_b & \varphi_{xb} & \varphi_{yb} \end{pmatrix}$$

gleich 2 ist, insbesondere also, wenn die Determinante

$$D = \varphi_{xa}\,\varphi_{yb} - \varphi_{xb}\,\varphi_{ya} \tag{5}$$

nicht verschwindet.

Die Bedeutung des Begriffes: „vollständiges Integral" beruht auf folgender grundlegender Tatsache: *Man kann durch Enveloppenbildung also lediglich mit Hilfe von Differentiations- und Eliminationsprozessen aus einem vollständigen Integral* (4) *eine Familie von Lösungen der Differentialgleichung* (3) *gewinnen, die von einer willkürlichen Funktion abhängt*[1]. Zu dem Zweck greifen wir aus dieser zweiparametrigen Schar eine einparametrige Schar heraus, indem wir die beiden zunächst voneinander unabhängigen Parameter a und b durch eine willkürliche Funktion, z. B. $b = w(a)$, verknüpfen, und bilden die Enveloppe dieser Schar. Dazu denken wir uns die Größe a aus der Gleichung

$$\varphi_a + \varphi_b\, w'(a) = 0 \qquad (b = w(a)) \tag{6}$$

als Funktion von x und y ausgedrückt — was ausdrücklich als möglich vorausgesetzt wird — und in

$$u = \varphi(x, y, a, w(a)) = \psi(x, y)$$

eingesetzt. Wir erhalten so eine von einer willkürlichen Funktion w abhängige Mannigfaltigkeit von Lösungen $\psi(x, y)$. Übrigens wird die auf S. 8 erwähnte scheinbare Paradoxie durch den geschilderten Sachverhalt aufgeklärt; indem wir für eine partielle Differentialgleichung eine zweiparametrige Lösungsschar vorgeben, haben wir zugleich eine von einer willkürlichen Funktion abhängige Funktionenfamilie geliefert; die willkürliche Funktion geht dabei aber in so komplizierter Weise ein, daß diese Funktionsfamilie im allgemeinen nicht von unserem Ansatz S. 7 erfaßt wird.

Wir werden im nächsten Kapitel bei der systematischen Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung erkennen, daß sich die Theorie des vollständigen Integrals allgemein auch auf Differentialgleichungen für Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen übertragen läßt und sich in engen Zusammenhange mit der allgemeinen Integrationstheorie bringen läßt.

3. Singuläre Integrale. Außer der in Nr. 2 durch Enveloppenbildung mit einer einparametrigen Teilschar gewonnenen „allgemeinen" Lösung

[1] Ob wir hierdurch die Gesamtheit aller Lösungen gewinnen, bleibe dahingestellt. Die Schwierigkeit der Formulierung allgemeiner Aussagen wird durch folgendes Beispiel beleuchtet: Es sei $F(x, y, u, p, q) = G(x, y, u, p, q)\, H(x, y, u, p, q)$ und φ ein zu $G = 0$ gehöriges vollständiges Integral, welches nicht zugleich auch Lösung von $H = 0$ sei. Dann ist φ gemäß unserer Definition auch vollständiges Integral von $F = 0$, und es existieren Funktionenfamilien, die $F = 0$ lösen — nämlich Lösungen von $H = 0$ —, welche sich aus φ nicht gewinnen lassen.

können wir durch Enveloppenbildung manchmal noch eine andere, die „*singuläre*“ *Lösung*, gewinnen. Es kann nämlich vorkommen, daß die ursprüngliche zweiparametrige Schar $u = \varphi(x, y; a, b)$ von Integralflächen ebenfalls eine Enveloppe besitzt[1], welche unter den früheren nicht enthalten ist. Auch diese Enveloppe, welche durch Elimination von a und b aus den drei Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{aligned} u &= \varphi(x, y, a, b)\\ 0 &= \varphi_a\\ 0 &= \varphi_b \end{aligned}$$

gewonnen wird, muß eine Lösung sein. Sie heißt eine „singuläre“ Lösung von (3). Bezüglich der singulären Lösungen gilt nun hier, wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, die bemerkenswerte Tatsache, daß man zu ihrer Gewinnung tatsächlich gar nicht die Kenntnis eines vollständigen Integrals braucht, daß man sie vielmehr direkt aus der Differentialgleichung durch Differentiations- und Eliminationsprozesse erhalten kann. Nämlich: *Man gewinnt die singulären Lösungen durch Elimination von p und q aus den Gleichungen*

$$(8)\qquad F(x, y, u, p, q) = 0, \qquad F_p = 0, \quad F_q = 0.$$

Denn differenzieren wir die Gleichung

$$F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = 0,$$

die identisch in a und b besteht, nach a und b, so folgt

$$\begin{aligned} F_u \varphi_a + F_p \varphi_{xa} + F_q \varphi_{ya} &= 0\\ F_u \varphi_b + F_p \varphi_{xb} + F_q \varphi_{yb} &= 0, \end{aligned}$$

also gilt, da $\varphi_a = \varphi_b = 0$ auf der singulären Integralfläche ist, für die Punkte dieser Fläche selbst:

$$\begin{aligned} F_p \varphi_{xa} + F_q \varphi_{ya} &= 0\\ F_p \varphi_{xb} + F_q \varphi_{yb} &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, daß die Determinante $D = \varphi_{xa}\varphi_{yb} - \varphi_{xb}\varphi_{ya}$ auf der singulären Fläche nicht verschwindet, so müssen für die Fläche die Gleichungen

$$F_p = 0 \qquad F_q = 0$$

bestehen. Die Gleichung des singulären Integrals muß sich also durch Elimination von p und q aus den drei Gleichungen (8) gewinnen lassen.

Unabhängig von der Bezugnahme auf ein spezielles vollständiges Integral kann man demgemäß als singuläre Lösung eine solche definieren, für welche $F = F_p = F_q = 0$ gilt (vgl. Kap. II, § 4).

[1] Falls u in F nicht explizite auftritt, ist dies allerdings ausgeschlossen.

4. Beispiele. Wir betrachten die zweiparametrige Funktionenschar

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + u^2 = 1, \tag{9}$$

d. h. die Gesamtheit der Kugeln vom Radius 1 im x, y, u-Raum, deren Mittelpunkt in der x, y-Ebene liegt. Diese Funktionen bilden ein vollständiges Integral der Differentialgleichung

$$u^2(1 + p^2 + q^2) = 1. \tag{10}$$

Setzen wir $b = w(a)$, greifen also aus der Gesamtheit der Kugeln diejenige einparametrige Schar heraus, deren Mittelpunkte in der x, y-Ebene auf der Kurve $y = w(x)$ liegen, so liefert die Enveloppe dieser Schar, d. h. diejenige Fläche, die sich durch Elimination von a aus den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-w(a))^2 + u^2 = 1 \\ x-a + w'(a)(y-w(a)) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

ergibt, eine weitere Lösung. Jede derartige Enveloppe ist eine *Röhrenfläche* mit der Kurve $y = w(x)$ als Achse.

Nun besitzt auch die gesamte zweiparametrige Schar (9) eine Enveloppe, nämlich die beiden Ebenen $u = 1$ und $u = -1$, wie man anschaulich sofort einsieht und analytisch durch Elimination von a und b aus den Gleichungen

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + u^2 = 1 \\ x-a = 0 \\ y-b = 0 \end{cases} \tag{12}$$

bestätigt. Da diese Flächen der Differentialgleichung (10) genügen, so stellen sie deren singuläre Lösungen dar.

Wir werden zu ihnen ebenfalls geführt, wenn wir die Größen p und q aus den Gleichungen

$$F = u^2(1 + p^2 + q^2) = 1, \quad F_p = 2u^2 p = 0, \quad F_q = 2u^2 q = 0 \tag{13}$$

eliminieren.

Ein weiteres Beispiel ist die in den Anwendungen häufig auftretende *Differentialgleichung von* CLAIRAUT.

$$u = x u_x + y u_y + f(u_x, u_y). \tag{14}$$

Wir gelangen zu ihr, indem wir von der zweiparametrigen Ebenenschar

$$u = ax + by + f(a, b) \tag{15}$$

ausgehen, wobei $f(a, b)$ eine vorgegebene Funktion der Parameter a, b ist. Diese Ebenenschar erfüllt wegen $u_x = a$, $u_y = b$ die partielle Differentialgleichung (14), ist also wegen $D = 1$ ein vollständiges Integral dieser Differentialgleichung.

Zu allgemeinen Lösungen der Clairautschen Differentialgleichung gelangen wir wieder durch Enveloppenbildung, indem wir nach Wahl einer willkürlichen Funktion $b = w(a)$ den Parameter a aus den Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} u &= ax + y\,w(a) + f(a, w(a)) \\ 0 &= x + y\,w'(a) + f_a + f_b\,w'(a) \end{aligned}$$

eliminieren.

Für die Anwendungen ist die singuläre Lösung der Clairautschen Differentialgleichung von ausgezeichneter Bedeutung. Wir erhalten sie als Enveloppe der zweiparametrigen Ebenenschar (14), also durch Elimination der Größen a und b aus den Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{aligned} u &= ax + by + f(a, b) \\ x &= -f_a \\ y &= -f_b. \end{aligned}$$

Zu den gleichen Formeln gelangen wir auch, indem wir nach der vorhin gewonnenen Regel die Differentialgleichung (15) nach $u_x = p$, $u_y = q$ differenzieren. (Vgl. hierzu im übrigen die unter einem anderen Gesichtspunkt verlaufenden Betrachtungen in § 6, 3.)

§ 5. Theorie der linearen und quasilinearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Lineare Differentialgleichungen. Unter einer linearen partiellen Differentialgleichung für eine unbekannte Funktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ verstehen wir eine Differentialgleichung der Form

$$(1)\qquad \sum a_i u_{x_i} = a,$$

wobei a_i und a gegebene stetig differenzierbare Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind; eine quasilineare Differentialgleichung ist eine solche, wobei die Koeffizienten außer von $x_1, \ldots, x_n$ noch von der Unbekannten u selbst abhängen dürfen.

In diesem Paragraphen soll gezeigt werden, daß die Theorie dieser Differentialgleichungen vollständig äquivalent zur Theorie eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ist. (Vgl. auch Kap. II, § 2.)

Wir behandeln zunächst den Spezialfall der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(1')\qquad \sum_{i=1} a_i u_{x_i} = 0.$$

Wir bestimmen zunächst im n-dimensionalen Raum der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ die Kurven $x_i = x_i(s)$ als Funktionen eines Parameters s durch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(2)\qquad \frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, \ldots, x_n). \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Diese Kurven heißen die *charakteristischen Kurven* unserer Differentialgleichung. Auf ihre allgemeine Bedeutung werden wir bei der von anderen Gesichtspunkten ausgehenden Behandlung der quasilinearen Differentialgleichungen in Kap. II, § 2 zurückkommen. Im Falle $n = 2$ sind sie als diejenigen Kurven gekennzeichnet, welche von den in § 4, Nr. 1 als Ausartungen des Mongeschen Kegels erwähnten Mongeschen Achsen berührt werden.

Wir entnehmen der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen folgende Tatsachen: Indem wir eine der Größen x_i als unabhängige Veränderliche statt s einführen, können wir, durch Auflösung der von $n-1$ Parametern c_i abhängigen allgemeinen Lösung von (2) die Lösung in folgender Form darstellen

$$c_i = \varphi_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

wo c_i die willkürlichen Integrationskonstanten bedeuten und φ_i voneinander unabhängige „*Integrale*" des Differentialgleichungssystems sind. Unter einem Integral $\varphi\,(x_1, \ldots, x_n)$ ist dabei eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x_i verstanden, welche längs jeder Lösungskurve des Differentialgleichungssystems (2) einen konstanten Wert besitzt.

Nun besagt unsere Differentialgleichung (1'): für die Werte $u(s) = u(x_1(s), \ldots, x_n(s))$ einer Lösung u der partiellen Differentialgleichung längs einer Integralkurve des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen gilt die Relation

$$\frac{du}{ds} = 0. \tag{3}$$

Unsere Gleichungen drücken also folgenden Sachverhalt aus: *Auf jeder Lösungskurve des Systems* (2) *gewöhnlicher Differentialgleichungen hat jede Lösung der partiellen Differentialgleichung* (1') *einen konstanten, d. h. von x unabhängigen Wert.* Jede Lösung der partiellen Differentialgleichung ist ein „*Integral* des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen".

Andererseits ist jedes Integral

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

unseres gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (2) eine Lösung der partiellen Differentialgleichung. Denken wir uns nämlich in dem Integral für x_i irgendeine Lösung $x_i(s)$ des Differentialgleichungssystems (2) eingesetzt, so folgt durch Differentiation nach s für φ das Bestehen der partiellen Differentialgleichung (1') längs jeder Lösungskurve $x_i(s)$. Da durch jeden Punkt des betrachteten Gebietes eine dieser Lösungskurven geht, so erfüllt dort φ die Differentialgleichung (1') identisch in $x_1, \ldots, x_n$.

Zwischen je n Integralen

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

unseres Differentialgleichungssystems (2) muß nun eine Relation der Form

$$w(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0 \tag{4}$$

bestehen. Denn die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

können für nicht sämtlich verschwindende a_i nur gelten, wenn die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \tag{5}$$

verschwindet. Diese Bedingung ist aber kennzeichnend für das Bestehen einer Relation der obigen Form (4). Andererseits gibt es sicherlich $n-1$ voneinander unabhängige Integrale $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ des Systems (2), so daß also jedes Integral sich in der Form

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = w(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \tag{6}$$

aus diesem gewinnen lassen muß. Da umgekehrt auch jede Funktion $w(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ auf jeder Integralkurve von (2) konstant und daher ein Integral von (2) ist, so haben wir in der Gestalt (6), wobei w eine willkürliche Funktion der $n-1$-Argumente ist, die Gesamtheit aller Lösungen der partiellen Differentialgleichung (1′) vor uns.

Umgekehrt lassen sich mit Hilfe von $n-1$ voneinander unabhängigen Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ der partiellen Differentialgleichung die gewöhnlichen Differentialgleichungen (2) lösen, indem man z. B. aus den Gleichungen $\varphi_\nu = c_\nu$ die $n-1$-Größen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x_n und der Parameter $c_1, \ldots, c_{n-1}$ berechnet.

2. Quasilineare Differentialgleichungen. Der scheinbar wesentlich kompliziertere Fall, wo die gegebene Differentialgleichung (1) nicht mehr linear und homogen, sondern allgemein quasilinear und mit einer rechten Seite $a(x_1, x_2, \ldots, u)$ versehen ist, läßt sich durch einen auch sonst in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen wichtigen und immer wiederkehrenden Kunstgriff auf den Fall der linearen homogenen Differentialgleichungen, und zwar mit einer unabhängigen Veränderlichen mehr zurückführen und so vollständig erledigen. Diese Zurückführung gelingt, indem wir $u = x_{n+1}$ als neue unabhängige Veränderliche einführen und uns die gesuchte Lösung von (1) in der impliziten Form $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$ oder allgemeiner mit einer Konstanten c in der Form

$$\varphi(x_1, \ldots x_n, x_{n+1}) = c \tag{7}$$

gegeben denken, wo dann die Funktion φ zu bestimmen ist. Wegen $\varphi_{x_i} + \varphi_{x_{n+1}} u_{x_i} = 0$ geht unsere partielle Differentialgleichung, wenn wir noch $a(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = a_{n+1}$ setzen, über in

$$\sum^{n+1} a_\nu \varphi_{x_\nu} = 0. \tag{8}$$

Diese Relation hat genau die Form einer linearen homogenen Differentialgleichung für die Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ von $n+1$ Veränderlichen. Jedoch entsteht eine kleine begriffliche Schwierigkeit: Die Gleichung (8) braucht nicht identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ zu bestehen, sondern vermöge ihrer Herleitung nur für solche Wertsysteme, für die die Relation $\varphi = 0$ oder $\varphi = c$ gilt. In dieser Auffassung ist also (8) noch nicht eine lineare homogene partielle Differentialgleichung. Aber, wenn wir nicht nur eine einzige Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung betrachten, sondern eine einparametrige vom Parameter c abhängige durch $\varphi = c$ gegebene Schar, dann besteht die Gleichung (8) für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, ist also wirklich eine lineare Differentialgleichung des behandelten Typus. Denn wählt man $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ beliebig, so betrachte man den durch $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) = c$ gegebenen Wert von c; da (8) für diesen Wert von c bestehen muß, so gilt (8) somit identisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Indem wir (8) nunmehr durch eine Funktion φ lösen und dann $\varphi = c$ setzen, gewinnen wir umgekehrt eine einparametrige Schar von Lösungen von (1).

Die angekündigte Reduktion ist damit ausgeführt. Sie zeigt, daß die Integration der allgemeinen quasilinearen Differentialgleichung (1) mit der des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d x_i}{d s} = a_i \qquad \frac{d u}{d s} = a \tag{5}$$

äquivalent ist.

§ 6. Die Legendresche Transformation.

1. Die Legendresche Transformation für Funktionen von zwei Veränderlichen. Die Integrationstheorie gewisser Klassen von Differentialgleichungen kann wesentlich gefördert werden durch Anwendung der sog. *Legendreschen Transformation*. Wir werden auf diese Transformation von der geometrischen Deutung der Differentialgleichung her geführt, wenn wir die Integralfläche anstatt durch Punktkoordinaten vermittels ihrer Tangentialkoordinaten darstellen[1].

Für die Beschreibung einer Fläche im x, y, u-Raume durch eine Gleichung bestehen zwei dual reziproke Möglichkeiten. Man kann sie entweder als Punktgebilde durch eine Funktion $u(x, y)$ geben oder sie als Enveloppe ihrer Tangentialebenen auffassen und die Bedingungsgleichung dafür angeben, daß eine Ebene Tangentialebene an die Fläche ist. Sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u}$ die laufenden Koordinaten auf einer Ebene, deren Gleichung

$$\mathfrak{u} - \xi \mathfrak{x} - \eta \mathfrak{y} + \omega = 0$$

ist, so bezeichnen wir die Größen ξ, η, ω als die Koordinaten der Ebene. Da die Tangentialebene an die Fläche $u(x, y)$ im Punkte (x, y, u) die

[1] Zum Formalismus dieser Transformation vgl. übrigens Bd. I, 2. Aufl., S. 203.

Gleichung

$$\mathfrak{u} - u - (\mathfrak{x} - x)\, u_x - (\mathfrak{y} - y)\, u_y = 0$$

hat, so sind ihre Ebenenkoordinaten

$$\xi = u_x \qquad \eta = u_y \qquad \omega = x\, u_x + y\, u_y - u\,.$$

Offenbar ist nun die betrachtete Fläche auch bestimmt, wenn ω als Funktion von ξ und η gegeben ist, wodurch die zweiparametrige Schar der Tangentialebenen charakterisiert wird. Die Abhängigkeit $\omega(\xi, \eta)$ finden wir aus $u(x, y)$, indem wir aus den Gleichungen

$$\xi = u_x \qquad \eta = u_y$$

die Werte x und y als Funktionen von ξ und η bestimmen und in die Gleichung

$$\omega = x\, u_x + y\, u_y - u = x\, \xi + y\, \eta - u$$

einsetzen.

Um umgekehrt aus den Tangentialkoordinaten die Punktkoordinaten zu berechnen, bilden wir die partiellen Ableitungen der Funktion $\omega(\xi, \eta)$; wegen $\xi = u_x$ und $\eta = u_y$ folgt sofort

$$\omega_\xi = x + \xi \frac{\partial x}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial y}{\partial \xi} - u_x \frac{\partial x}{\partial \xi} - u_y \frac{\partial y}{\partial \xi} = x$$

und ebenso

$$\omega_\eta = y\,;$$

daher ergibt sich für den Zusammenhang von Punkt- und Ebenenkoordinaten das Formelsystem

$$(1) \qquad \begin{cases} \omega(\xi, \eta) + u(x, y) = x\, \xi + y\, \eta \\ \qquad \xi = u_x \qquad \eta = u_y \\ \qquad x = \omega_\xi \qquad y = \omega_\eta\,, \end{cases}$$

welches uns den dualen Charakter der Beziehung zwischen Punkt- und Ebenenkoordinaten vor Augen führt.

Diese Transformation einer Fläche von Punktkoordinaten auf Ebenenkoordinaten heißt die *Legendresche Transformation für Funktionen von zwei Veränderlichen*. Sie trägt einen wesentlich anderen Charakter als eine bloße Koordinatentransformation. Denn es wird nicht etwa einem einzelnen Punkt ein anderer Punkt zugeordnet, vielmehr können wir das System (1) so auffassen, daß jedem Flächenelement (x, y, u, u_x, u_y) ein weiteres Flächenelement $(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta)$ zugeordnet wird.

Die Legendresche Transformation ist immer dann ausführbar, wenn sich die beiden Gleichungen $u_x = \xi$, $u_y = \eta$ nach x und y auflösen lassen, wofür hinreicht, daß die Funktionaldeterminante

$$(2) \qquad u_{xx}\, u_{yy} - u_{xy}^2 = \varrho$$

für die Punkte der vorgelegten Fläche nicht verschwindet.

Insbesondere versagt die Legendresche Transformation offenbar für solche Flächen, die der Differentialgleichung

$$u_{xx}\, u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$$

genügen, d. h. für die *abwickelbaren Flächen*. Dies Ergebnis ist geometrisch anschaulich. Denn eine abwickelbare Fläche besitzt nach ihrer Definition nur eine einparametrige Schar von Tangentialebenen mit Berührungsgeraden, nicht Berührungspunkten, so daß es nicht möglich ist, eine umkehrbar-eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten und den Tangentialebenen des Gebildes herzustellen.

Wir berechnen im Hinblick auf die Anwendung der Legendreschen Transformation auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung schließlich noch die Transformation der zweiten Ableitungen der Funktionen $u(x, y)$ und $\omega(\xi, \eta)$. Zu diesem Zweck denken wir uns in den Gleichungen $\xi = u_x$, $\eta = u_y$ die Variablen x und y vermittels der Beziehungen $x = \omega_\xi$ und $y = \omega_\eta$ als Funktionen von ξ und η ausgedrückt. Durch Differentiation dieser Gleichungen nach ξ und η finden wir

$$\begin{aligned}
1 &= u_{xx}\,\omega_{\xi\xi} + u_{xy}\,\omega_{\xi\eta}\\
0 &= u_{xy}\,\omega_{\xi\xi} + u_{yy}\,\omega_{\xi\eta}\\
0 &= u_{xx}\,\omega_{\xi\eta} + u_{xy}\,\omega_{\eta\eta}\\
1 &= u_{xy}\,\omega_{\xi\eta} + u_{yy}\,\omega_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\omega_{\xi\xi}\,\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2 &= \frac{1}{\varrho}\\
u_{xx}\,u_{yy} - u_{xy}^2 &= \varrho\,,
\end{aligned}\right.$$

so erhalten wir

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
u_{xx} &= \varrho\,\omega_{\eta\eta}\,,\\
u_{xy} &= -\varrho\,\omega_{\xi\eta}\,,\\
u_{yy} &= \varrho\,\omega_{\xi\xi}\,.
\end{aligned}\right.$$

2. Die Legendresche Transformation für Funktionen von n Variablen. Der Vollständigkeit halber geben wir die Form der Legendreschen Transformation an für den Fall, daß es sich um Funktionen $u(x_1, \ldots, x_n)$ von n unabhängigen Veränderlichen handelt. Die Legendresche Transformation wird hier durch folgendes Formelsystem geliefert:

$$(5)\qquad \begin{aligned}
u(x_1, \ldots, x_n) + \omega(\xi_1, \ldots, \xi_n) &= x_1\,\xi_1 + \cdots + x_n\,\xi_n\\
u_{x_1} = \xi_1, \ldots, \quad & u_{x_n} = \xi_n\\
\omega_{\xi_1} = x_1, \ldots, \quad & \omega_{\xi_n} = x_n
\end{aligned}$$

Um die Formeln, vermittels deren sich die zweiten Ableitungen transformieren, anzugeben, bezeichnen wir die zu dem Element $u_{x_i x_k}$ bzw. $\omega_{\xi_i \xi_k}$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & \ldots & u_{x_1 x_n}\\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\\ u_{x_1 x_n} & \ldots & u_{x_n x_n} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \omega_{\xi_1 \xi_1} & \ldots & \omega_{\xi_1 \xi_n}\\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\\ \omega_{\xi_1 \xi_n} & \ldots & \omega_{\xi_n \xi_n} \end{pmatrix}$$

gehörige Unterdeterminante mit U_{ik} bzw. Ω_{ik} und die Determinante der Matrix selbst mit U bzw. Ω. Dann lauten die gesuchten Formeln

$$(6) \qquad U_{x_i x_k} = \frac{\Omega_{ik}}{\Omega} \qquad \omega_{\xi_i \xi_k} = \frac{U_{ik}}{U}$$

und es gilt $\Omega U = 1$.

Die Anwendbarkeit der Legendreschen Transformation ist hier an die Bedingung $U \neq 0$ bzw. $\Omega \neq 0$ geknüpft, wie man nachprüfe.

3. Anwendung der Legendreschen Transformation auf partielle Differentialgleichungen. Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung von höchstens zweiter Ordnung

$$(7) \qquad F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Durch die Legendresche Transformation werde einer Lösungsfläche $u(x, y)$ dieser Gleichung die Funktion $\omega(\xi, \eta)$ zugeordnet. Die Gleichung $F = 0$ geht dann über in eine Differentialgleichung für die Funktion ω, die ebenfalls von höchstens zweiter Ordnung ist, nämlich in

$$(8) \qquad G = F(\omega_\xi, \omega_\eta, \xi\omega_\xi - \eta\omega_\eta - \omega, \varrho\omega_{\eta\eta}, -\varrho\omega_{\xi\eta}, \varrho\omega_{\xi\xi}) = 0$$

mit

$$\varrho = \frac{1}{\omega_{\xi\xi}\,\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2}.$$

Diese Differentialgleichung liefert uns jedoch im allgemeinen nur die nichtabwickelbaren Integralflächen der ursprünglichen Differentialgleichung, da für abwickelbare Flächen die Legendresche Transformation nicht anwendbar ist.

Die Legendresche Transformation wird, insbesondere für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, dann mit Erfolg angewendet werden können, wenn die Variablen x, y und u in einfacher Weise, die Ableitungen u_x, u_y jedoch in mehr komplizierter Weise auftreten.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$(9) \qquad u_x u_y = x.$$

Sie geht durch die Legendresche Transformation über in

$$(10) \qquad \xi\eta = \omega_\xi,$$

deren Lösung sich unmittelbar angeben läßt:

$$\omega = \tfrac{1}{2}\xi^2\eta + w(\eta).$$

Auf Grund der Transformationsformeln folgt

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi\eta \\ y &= \tfrac{1}{2}\xi^2 + w'(\eta) \\ u &= \xi^2\eta + \eta\, w'(\eta) - w(\eta). \end{aligned}\right.$$

Wenn wir aus diesen drei Gleichungen ξ und η eliminieren, so erhalten wir die gesuchten Lösungen der gegebenen Differentialgleichung[1].

Betrachten wir dagegen die Differentialgleichung

$$u_x u_y = 1, \tag{12}$$

so würde die Legendresche Transformation ergeben

$$\xi\eta = 1.$$

Diese Gleichung ist gar keine Differentialgleichung mehr und zeigt an, daß hier die Transformation versagt. Sämtliche Lösungen von $u_x u_y = 1$ müssen abwickelbare Flächen sein. Dies bestätigt man sofort durch Differentiation der Gleichung nach x und y:

$$\begin{aligned} u_{xx} u_y + u_{xy} u_x &= 0 \\ u_{xy} u_y + u_{yy} u_x &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

da die Möglichkeit $u_x = u_y = 0$ wegen $u_x u_y = 1$ ausgeschlossen ist, muß für jede Integralfläche $u(x, y)$ die Bedingung

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$$

erfüllt sein[2].

Genau so versagt die Legendresche Transformation für jede Differentialgleichung der Form

$$F(u_x, u_y) = 0. \tag{14}$$

Ein drittes interessantes Beispiel bildet die schon in § 4, 3 betrachtete *Clairautsche Differentialgleichung:*

$$x u_x + y u_y - u = f(u_x, u_y). \tag{15}$$

Durch die Legendresche Transformation wird (15) in die einfache Gleichung

$$\omega = f(\xi, \eta) \tag{16}$$

[1] Jedoch fehlen solche Lösungen, auf denen der Ausdruck $u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2$ verschwindet. Nun folgt durch Differentiation der Gleichung $u_x u_y = x$ nach x und y:

$$\begin{aligned} u_{xx} u_y + u_{xy} u_x &= 1 \\ u_{xy} u_y + u_{yy} u_x &= 0, \end{aligned}$$

also ein unhomogenes Gleichungssystem, dessen Determinante $u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2$ nur verschwinden kann, wenn $u_{xy} = u_{yy} = 0$ ist. Hieraus folgt, daß die fehlenden Lösungen die Form

$$u = a y + \frac{1}{2a} x^2 + b$$

mit beliebigem konstantem a und b haben müssen. Tatsächlich gibt dieser Ausdruck ein vollständiges Integral von (9), aus dem man leicht nach der Vorschrift von § 4 die obige Lösung wiederfindet.

[2] Die Differentialgleichung (12) läßt sich übrigens durch die Substitution $x = \frac{\xi^2}{2}$ leicht auf die Form (9) zurückführen und so lösen; oder auch mittels des vollständigen Integrales

$$u = a x + \frac{1}{a} y + b.$$

übergeführt. Wir schließen daraus, daß die einzige nicht abwickelbare Integralfläche der Clairautschen Differentialgleichung durch die Gleichung

$$\omega = f(\xi, \eta)$$

oder in Punktkoordinaten ausgedrückt

$$(17) \qquad \begin{cases} x = f_\xi(\xi, \eta) \\ y = f_\eta(\xi, \eta) \\ u = \xi f_\xi + \eta f_\eta - f \end{cases}$$

dargestellt wird.

Folgende Rechnung bestätigt den Schluß: Durch Differentiation der Differentialgleichung ergeben sich mit der Abkürzung $p = u_x$, $q = u_y$ die Formeln

$$(x - f_p)\, u_{xx} + (y - f_q)\, u_{xy} = 0$$
$$(x - f_p)\, u_{xy} + (y - f_q)\, u_{yy} = 0,$$

woraus folgt, daß für eine Integralfläche entweder

$$D = u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$$

oder

$$x = f_p \qquad y = f_q$$

gelten muß. Die letztere Möglichkeit liefert aber gerade die oben erhaltene Ausnahmefläche.

Endlich betrachten wir als Beispiel eine Differentialgleichung zweiter Ordnung nämlich die Differentialgleichung der *Minimalflächen*: diese lautet

$$(18) \qquad (1 + u_y^2)\, u_{xx} - 2\, u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)\, u_{yy} = 0.$$

Sie ist in den Ableitungen von $u(x, y)$ nicht linear. Dieser scheinbaren Komplikation kann nun dadurch begegnet werden, daß man (18) durch die Legendresche Transformation unmittelbar in

$$(19) \qquad (1 + \eta^2)\, \omega_{\eta\eta} + 2\, \xi\, \eta\, \omega_{\xi\eta} + (1 + \xi^2)\, \omega_{\xi\xi} = 0,$$

also eine lineare Differentialgleichung, transformiert. Später (vgl. Anhang § 1, Kap. III, § 2, 2 und Kap. VII, § 10) werden wir andere Linearisierungen der, uns übrigens schon aus Bd. I, S. 156 bekannten Differentialgleichung (18) betrachten, welche für die Theorie der Minimalflächen einen einfachen Zugang öffnen.

§ 7. Die Bestimmung der Lösungen durch ihre Anfangswerte und der Existenzsatz.

1. Formulierung und Erläuterung des Anfangswertproblems. Das Auftreten willkürlicher Integrationskonstanten bei den Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen wird am besten durch die Aussagen über die Lösungen des *Anfangswertproblems* gekennzeichnet. Wenn eine

gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für eine Funktion $u(x)$ sich in die Gestalt

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)})$$

setzen läßt, so kann man für die Lösung u an einer beliebigen Stelle x_0, z. B. $x_0 = 0$, die Werte $u(x_0) = c_1$, $u'(x_0) = c_2, \ldots, u^{(n-1)}(x_0) = c_n$ willkürlich vorschreiben; die Gesamtheit der Lösungen erscheint als n-parametrige Funktionenschar mit diesen Anfangswerten $c_1, \ldots, c_n$ als Parametern.

Anfangsprobleme dieser Art spielen in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle, z. B. wenn es sich darum handelt, eine von der Zeit x abhängige Zustandsgröße, $u(x)$, welche der obigen Differentialgleichung genügt, aus ihrem Anfangszustand für $x = 0$, d. h. Anfangswert und Anfangswerten der ersten $n - 1$-Ableitungen in ihrem zeitlichen Gesamtverlaufe zu bestimmen.

Ähnliche Anfangswertprobleme treten naturgemäß auch auf, wenn die gesuchte Größe u nicht nur von der Zeitvariablen x, sondern noch von anderen Veränderlichen $y, \ldots$ abhängt. Auch bei partiellen Differentialgleichungen werden wir nun durch die Diskussion solcher Anfangswertprobleme den übersichtlichsten Aufschluß über die Mannigfaltigkeit der Lösungen, d. h. das Auftreten willkürlicher Funktionen in der Lösungsgesamtheit gewinnen. Der Kürze halber wollen wir bei den Ausführungen dieses Paragraphen zwei unabhängige Veränderliche x, y zugrunde legen mit dem Hinweis, daß alle Überlegungen sich ohne weiteres auf mehr unabhängige Veränderliche verallgemeinern lassen.

Wir orientieren uns zunächst an einigen Beispielen.

Bei der Differentialgleichung

$$\alpha u_x + \beta u_y = 0$$

mit konstantem α und β wird die Lösungsmannigfaltigkeit durch $u = w(\alpha y - \beta x)$ mit willkürlichem w gegeben. Nehmen wir nun an, daß die Anfangswerte $u(0, y) = \varphi(y)$ willkürlich vorgeschrieben seien, so bestimmt sich die Funktion w, indem wird $x = 0$ setzen, und wir erhalten die Lösung $u = \varphi\left(y - \frac{\beta}{\alpha} x\right)$. Allgemeiner betrachten wir nun (vgl. § 1, 1, Nr. 5) die Differentialgleichung

$$\alpha(u) u_x + \beta(u) u_y = 0,$$

wo nunmehr die Koeffizienten α und β noch von der gesuchten Funktion in gegebener Weise abhängen.

Wir stellen das Anfangswertproblem, eine Lösung zu finden, für welche $u(0, y) = \varphi(y)$ eine vorgeschriebene Funktion ist.

Die Lösungsmannigfaltigkeit unserer Differentialgleichung war durch $\alpha(u) y - \beta(u) x = w(u)$ mit willkürlicher Funktion w gegeben. Die willkürliche Funktion w bestimmt sich wieder aus der Anfangsbedingung,

indem man $x = 0$ und $u = \varphi(y)$ einsetzt. Es wird dann $w(\varphi) = \alpha(\varphi)\, y$. Können wir nun die Gleichung $u = \varphi(y)$ durch $y = \chi(u)$ umkehren, so haben wir durch $w(\varphi) = \alpha(\varphi)\, \chi(\varphi)$ die willkürliche Funktion w bestimmt. Die gesuchte Lösung muß also allgemein der Gleichung

$$\alpha(u)\, y - \beta(u)\, x = \alpha(u)\, \chi(u)$$

oder

$$u = \varphi\left(y - \frac{\beta(u)}{\alpha(u)}\, x\right)$$

genügen. Wenn wir aus dieser impliziten Gleichung eine Funktion $u(x, y)$ bestimmen, haben wir damit das Anfangswertproblem gelöst. (Einen für uns später wichtigen speziellen Fall werden wir am Schluß dieses Paragraphen S. 44 im einzelnen diskutieren.)

Bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung $u_{xy} = g(x, y)$ wird nach § 1, 1, Nr. 3 durch das dort betrachtete Dreiecksintegral (2) diejenige Lösung geliefert, welche auf der vorgeschriebenen Kurve C verschwindende Ableitungen u_x und u_y besitzt und dort selbst verschwindet. (Daß u auf C verschwindet, folgt aus dem Verschwinden von u_x, u_y auf C schon, wenn u an einer einzelnen Stelle der Kurve C als Null vorausgesetzt wird.) Allgemein stellt jene Formel (2) eine Lösung mit willkürlich vorgeschriebenen Anfangswerten von u_x und u_y dar.

Die einfachste *Schwingungsdifferentialgleichung*

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

für eine Funktion $u(x, y)$ führt zu dem Anfangswertproblem: Für $x = 0$ ist der Anfangszustand $u(0, y) = \varphi(y)$ und $u_x(0, y) = \psi(y)$ willkürlich vorgeschrieben (vgl. hierzu Bd. I, Kap. V, § 3). Aus der Lösungsmannigfaltigkeit $u = f(y + x) + g(y - x)$ unserer Differentialgleichung gewinnt man die spezielle Gestalt der Funktionen f und g durch Anpassung an die Anfangsbedingungen auf Grund von $f(y) + g(y) = \varphi(y)$, $f'(y) - g'(y) = \psi(y)$, woraus sich sofort f und g und endlich die gesuchte Lösung u durch die Formel

$$2u(x, y) = \varphi(y + x) + \varphi(y - x) + \int_{y-x}^{y+x} \psi(\lambda)\, d\lambda$$

ergibt.

Um zu einer allgemeinen Formulierung des Anfangswertproblems zu gelangen, setzen wir voraus, daß die gegebenen Differentialgleichungen in einer Form erscheinen, wo sie nach den höchsten Ableitungen der unbekannten Funktion oder Funktionen bezüglich x aufgelöst sind.

Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{1}$$

wobei wieder zur Abkürzung

$$p = u_x \qquad q = u_y$$

gesetzt wird, und setzen voraus, daß sich diese Differentialgleichung (1) nach p auflösen läßt in der Form

$$p = f(x, y, u, q). \tag{2}$$

Das Anfangswertproblem lautet nunmehr folgendermaßen: Es soll eine Lösung $u(x, y)$ von (2) gefunden werden, welche für $x = 0$ in eine vorgegebene Funktion $u(0, y) = \varphi(y)$ übergeht; oder geometrisch gesprochen, es soll eine Integralfläche gefunden werden, welche die Ebene $x = 0$ in einer gegebenen Anfangskurve $u = \varphi(y)$ schneidet.

Man könnte übrigens allgemeiner das Problem stellen, eine Integralfläche von $F(x, y, u, p, q) = 0$ aufzusuchen, welche durch eine gegebene Raumkurve $u = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$ geht. Indem man dann in der Differentialgleichung statt x und y als neue unabhängige Veränderliche $\xi = x - \psi(y)$ und $\eta = y$ einführt und $u(x, y) = u(\xi + \psi(\eta), \eta) = \omega(\xi, \eta)$ setzt, geht sie in $F(\xi + \psi(\eta), \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta - \psi' \omega_\xi) = G(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta) = 0$ über mit der Anfangsbedingung $\omega(0, \eta) = \varphi(\eta)$. Das allgemeinere Problem ist also auf das Problem in der ursprünglichen speziellen Gestalt zurückgeführt, auf welche wir uns im folgenden beschränken wollen.

Bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0, \tag{3}$$

wobei hier wie auch später zur Abkürzung

$$r = u_{xx} = p_x \qquad s = u_{xy} = p_y = q_x \qquad t = u_{yy} = q_y$$

gesetzt ist, machen wir wiederum die Voraussetzung, daß sie sich in dem betrachteten Argumentbereich nach r auflösen läßt in der Form

$$r = f(x, y, u, p, q, s, t). \tag{4}$$

Das Anfangswertproblem für diese Differentialgleichung lautet: Es soll eine Lösung $u(x, y)$ gefunden werden, für welche bei $x = 0$ die Anfangswerte von u und u_x

$$u(0, y) = \varphi(y) \qquad u_x(0, y) = \psi(y) \tag{5}$$

vorgeschrieben sind.

Statt der einen willkürlichen Anfangsfunktion $\varphi(y)$ bei einer Differentialgleichung erster Ordnung treten also hier zwei willkürlich vorgegebene Anfangsfunktionen $\varphi(y)$ und $\psi(y)$ auf.

Analoge Probleme können für Differentialgleichungen höherer Ordnung oder Systeme von Differentialgleichungen gestellt werden, z. B. für ein System erster Ordnung

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i\left(x, y, u_1, \ldots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial y}\right), \quad (i = 1, \ldots, m)$$

wobei für die unbekannten Funktionen $u_i(x, y)$ die Anfangswerte

$$u_i(0, y) = \varphi_i(y)$$

willkürlich vorgeschrieben sind. Wenn man zeigen kann, daß unsere Anfangswertprobleme eindeutig bestimmte Lösungen besitzen, so ist damit das Auftreten der willkürlichen Funktionen in der Lösungsmannigfaltigkeit völlig aufgeklärt.

2. Reduktion auf ein System von quasilinearen Differentialgleichungen. Eine nähere Diskussion aller unserer Anfangswertprobleme gestaltet sich am übersichtlichsten und einheitlichsten, wenn man sie auf äquivalente Anfangswertprobleme für Systeme quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführt. Wir haben zwar gesehen, daß die Lösungsgesamtheit von Differentialgleichungssystemen im allgemeinen nicht mit der Lösungsmannigfaltigkeit einzelner Differentialgleichungen gleichwertig ist. Jedoch wird sich zeigen, daß eine solche Äquivalenz in unserem Falle erzielt wird, indem man nicht die Differentialgleichungen schlechthin, sondern diese zusammen mit zusätzlichen Anfangsbedingungen betrachtet. Dann hat man naturgemäß bei dem Differentialgleichungssystem, welches an sich eine größere Mannigfaltigkeit von Lösungen liefern würde, die Anfangsbedingungen so zu spezialisieren, daß danach die Lösungsmannigfaltigkeiten der beiden Anfangswertprobleme zusammenfallen.

Wir führen die Reduktion auf ein äquivalentes *quasilineares* (und daher prinzipiell einfacheres) *Differentialgleichungssystem* zunächst für die Differentialgleichung erster Ordnung (2) durch. Wir bemerken, daß durch die Vorgabe von $u(0, y) = \varphi(y)$ zugleich die Anfangswerte $q(0, y) = \varphi'(y)$ mit gegeben sind. Ferner liefert nunmehr die Differentialgleichung (2) den Anfangswert für p, nämlich

$$p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y)).$$

Indem wir die Differentialgleichung (2) nach x differenzieren, erkennen wir, daß die drei Größen u, p, q dem folgenden System von quasilinearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(6) \qquad \begin{cases} u_x = p \\ q_x = p_y \\ p_x = f_x + f_u p + f_q p_y \end{cases}$$

und den Anfangsbedingungen

$$(7) \quad u(0, y) = \varphi(y) \qquad q(0, y) = \varphi'(y). \qquad p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y))$$

genügen. Wir behaupten, daß dieses Anfangswertproblem mit dem ursprünglichen äquivalent ist.

Man hat dazu nur zu zeigen, daß für ein Lösungssystem u, p, q des Gleichungssystems (6), (7) die Gleichungen

$$p = f(x, y, u, q) \qquad u_x = p \qquad u_y = q$$

erfüllt sind. Nun folgt aus (6) wegen $p_y = q_x$

$$u_{xy} = q_x,$$

also durch Integration nach x

$$u_y(x, y) = q + v(y);$$

setzt man hier aber $x = 0$, so folgt aus den Anfangsbedingungen (7), da sicherlich $\varphi'(y) = u_y(0, y)$ ist, $v(y) = 0$, also

$$u_y = q$$

für alle x und y. Weiterhin ist nach (6)

$$u_{xx} = p_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, u, q);$$

also folgt durch Integration

$$u_x = f(x, y, u, q) + a(y).$$

Hieraus ergibt sich aber, da für $x = 0$ sicher $u_x = f$ gilt, $a(y) = 0$ oder $u_x = f(x, y, u, u_y)$; d. h. $u(x, y)$ ist Lösung des ursprünglichen Problems.

Ebenso erkennt man, daß man das Anfangswertproblem der Differentialgleichung zweiter Ordnung (4) mit den beiden Anfangsbedingungen (5) durch das äquivalente Anfangswertproblem des folgenden Differentialgleichungssystems für sechs Funktionen u, p, q, r, s, t der unabhängigen Veränderlichen x, y ersetzen kann

$$\begin{aligned} &u_x = p \qquad q_x = p_y \qquad p_x = r \\ &s_x = r_y \qquad t_x = s_y \\ &r_x = f_x + f_u p + f_p r + f_q p_y + f_s r_y + f_t s_y, \end{aligned}$$

wobei als Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} &u(0, y) = \varphi(y) \qquad p(0, y) = \psi(y) \qquad q(0, y) = \varphi'(y) \\ &t(0, y) = \varphi''(y) \qquad s(0, y) = \psi'(y) \\ &r(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \psi(y), \varphi'(y), \psi'(y), \varphi''(y)) \end{aligned}$$

vorgeschrieben sind. Hier haben wir aus den vorgegebenen Anfangsdaten φ, ψ des ursprünglichen Problems und der Differentialgleichung von vornherein die weiteren passenden Anfangsdaten für q, t, s, r entnommen. Genau wie oben stellt sich heraus, daß die Größen p, q, r, s, t mit den Ableitungen $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ übereinstimmen, daß u und p die vorgeschriebenen Anfangswerte annehmen und daß die Differentialgleichung $r = f(x, y, u, p, q, s, t)$ erfüllt ist.

Ähnlich können wir die Ersetzung durch ein quasilineares System für Differentialgleichungen höherer Ordnung oder für Differentialgleichungssysteme vornehmen, was nicht näher ausgeführt zu werden braucht.

Unsere quasilinearen Differentialgleichungssysteme enthalten in den Koeffizienten der rechten Seite noch die unabhängigen Veränderlichen x und y. Es erweist sich nun vielfach als formal bequem, durch eine

Abänderung vermöge eines kleinen technischen Kunstgriffes zu einem äquivalenten weiteren quasilinearen Differentialgleichungssystem überzugehen, in welchem die unabhängigen Veränderlichen nicht mehr explizite auftreten und welches überdies in den Ableitungen homogen ist. Zu diesem Zwecke führen wir formal statt x und y zwei weitere Funktionen $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ ein durch die Gleichungen

$$\xi_x = \eta_y \qquad \eta_x = 0 \tag{8}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\xi(0, y) = 0 \qquad \eta(0, y) = y, \tag{9}$$

welche die Lösungen $\xi = x$, $\eta = y$ und keine anderen besitzen. Da dann $\eta_y = 1$ ist, können wir unser Anfangswertproblem (6), (7) auch durch das neue offenbar äquivalente System für die fünf Funktionen u, p, q, ξ, η

$$\left\{\begin{array}{ll} u_x = p\,\eta_y & q_x = p_y \\ \xi_x = \eta_y & \eta_x = 0 \\ p_x = f_q\, p_y + (f_x + p\, f_u)\,\eta_y & \end{array}\right. \tag{10}$$

ersetzen. Hierbei ist in f_q, f_x, f_u statt x, y stets ξ, η zu setzen und es sind die Anfangsbedingungen

$$\begin{array}{ll} u(0, y) = \varphi(y) & q(0, y) = \varphi'(y) \\ \xi(0, y) = 0 & \eta(0, y) = y \\ p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y)) & \end{array} \tag{11}$$

zu stellen. Damit ist das zum Anfangswertproblem (2) äquivalente Problem aufgestellt, welches die gewünschte Form besitzt.

Entsprechendes gilt für das Anfangswertproblem zweiter Ordnung: Indem wir wie beim Problem erster Ordnung die künstliche Ersetzung von x und y durch Hilfsfunktionen ξ und η vornehmen, welche den Differentialgleichungen (8) und den Anfangsbedingungen (9) genügen, können wir wiederum unser ursprüngliches Anfangswertproblem (4), (5) durch ein äquivalentes Anfangswertproblem für ein System homogener quasilinearer Differentialgleichungen erster Ordnung für die Funktionen $u, p, q, r, s, t, \xi, \eta$ ersetzen.

Die so auftretenden Anfangswertprobleme haben, wenn wir die unbekannten Funktionen generell mit $u_1, u_2, \ldots$ bezeichnen, durchweg die Gestalt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} G_{ik}(u_1, u_2, \ldots, u_m)\,\frac{\partial u_k}{\partial y}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{12}$$

wobei Anfangsbedingungen der Form

$$u_i(0, y) = \varphi_i(y) \tag{13}$$

vorgeschrieben sind.

Dabei sind die Koeffizienten $G_{ik}(u_1, \ldots, u_m)$ Funktionen, welche explizite nur von den gesuchten Funktionen u_i selbst, nicht aber von den unabhängigen Veränderlichen x und y abhängen.

Auf ein solches Anfangswertproblem lassen sich auch Anfangswertprobleme höherer als zweiter Ordnung und solche für Differentialgleichungssysteme nach dem obigen Muster ohne weiteres reduzieren.

3. Die Bestimmung der Ableitungen längs der Anfangsmannigfaltigkeit. Ein entscheidender Punkt für die Diskussion der Anfangswertprobleme ist: Man kann mit Hilfe der Differentialgleichungen und der Anfangsdaten ein eindeutiges Verfahren zur Berechnung der weiteren Ableitungen der gesuchten Lösung längs der Anfangskurve angeben, vorausgesetzt daß solche Lösungen mit stetigen entsprechenden Ableitungen existieren. Wir beachten zunächst generell, daß längs der Anfangskurve $x=0$ alle schon bekannten Größen, etwa u und gewisse Ableitungen von u, wenn wir sie nach y differenzieren, wieder bekannte Größen, d. h. weitere Ableitungen liefern. Die noch fehlenden durch Differentiation nach x entstehenden Ableitungen müssen sodann mit Hilfe der Differentialgleichungen bestimmt werden.

Bei der Differentialgleichung $p = f(x, y, u, q)$ wird demgemäß längs der Anfangskurve $q = \varphi'(y)$ und $t = u_{yy} = q_y = \varphi''(y)$ usw. durch die Vorgabe bestimmt. Die Differentialgleichung selbst liefert den Wert $p(0, y) = f(0, y, \varphi(y), \varphi'(y))$. Ebenso ist dann $q_x = p_y = f_y + f_u q + f_q q_y$ für $x = 0$ bekannt. Um die längs der Anfangskurve noch fehlende zweite Ableitung $r = p_x = u_{xx}$ zu bestimmen, differenzieren wir die Gleichung (2) nach x und erhalten $r = p_x = f_x + f_u p + f_q q_x$. Da nunmehr rechts für $x = 0$ nach dem Vorigen schon bekannte Größen stehen, so ist auch die linke Seite für $x = 0$ bestimmt.

Durch weiteres Differenzieren der schon gewonnenen Größen bzw. der Differentialgleichung erhalten wir alle weiteren Ableitungen längs der Anfangskurve, solange die Voraussetzung stetiger Differenzierbarkeit der Funktion f und der Lösung u erfüllt ist.

In ähnlicher Weise können wir die Ableitungen von u längs der Anfangskurve bei einem Anfangswertproblem der Differentialgleichung zweiter Ordnung (4) bestimmen. Der Übersichtlichkeit und größeren Allgemeinheit wegen diskutieren wir jedoch sogleich das allgemeine Anfangswertproblem (12), (13), welches alle betrachteten speziellen Probleme umfaßt. Ein System dieser Form läßt besonders deutlich erkennen, in welcher Weise längs der Anfangsmannigfaltigkeit, d. h. für $x = 0$ die Ableitungen der Funktionen u_i sich sukzessive bestimmen.

Zunächst erhält man aus den Funktionen $\varphi_i(y)$ durch Differentiation die Ableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}, \ldots$ usw. an der Linie $x = 0$; sodann aus den Differentialgleichungen die ersten Ableitungen nach x. Durch Differentiation der gewonnenen Größen nach y erhält man für $x = 0$ die

gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x \partial y}$. Indem man sodann das Differentialgleichungssystem (12) nach x differenziert, erhält man auf der rechten Seite Ausdrücke, welche nur erste und gemischte zweite Ableitungen der Funktionen u_i nach x und y enthalten, also bekannt sind und daher nunmehr die Werte der linken Seite, nämlich die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}$ bestimmen usw. Bei dieser sukzessiven Bestimmung werden, wie besonders hervorgehoben sei, lediglich Differentiationsprozesse und Einsetzungsprozesse vorgenommen.

Nehmen wir an, daß die Differentiationen unbeschränkt ausführbar sind, so bestimmen sich dadurch längs $x = 0$, speziell also an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ aus den Anfangsdaten sämtliche Ableitungen der Funktionen u_i.

Falls wir wissen, daß die Lösungen u_i sich in der Umgebung einer Stelle der Anfangslinie z. B. $x = 0$, $y = 0$ in Potenzreihen entwickeln lassen, so sind daher die Koeffizienten dieser Taylorschen Potenzreihenentwicklung und somit die Funktionen selbst durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt.

Es liegt nun nahe, diesen Zusammenhang umzukehren. Falls der oben geschilderte Prozeß der sukzessiven Bestimmung der Anfangsableitungen unbeschränkt ausführbar ist — und dies ist der Fall, wenn die Differentialgleichungen selbst und die Anfangswerte *analytisch* sind —, so kann man mit Hilfe der so gewonnenen Ableitungen als Koeffizienten formal die Potenzreihen bilden und untersuchen, ob die so gebildeten Potenzreihen konvergieren und das gestellte Anfangswertproblem lösen.

4. Existenzbeweis analytischer Lösungen von analytischen Differentialgleichungen. Wir wollen demgemäß nach CAUCHY und SOPHIE KOWALEWSKI den folgenden fundamentalen Existenzsatz beweisen. *Es seien $\varphi_1(y), \ldots, \varphi_m(y)$ analytische Funktionen von y in der Umgebung von $y = y_0$. Es sei $\varphi_i(y_0) = u_i^0$. Es seien ferner die Funktionen $G_{ik}(u_1, \ldots, u_m)$ analytisch in der Umgebung von $u_i = u_i^0$. Dann gibt es ein und nur ein System von Funktionen $u_i(x, y)$, welche in der Umgebung von $x = 0$, $y = y_0$, analytisch sind, dem Differentialgleichungssystem*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} G_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial y} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

genügen und für $x = 0$ die Werte $\varphi_i(y)$ annehmen.

Gemäß den Bemerkungen aus Nr. 2 entnehmen wir aus diesem Existenzsatz sofort für Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung: Wenn in den Differentialgleichungen (2) bzw. (4) die Funktionen F bzw. f analytisch von ihren Argumenten in den betreffenden

Bereich abhängen und wenn die Anfangsfunktionen $\varphi(y)$, $\psi(y)$ analytisch in y sind, so besitzen die dort gestellten Anfangswertprobleme eine und nur eine analytische Lösung.

Beim Beweise des genannten Fundamentalsatzes dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Voraussetzung $y_0 = 0$ und $u_i^0 = 0$ machen. Sonst könnten wir, ohne die Form der Differentialgleichungen zu ändern, durch Einführung von $y - y_0$ als neue unabhängige Veränderliche und $u_i - u_i^0$ als neue gesuchte Funktionen diese Forderung sofort erfüllen. Wir drücken nunmehr die Voraussetzung des analytischen Charakters unserer Daten aus, indem wir annehmen, daß die Funktionen G_{ik}, φ_i durch die folgenden Potenzreihen gegeben seien

$$\varphi_i(y) = \sum_{\nu=1} a_\nu^i \, y^\nu \tag{14}$$

$$G_{ik}(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0} b_{\nu_1, \ldots, \nu_m}^{ik} \, u_1^{\nu_1} \ldots u_m^{\nu_m}. \tag{15}$$

Dabei mögen die gegebenen Potenzreihen (14), (15) in einer gewissen Umgebung $|u_i| \leqq r$ bzw. $|y| \leqq \varrho$ konvergieren.

Unsere Behauptung ist: Das oben gestellte Anfangsproblem des Differentialgleichungssystems besitzt eine Lösung, welche sich durch Potenzreihen

$$u_i(x, y) = \sum_{l,k} c_{lk}^i \, x^l \, y^k \tag{16}$$

ausdrücken läßt.

Aus Nr. 3 wissen wir, daß die Koeffizienten der Potenzreihen (16) sich durch die Differentialgleichungen und die Anfangsdaten eindeutig bestimmen. Wir gewinnen nämlich die Werte der Ableitungen der — noch hypothetischen — Lösungen u_i an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, indem wir einfach in den nach Nr. 3 gewonnenen Anfangsableitungen speziell $y = 0$ einsetzen. Damit aber sind die Koeffizienten c_{lk}^i der Reihenentwicklungen (16) eindeutig festgelegt.

Nehmen wir an, daß die formalen auf diese Weise bestimmten Potenzreihen wirklich in einem gewissen Gebiet um den Nullpunkt $x = 0$, $y = 0$ konvergieren, so dürfen wir sie nach bekannten Sätzen im Inneren des Konvergenzbereiches gliedweise differenzieren und die entstehenden Potenzreihen in die Differentialgleichung einsetzen. Die so entstehenden Ausdrücke dürfen wir wiederum in Potenzreihen nach x und y umordnen. Die Differenz der linken und rechten Seiten der Differentialgleichungen werden dadurch Potenzreihen in x und y, welche mit ihren sämtlichen Ableitungen im Nullpunkt verschwinden — dies folgt aus der Art, wie wir die sukzessiven Ableitungen der u_i an dieser Stelle definiert haben. — Somit müssen die Differenzen von rechter und linker Seite in unseren Differentialgleichungen identisch verschwinden, d. h. die u_i stellen ein Lösungssystem dar. Daß dieses Lösungssystem

die vorgeschriebenen Anfangswerte besitzt und somit unser Anfangswertproblem löst, ergibt sich ebenfalls direkt aus der Konstruktion der Potenzreihen (16), immer unter der Voraussetzung, daß diese konvergieren. *Der Beweis unseres Existenzsatzes ist also geführt, sobald wir zeigen können, daß unsere Potenzreihen* (16) *tatsächlich innerhalb eines gewissen Gebietes konvergent sind.*

Zu diesem Nachweise betrachten wir genauer die Struktur der Koeffizienten c^i_{lk} in ihrer Abhängigkeit von den Koeffizienten a^i_ν, $b^{ik}_{\nu_1,\dots,\nu_m}$. Wir beachten zunächst, daß durch gliedweise Differentiation irgendeiner Potenzreihe neue Potenzreihen entstehen, deren Koeffizienten aus den ursprünglichen durch Multiplikation mit nichtnegativen ganzen Zahlen entstehen. Bei der Einsetzung von Potenzreihen in den rechten Seiten der Differentialgleichungen (13) treten lediglich die Prozesse des Addierens und Multiplizierens auf. Ordnen wir die so rechts entstehenden Ausdrücke in Potenzreihen nach x und y um, so ergeben sich die Koeffizienten C^i_{kl} dieser Potenzreihen als Polynome in den Größen a^i_ν, $b^{ik}_{\nu_1,\dots,\nu_m}$. Die Koeffizienten dieser Polynome sind nichtnegative ganze Zahlen, die ihrerseits von der speziellen Gestalt der Funktionen G_{ik} und φ_i nicht mehr abhängen. Somit ergeben sich für die Größen c^i_{kl} Darstellungen der Form

$$c^i_{kl} = P^i_{kl}\left(a^j_\nu,\ b^{js}_{\nu_1,\dots,\nu_m}\right), \tag{17}$$

wobei P^i_{kl} die eben beschriebenen Polynome mit nichtnegativen Koeffizienten bedeuten. Verschiedene Differentialgleichungsprobleme unseres Typus, welche zu derselben Anzahl m gehören, unterscheiden sich nicht in der Gestalt dieser Funktionen P^i_{kl}, sondern lediglich in den auftretenden Argumenten a^j_ν, $b^{js}_{\nu_1,\dots,\nu_m}$ dieser Funktionen.

Nach diesen Vorbereitungen führen wir den gewünschten Konvergenzbeweis auf Grund der klassischen *Majorantenmethode.* Wir betrachten neben unserem ursprünglichen Anfangswertproblem, mit den Ausdrücken G_{ik} und φ_i, ein neues Anfangswertproblem, wobei die Funktionen G_{ik} und φ_i durch andere Funktionen K_{ik} und ψ_i ersetzt werden. Und zwar sei in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes

$$\psi_i(y) = \sum A^i_\nu y^\nu \tag{18}$$

$$K_{ik}(u_1,\dots,u_m) = \sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0} B^{ik}_{\nu_1,\dots,\nu_m} u_1^{\nu_1}\dots u_m^{\nu_m}, \tag{19}$$

wobei

und $\quad B^{ik}_{\nu_1,\dots,\nu_m} \geq \left| b^{ik}_{\nu_1,\dots,}\right.$

ist. Mit anderen Worten: Die Entwicklungskoeffizienten der neuen Funktionen K_{ik} und ψ_i sollen nicht negativ und nicht kleiner als die

Beträge der entsprechenden der ursprünglichen Funktionen G_{ik} und φ_i sein. Mit diesen Funktionen stellen wir das Anfangswertproblem (2

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m} K_{ik}(v_1, \ldots, v_m) \frac{\partial v_k}{\partial y} \tag{20}$$

$$(i = 1, \ldots, m)$$

$$v_i(0, y) = \psi_i(y) \tag{21}$$

und nennen dieses Problem ein majorantes Problem zu dem ursprünglichen. Bilden wir nach den obigen Vorschriften zu diesem majoranten Problem wiederum die Entwicklungskoeffizienten C^i_{kl} der hypothetischen Potenzreihenlösungen

$$v_i(x, y) = \sum C^i_{kl} x^k y^l, \tag{22}$$

so entstehen die neuen Größen C^i_{kl} aus den A^i_ν und $B^{js}_{\nu_1, \ldots, \nu_m}$ in derselben Weise, d. h. als dieselben Funktionen $C^i_{kl} = P^i_{kl}\left(A^i_\nu, B^{js}_{\nu_1, \ldots, \nu_m}\right)$ wie die ursprünglichen Koeffizienten c^i_{kl} aus den a^i_ν und $b^{js}_{\nu_1, \ldots, \nu_m}$. Da aber diese Potenzreihen P_{kl} nichtnegative Koeffizienten haben, so folgt unmittelbar

$$C^i_{kl} \geqq |c^i_{kl}|$$

Die formale Potenzreihe (22) ist also eine Majorante der Potenzreihe (16). Somit ist die behauptete Konvergenz unserer ursprünglichen Reihe (16) bewiesen, wenn wir die Konvergenz einer solchen majoranten Reihe (22) nachweisen können.

Diese Bemerkung nützen wir aus, indem wir ein majorantes Problem besonders einfacher Art aufstellen, dessen Lösung wir explizite angeben können, womit die Konvergenz der majoranten Reihe festgestellt ist. Wir wählen hierzu wie oben zwei positive Zahlen r und ϱ derart, daß die Potenzreihen für $G_{ik}(u_1, \ldots, u_m)$ und $\varphi_i(y)$ für $|u_i| \leqq r$ und $|y| \leqq \varrho$ konvergieren. Dann muß es, wie ein in der Theorie der Potenzreihen geläufiger Schluß zeigt, eine Konstante M derart geben, daß

$$|a^i_\nu| \leqq \frac{M}{\varrho^\nu} = A^i_\nu$$

und

$$|b^{js}_{\nu_1, \ldots, \nu_m}| \leqq \frac{M}{r^{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m}}$$

gilt. Wir dürfen $M > \frac{r}{m}$ annehmen, was wir mit Rücksicht auf einen späteren Zweck tun wollen. Um so mehr ist nun

$$\leqq \frac{M}{r^{\nu_1 + \cdots + \nu_m}} \frac{(\nu_1 + \cdots + \nu_m)!}{\nu_1! \cdots \nu_m!} = B^{js}_{\nu_1, \ldots, \nu_m}.$$

Wir setzen also [vgl. (18), (19)]

$$\psi_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} A^i_\nu y^\nu = M \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{y}{\varrho}\right)^\nu \tag{23}$$

$$(24)\quad K_{ik} = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} B^{js}_{\nu_1,\ldots,\nu_m} u_1^{\nu_1}\ldots u_m^{\nu_m} = M \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} \left(\frac{u_1}{r}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{u_m}{r}\right)^{\nu_m} \frac{(\nu_1+\cdots+\nu_m)!}{\nu_1!\cdots\nu_m!}.$$

Die Reihe (24) konvergiert, wenn wir die Argumente $u_1,\ldots,u_m$ auf ein Gebiet mit

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_m| < r$$

einschränken; ihre Summe ist dann

$$(26)\qquad K_{ik}(u_1,\ldots,u_m) = \frac{M}{1-\dfrac{u_1+\cdots+u_m}{r}},$$

die Reihe (23) ergibt für $|y| < \varrho$

$$(27)\qquad \psi_i(y) = \frac{M\varrho}{\varrho - y}.$$

So erhalten wir in dem Problem:

$$(28)\qquad \frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{M}{1-\dfrac{v_1+\cdots+v_m}{r}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial v_k}{\partial y}$$

$$(29)\qquad v_i(0, y) = \frac{M\varrho}{\varrho - y}$$

ein majorantes Anfangswertproblem zu (13).

Die einzig übrig bleibende Aufgabe ist, die Existenz von Lösungen $v_i(x, y)$ dieses Systems nachzuweisen, welche an der Stelle $x = 0,\ y = 0$ in Potenzreihen entwickelbar sind.

Da sämtliche Funktionen K_{ik} bzw. ψ_i miteinander identisch sind, liegt es nahe, für die Funktion $v_i(x, y)$ den Ansatz

$$v_i(x, y) = v(x, y)$$

zu versuchen, d. h. v_i von i unabhängig anzusetzen. Wir erhalten so die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{mM}{1-\dfrac{m}{r}v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

oder

$$(30)\qquad \left(1-\frac{m}{r}v\right)v_x - mM\,v_y = 0$$

und die Anfangsbedingung

$$(31)\qquad v(0, y) = v_0 = \frac{M\varrho}{\varrho - y}.$$

Es ist also nunmehr nur noch nötig zu zeigen, daß dieses Anfangswertproblem sich durch eine in einer passend kleinen Umgebung des Nullpunktes in eine Potenzreihe entwickelbare Funktion $v(x, y)$ lösen läßt.

Unser Anfangswertproblem stimmt mit dem schon in Nr. 1, S. 33 als letztes Beispiel betrachteten Anfangswertproblem überein. Die dortige Überlegung ergibt für die Lösung v die quadratische Gleichung

$$\left(1-\frac{m}{r}v\right)y+mMx=\frac{\varrho}{v}\left(1-\frac{m}{r}v\right)(v-M). \tag{32}$$

Unter den beiden Wurzeln dieser Gleichung haben wir diejenige zu wählen, welche für $x=0$ und $y=0$ den Wert M annimmt. Daß es eine solche Lösung gibt, folgt unmittelbar aus der Gleichung (32), welche für $x=y=0$ in $\left(1-\frac{m}{r}v\right)(v-M)=0$ übergeht. Wegen der hier zur Geltung kommenden Voraussetzung $\frac{r}{m}<M$ sind die beiden Wurzeln für $x=y=0$ voneinander verschieden. Also ist die Diskriminante der quadratischen Gleichung (32) im Nullpunkt und daher in einer Umgebung des Nullpunktes verschieden von Null. Die Wurzel läßt sich daher sicher in der Umgebung des Nullpunktes in eine konvergente Potenzreihe nach x und y entwickeln.

In der Tat kann man eine solche Lösung explizite in der Form

$$v=\frac{1}{2}\,\frac{M\left(1-\frac{rx}{\varrho}\right)+\frac{r}{m}\left(1-\frac{y}{\varrho}\right)+\sqrt{\left[M\left(1-\frac{rx}{\varrho}\right)-\frac{r}{m}\left(1-\frac{y}{\varrho}\right)\right]^2-4\frac{rM}{m}\left(1-\frac{y}{\varrho}\right)\frac{rx}{\varrho}}}{1-\frac{y}{\varrho}} \tag{33}$$

angeben, wie leicht bestätigt wird.

Hiermit ist die Konvergenz der majoranten Reihen (22) und daher auch die Konvergenz der ursprünglichen Reihen (16) in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes bewiesen und somit der Existenzbeweis für unsere Anfangswertprobleme erbracht.

Anhang zum ersten Kapitel.

§ 1. Die Differentialgleichung für die Stützfunktion einer Minimalfläche.

Die nicht lineare Differentialgleichung einer Minimalfläche $u(x, y)$ kann (vgl. Bd. I, S. 156) in folgender Form geschrieben werden

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}=0.$$

Wir geben hier eine von § 6, 3 verschiedene Linearisierung, bei welcher eine Zurückführung auf die Potentialgleichung erfolgt. Diese Linearisierung beruht auf der Einführung der sog. Stützfunktion. Offenbar sind

$$\alpha=\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\qquad \beta=\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}$$

$$\gamma=\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}$$

die Richtungskosinus der Normalen im Punkte (x, y, u) der Fläche; die Differentialgleichung kann auch

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0$$

geschrieben werden; sie besagt also, daß

$$\alpha\, d\, y - \beta\, d\, x$$

ein vollständiges Differential ist. Wir denken nun α und β als Koordinaten auf der Fläche eingeführt und x, y, u als Funktionen von α, β ausgedrückt. Für eine Minimalfläche muß dann auch

$$x\, d\beta - y\, d\alpha = d\,(\beta\, x - \alpha\, y) - (\beta\, d\, x - \alpha\, d\, y)$$

ein vollständiges Differential sein, d. h. die Gleichung

$$\frac{d\, x}{d\, \alpha} + \frac{d\, y}{d\, \beta} = 0 \tag{1}$$

bestehen.

Ist allgemein $\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma)$ die Stützfunktion einer Fläche, d. h. der Abstand der Tangentialebene mit der Normalenrichtung α, β, γ vom Nullpunkt, so ist die Tangentialebene an die Fläche im Punkte mit der Normalenrichtung (α, β, γ) durch die Gleichung

$$x\, \alpha + y\, \beta + u\, \gamma - \varphi\,(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \tag{2}$$

gegeben. Setzen wir $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$, so stellt (2) eine von den Parametern α, β abhängende Ebenenschar dar, deren Enveloppe die Fläche $u\,(x, y)$ ist; für die Enveloppe gelten nun noch die beiden folgenden durch Differentiation nach den Parametern aus (2) entstehenden Gleichungen

$$(x - \varphi_\alpha) - \frac{\alpha}{\gamma}\,(u - \varphi_\gamma) = 0$$

$$(y - \varphi_\beta) - \frac{\beta}{\gamma}\,(u - \varphi_\gamma) = 0.$$

Zusammen mit der sich aus (2) und der Homogenitätsrelation für φ ergebenden Gleichung

$$\alpha\,(x - \varphi_\alpha) + \beta\,(y - \varphi_\beta) + \gamma\,(u - \varphi_\gamma) = 0$$

erhalten wir so ein homogenes Gleichungssystem für $x - \varphi_\alpha$, $y - \varphi_\beta$, $u - \varphi_\gamma$, dessen Determinante $= \frac{1}{\gamma}$ nicht verschwindet. Es gilt daher

$$x = \varphi_\alpha\,, \qquad y = \text{[illegible]} \qquad u = \varphi_\gamma\,.$$ [1]

Danach ist

$$x_\alpha = \varphi_{\alpha\alpha} - \varphi_{\alpha\gamma}\,\frac{\text{[illegible]}}{\gamma} \qquad y_\beta = \text{[illegible]} - \varphi_{\beta\gamma}\,\frac{\text{[illegible]}}{\gamma}$$

Wenden wir diese Relationen auf die Minimalflächengleichung (1) in den Parametern α, β an, so erhalten wir

$$\varphi_{\alpha\alpha} + \text{[illegible]} - \frac{\text{[illegible]}}{\gamma}\,\varphi_{\alpha\gamma} - \frac{\text{[illegible]}}{\gamma}\,\varphi_{\beta\gamma} = 0;$$

[1] Vgl. hierzu Kap. I, § 6.

aus der Homogenität von φ_γ folgt aber

$$\alpha\varphi_{\alpha\gamma} + \beta\varphi_{\beta\gamma} = -\gamma\varphi_{\gamma\gamma},$$

so daß sich für φ *die Potentialgleichung*

$$\Delta\varphi = \varphi_{\alpha\alpha} + \varphi_{\beta\beta} + \varphi_{\gamma\gamma} = 0$$

ergibt; diese Gleichung, die zunächst nur für $\gamma = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$ bewiesen ist, gilt wegen der Homogenität der linken Seite für beliebige α, β, γ.

§ 2. Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Wir haben in Kap. I, § 2 für den Fall von zwei unabhängigen Variablen durch eine einfache Abzählung plausibel gemacht, daß ein System von partiellen Differentialgleichungen durch Differentiations- und Eliminationsprozesse im allgemeinen nicht auf eine Differentialgleichung höherer Ordnung für eine einzige Funktion zurückgeführt werden kann. Wir wollen hier diese Abzählung etwas genauer und für einen allgemeineren Fall durchführen.

Es sei

$$(1)\quad F_i\left(x_1, \ldots, x_n;\ u, u_1, \ldots, u_{m-1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

ein System von m Differentialgleichungen für die Funktionen $u, u_1, \ldots, u_{m-1}(x_1, \ldots, x_n)$.

Differenzieren wir jede der Gleichungen (1) mehrfach nach den Variablen $x_1, \ldots x_n$, so gewinnen wir neue Gleichungen für die Funktionen $u, u_1, \ldots, u_{m-1}$, in denen nun jedoch Ableitungen höherer als erster Ordnung auftreten werden. Führen wir z. B. alle möglichen Differentiationen bis zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung durch, so entsteht aus (1) ein System von $m\binom{n+\varkappa}{\varkappa}$ Differentialgleichungen[1], in welchem im allgemeinen das Auftreten sämtlicher Ableitungen der Funktionen $u, u_1, \ldots, u_{m-1}$ bis zur $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich zu erwarten ist.

Insbesondere ist die Anzahl der Ableitungen der Funktionen $u_1, \ldots, u_{m-1}$ von der Ordnung Null bis zur Ordnung $\varkappa + 1$, also die Gesamtanzahl der aus dem neuen System zu eliminierenden Größen:

$$(m-1)\binom{n+\varkappa+1}{\varkappa+1}$$

[1] Eine Funktion von n Variablen besitzt $\binom{n+\varkappa-1}{\varkappa}$ Ableitungen $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung; die Gesamtanzahl der Ableitungen von der Ordnung Null bis zur Ordnung $\varkappa$ einschließlich ist also

$$\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\binom{n+\nu-1}{\nu} = \binom{n+\varkappa}{\varkappa}$$

so daß die Elimination im allgemeinen nur dann möglich sein wird, wenn die Differenz

$$(2) \quad D(\varkappa) = m\binom{n+\varkappa}{\varkappa} - (m-1)\binom{n+\varkappa+1}{\varkappa+1} = \frac{(n+\varkappa)!}{n!\,(\varkappa+1)!}\,(\varkappa+1-n\,(m-1))$$

größer oder gleich 1 ist.

Zu einer einzigen Differentialgleichung für n allein führt uns das geschilderte Verfahren nur, falls $D(\varkappa)$ für ein bestimmtes $\varkappa$ den Wert 1 annimmt. Wir sehen jedoch leicht, daß dies für $m > 1$ außer im Fall $n = 1$ unmöglich ist.

Aus (2) folgt zunächst, daß $D(\varkappa)$ für $\varkappa = n\,(m-1) - 1$ verschwindet, daß wir also jedenfalls die Funktionen $u_1, \ldots, u_{m-1}$ und deren Ableitungen bis zur $n\,(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung durch die Funktion u und deren Ableitungen bis zu dieser Ordnung ausdrücken können.

Wegen

$$D(\varkappa+1) - D(\varkappa) = \frac{(n+\varkappa)!}{(n-1)!\,(\varkappa+2)!}\,(\varkappa+2-(m-1)\,(n-1))$$

ist $D(\varkappa)$ für $\varkappa > (m-1)\,(n-1) - 2$, also erst recht für $\varkappa \geqq n\,(m-1) - 1$ monoton wachsend, so daß der kleinste positive Wert von $D(\varkappa)$ für $\varkappa = n\,(m-1)$ angenommen wird.

Dieser Wert

$$D(n\,(m-1)) = \binom{nm}{n} \Big/ n\,(m-1)+1$$

$$\frac{n\,m}{n}\;\frac{n\,m-1}{n-1}\;\frac{n\,m-2}{n-2}\qquad n\,m-(n-2)$$

der die im allgemeinen zu erwartende Mindestanzahl der für u entstehenden Differentialgleichungen höherer Ordnung bestimmt, ist aber für $n > 1$ und $m > 1$ stets größer als 1.

Wir haben bei den obigen rein abzählenden Überlegungen keine Rücksicht auf den Umstand genommen, daß das System, welches aus (1) durch Differentiationsprozesse entsteht, von sehr spezieller Natur ist, so daß die Unmöglichkeit der Elimination nur plausibel gemacht aber nicht bewiesen ist. Daher wollen wir in Ergänzung des Gegenbeispiels von § 2 nunmehr genauer wenigstens für einen Spezialfall die Bedingungen feststellen, die für die Möglichkeit der Reduktion auf eine einzige Differentialgleichung höherer Ordnung notwendig und hinreichend sind.

§ 3. Systeme von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Das Beispiel der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

zeigt, daß in speziellen Fällen Systeme von Differentialgleichungen mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine einzige Funktion äquivalent sein können: Jede Lösung u von (1) genügt der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ und zu jeder solchen Potentialfunktion kann eine konjugierte Potentialfunktion v gefunden werden, so daß u und v dem System (1) genügen.

Wir fragen allgemeiner, unter welchen Bedingungen ein System

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \\ \Psi(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \end{cases}$$

mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung $L[u] = 0$ für u allein äquivalent ist, in dem Sinne, daß *jede Lösung u von* (1) *der Gleichung $L[u] = 0$ genügt und daß umgekehrt zu jeder Lösung u von $L[u] = 0$ eine „konjugierte" Funktion v gefunden werden kann, so daß u und v dem System* (2) genügen.

Wir betrachten zunächst lineare Differentialgleichungen der Form

$$(3) \qquad \begin{cases} v_x = a(x, y)\, v + A(x, y, u, u_x, u_y) \\ v_y = b(x, y)\, v + B(x, y, u, u_x, u_y). \end{cases}$$

A und B seien lineare Funktionen von u, u_x, u_y, deren Koeffizienten ebenso wie die Funktion $a(x, y)$ und $b(x, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes analytisch von ihren Argumenten abhängen; der Koeffizient von u_x in B sei außerdem von Null verschieden.

Aus § 7 folgt nun, daß (3) bei vorgegebenen analytischen Anfangswerten $u(0, y)$ und $v(0, y)$ in der Umgebung des Nullpunktes *eindeutig bestimmte analytische Lösungen* $u(x, y)$ und $v(x, y)$ besitzt. Andererseits können wir statt $u(0, y)$ und $v(0, y)$ auch $u(0, y) = \varphi(y)$ und $u_x(0, y) = \psi(y)$ willkürlich vorschreiben, *jedoch sind durch diese Anfangsbedingungen die Lösungen u und v des Systems nicht eindeutig festgelegt.* In der Tat ergibt sich aus der zweiten Gleichung (3) für $v(0, y)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$v_y(0, y) = b(0, y)\, v(0, y) + B(0, y, \varphi(y), \psi(y), \varphi'(y)),$$

also eine einparametrige Mannigfaltigkeit von Anfangswerten $v(0, y)$ und damit auch eine einparametrige Schar von Lösungen $v(x, y)$ des Systems (3).

Nach diesen Vorbemerkungen beweisen wir nunmehr den folgenden Satz.

Das System (3) *ist dann und nur dann mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung für u allein äquivalent, wenn die Bedingung*

$$a_y = b_x$$

erfüllt ist.

Zum Beweise differenzieren wir die Gleichungen (3) nach y bzw. nach x und erhalten

$$(4) \qquad (a_y - b_x)\, v = L[u],$$

wobei $L[u]$ ein linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung in u allein ist.

Ist nun $a_y - b_x = 0$, so folgt $L[u] = 0$ und hieraus der erste Teil des Satzes.

Ist jedoch für $x = 0$ und daher auch in einer Umgebung der y-Achse $a_y - b_x \neq 0$, so folgt aus (4)

$$v = \frac{L[u]}{a_y - b_x}; \tag{5}$$

die Funktion v ist also durch u eindeutig festgelegt.

Würde nun u einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, so ließe sich u und damit gemäß (5) auch v durch die Anfangswerte $u(0, y)$ und $u_x(0, y)$ eindeutig charakterisieren; dies steht aber im Widerspruch zu unserem früheren Ergebnis[1].

Um schließlich den allgemeinen Fall zu behandeln, setzen wir voraus, daß sich (2) in der Form

$$\begin{aligned} v_x &= F(x, y, u, v, p, q) \\ v_y &= G(x, y, u, v, p, q) \end{aligned} \tag{6}$$

schreiben läßt, wobei F und G analytisch von ihren Argumenten abhängen sollen und außerdem $\frac{\partial G}{\partial p} \neq 0$ sei. Durch Berechnung von v_{xy} aus beiden Gleichungen folgt

$$G_p u_{xx} + (G_q - F_p) u_{xy} - F_q u_{yy} + G_u p - F_u q + G_x - F_y + G_v F - F_v G = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in u allein, wenn die Ausdrücke

$$\frac{F_q}{G_p}, \qquad \frac{G_q - F_p}{G_p}, \qquad \frac{G_u p - F_u q + G_x - F_y + G_v F - F_v G}{G_p} \tag{7}$$

von v unabhängig sind. Genau wie im linearen Falle zeigt man umgekehrt, daß nur unter den Bedingungen (7) für u eine zu (6) äquivalente Differentialgleichung zweiter Ordnung bestehen kann.

§ 4. Darstellung der flächentreuen Abbildungen[2].

Die unterbestimmte Differentialgleichung

$$u_x v_y - v_x u_y = 1 \tag{1}$$

stellt die Bedingung dafür dar, daß die durch die Funktionen

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}$$

[1] Wir bemerken, daß der obige Satz auch gilt, wenn A und B nicht linear von u, u_x, u_y abhängen. Sind auch die Koeffizienten a und b noch von u, $u_x = p$ und $u_y = q$ abhängig, so treten an Stelle von $a_y = b_x$ die Gleichungen

$$a_q = b_p = 0, \qquad a_p = b_q, \qquad a_y + a_u q = b_x + b_u p,$$

an deren Bestehen alsdann die Möglichkeit der Reduktion geknüpft ist.

[2] Vgl. G. Scheffers: Math. Zeitschr. Bd. 2, S. 181.

gegebene Abbildung der x, y-Ebene auf die u, v-Ebene jedes Gebiet der x, y-Ebene in ein Gebiet der u, v-Ebene mit demselben Flächeninhalt überführt.

Wie früher (vgl. § 1,5) die homogene Gleichung

$$u_x v_y - v_x u_y = 0,$$

so können wir auch die unhomogene unterbestimmte Differentialgleichung (1) vermittels einer willkürlichen Funktion in integralloser Weise auflösen.

Hierzu ist es zweckmäßig, x, y und u, v gleichzeitig als Funktionen von zwei Parametern α und β aufzufassen und alsdann statt (1) die Differentialgleichung

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} \tag{2}$$

für die Funktionen $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$, $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ zu betrachten. Da alle Lösungssysteme x, y, u, v von (2), die durch eine Transformation der Parameter α, β auseinander hervorgehen, zu denselben Lösungssystemen $u(x, y)$, $v(x, y)$ von (1) führen, so bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir nur solche Lösungen von (2) suchen, die die Bedingungen

$$x + u = 2\alpha; \qquad y + v = 2\beta$$

erfüllen, die also vermittels zweier Funktionen $P(\alpha, \beta)$ und $Q(\alpha, \beta)$ in der Form

$$\begin{aligned} x &= \alpha + P & u &= \alpha - P \\ y &= \beta + Q & v &= \beta - Q \end{aligned}$$

dargestellt werden können.

Wegen

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = 1 + P_\alpha + Q_\beta + P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} = 1 - P_\alpha - Q_\beta + P_\alpha Q_\beta - P_\beta Q_\alpha$$

geht (2) über in

$$P_\alpha + Q_\beta = 0, \tag{3}$$

woraus für P und Q die Darstellung

$$P = \omega_\beta \qquad Q = -\omega_\alpha$$

vermittels der willkürlichen Funktion $\omega(\alpha, \beta)$ folgt. Die gewünschte integrallose Auflösung der Differentialgleichung (4) wird alsdann durch die Formeln

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \omega_\beta & u &= \alpha - \omega_\beta \\ y &= \beta - \omega_\alpha & v &= \beta + \omega_\alpha \end{aligned} \tag{4}$$

geliefert; dabei ist natürlich vorauszusetzen, daß die Determinante

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\alpha, \beta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(\alpha, \beta)} = 1 + \omega_{\alpha\alpha}\, \omega_{\beta\beta} - \omega_{\alpha\beta}^2$$

nirgends verschwindet.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die im vorigen Kapitel gegebene Konstruktion der Lösungen partieller Differentialgleichungen mit Hilfe von Potenzreihen ist an die einschneidende Voraussetzung des analytischen Charakters der Daten gebunden und wird sich auch abgesehen davon in vielen Klassen von Problemen als unsachgemäß herausstellen. Man wird daher für verschiedene Problemtypen unabhängige, direktere und möglichst auch einfachere Behandlungsmethoden erstreben.

Es zeigt sich nun, daß bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung unter geringen Stetigkeitsvoraussetzungen eine solche Integrationstheorie völlig befriedigend entwickelt werden kann. Das Hauptergebnis dieses Kapitels wird die *Äquivalenz einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit einem gewissen System gewöhnlicher Differentialgleichungen* sein. Den Schlüssel für die Theorie wird der auch später bei Problemen höherer Ordnung entscheidende *Begriff der Charakteristiken* liefern.

Grundsätzlich sei nochmals daran erinnert, daß wir vorkommende Ableitungen als stetig voraussetzen, ohne das jedesmal im einzelnen zu formulieren.

§ 1. Quasilineare Differentialgleichungen bei zwei unabhängigen Veränderlichen.

1. Charakteristische Kurven. Wir beginnen die Erörterung der Charakteristikentheorie mit einer nochmaligen kurzen Diskussion der — schon in Kap. I, § 5 behandelten — quasilinearen Differentialgleichungen. Dabei müssen einige der in Kap. I durchgeführten Überlegungen unter anderen Gesichtspunkten wiederholt werden. Zunächst beschränken wir uns auf zwei unabhängige Veränderliche x, y:

$$a u_x + b u_y = c, \tag{1}$$

wobei a, b, c gegebene Funktionen von x, y, u sind, welche in dem betrachteten Teil des x, y, u-Raumes zusammen mit ihren ersten Ableitungen stetig sein mögen und für welche dort $a^2 + b^2 \neq 0$ ist.

Diese partielle Differentialgleichung läßt sich folgendermaßen geometrisch deuten: Von der Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung wird

verlangt, daß sie in jedem Punkte P mit den Koordinaten x, y, u eine Tangentialebene besitzt, deren Richtungskoeffizienten $u_x = p$, $u_y = q$ durch die lineare Gleichung $ap + bq = c$ verknüpft sind. Diese Gleichung besagt, daß die fraglichen Tangentialebenen aller durch (x, y, u) gehenden Integralflächen einem und demselben Ebenenbüschel angehören, dessen Achse im Punkte P durch die Relationen

$$dx : dy : du = a : b : c \tag{2}$$

gegeben wird. Unsere Ebenenbüschel bzw. Achsen nennen wir *Mongesche Büschel bzw. Mongesche Achsen*[1].

Wir bezeichnen den Punkt P mit der hindurchgehenden Mongeschen Achsenrichtung auch als „*charakteristisches Linienelement*".

Die Mongeschen Achsenrichtungen bilden in unserem Raum ein Richtungsfeld; die Bahnkurven dieses Richtungsfeldes werden durch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (2) definiert und heißen „*charakteristische Kurven*" unserer Differentialgleichung. Wir können auf ihnen einen Parameter s einführen, so daß ihre Differentialgleichen lauten

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = b, \qquad \frac{du}{ds} = c. \tag{2a}$$

Die Projektionen der charakteristischen Kurven auf die x, y-Ebene nennt man „*charakteristische Grundkurven*".

Die partielle Differentialgleichung (1) integrieren, heißt Flächen finden, welche in jedem Punkte auf das Mongesche Feld passen, d. h. Flächen, deren Tangentialebene in jedem Punkte dem Mongeschen Büschel angehört oder, was auf dasselbe herauskommt, Flächen, welche in jedem Punkte die Mongesche Achsenrichtung als Tangentialrichtung enthalten. Somit erkennen wir: *Jede von einer einparametrigen Schar von charakteristischen Kurven erzeugte Fläche $u = u(x, y)$ ist eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung.* Umgekehrt gilt: *Jede Integralfläche wird so erzeugt.*

Die letztere Tatsache bestätigen wir rechnerisch folgendermaßen: Auf jeder gegebenen Integralfläche $u = u(x, y)$ der Differentialgleichung (1) wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{ds} = a, \qquad \frac{dy}{ds} = b,$$

wobei in a und b für u die Funktion $u(x, y)$ einzusetzen ist, eine einparametrige Schar von Kurven $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(x(s), y(s))$ definiert.

Die für u bestehende partielle Differentialgleichung (1) längs einer solchen Kurve geht in die Aussage $\frac{du}{ds} = c$ über. Unsere einparametrige

[1] Vgl. S. 18.

Schar genügt also den Relationen (2a) und besteht somit aus charakteristischen Kurven. In den Differentialgleichungen tritt übrigens der Parameter s nicht explizite auf. Wir erhalten daher dieselben Integralkurven, wenn wir s durch $s + \text{konst.}$ ersetzen. In diesem Sinne ist eine additive Konstante im Parameter s als unwesentlich zu betrachten.

Da die Lösungen des Differentialgleichungssystems durch die Anfangswerte von x, y, u für $s = 0$ eindeutig festgelegt sind, so erhalten wir den Satz: *Jede charakteristische Kurve, welche einen Punkt mit einer Integralfläche gemeinsam hat, liegt ganz auf der Integralfläche* und schließlich: *Jede Integralfläche wird aus einer einparametrigen Schar von charakteristischen Kurven erzeugt.*

2. Anfangswertproblem. Eine Übersicht über die Mannigfaltigkeit der Lösungen der partiellen Differentialgleichung erhalten wir durch Diskussion des *Anfangswertproblems:* Eine Raumkurve C mit doppelpunktfreier[1] Projektion C_0 auf die x, y-Ebene sei durch Vorgabe von x, y, u als Funktionen eines Parameters t gegeben, wobei $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$ sei. Gesucht ist in einer Umgebung von C_0 eine Integralfläche $u = u(x, y)$, welche durch C geht; d. h. eine Lösung von (1), für welche in t identisch $u(t) = u(x(t), y(t))$ gilt. Von den Daten, d. h. den Koeffizienten der Differentialgleichung und den Anfangsgrößen $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ wird lediglich stetige Differenzierbarkeit im betrachteten Bereiche, *nicht aber analytischer Charakter* vorausgesetzt.

Um das Anfangswertproblem zu lösen, legen wir durch jeden Punkt von C eine charakteristische Kurve, d. h. eine Lösungskurve des Differentialgleichungssystems (2a), was innerhalb einer gewissen Umgebung in eindeutiger Weise möglich ist. Wir erhalten so eine noch von dem Parameter t abhängige Schar charakteristischer Kurven

$$x(s, t), \qquad y(s, t), \qquad u(s, t).$$

Diese Kurven erzeugen dann eine Fläche $u(x, y)$, wenn wir aus den ersten beiden Funktionen die Variablen s und t durch x und y ausdrücken können. Hinreichende Bedingung hierfür ist das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante

$$\Delta = x_s y_t - y_s x_t = a y_t - b x_t \tag{3}$$

längs der Kurve C. Dabei machen wir Gebrauch von einem bekannten Satze über gewöhnliche Differentialgleichungen[2], wonach die Funktionen x, y, u stetig differenzierbar von s und t abhängen.

Ist diese Bedingung $\Delta \neq 0$ erfüllt, dann wird u eine Funktion von x, y, und die dritte Differentialgleichung $\frac{du}{ds} = c$ ist wegen $\frac{du}{ds} = a u_x + b u_y$

[1] Übrigens könnte man auch ohne weiteres Doppelpunkte, sei es für die Projektion C_0 von C auf die x, y-Ebene, sei es für C selbst, zulassen, wobei man zu mehrdeutigen Lösungen u, bzw. zu Integralflächen mit Selbstdurchdringung gelangen würde.

[2] Vgl. zu diesem Satze analoge Sätze mit Beweis in Kap. V, § 5.

unmittelbar äquivalent mit der gegebenen partiellen Differentialgleichung. *Das Anfangswertproblem ist mithin für die Anfangskurve C gelöst. Die eindeutige Bestimmtheit der Lösung* folgt sofort aus dem obigen Satze, daß eine charakteristische Kurve, die einen Punkt mit einer Integralfläche gemeinsam hat, ganz auf dieser Fläche liegen muß. D. h. Jede durch C gehende Lösung muß die gesamte einparametrige Schar der Charakteristiken durch C enthalten und somit mit u identisch sein.

Die Bedingung $\Delta \neq 0$ längs C läßt sich geometrisch folgendermaßen deuten: Tangentialrichtung und charakteristische Richtung an jedem Punkte von C sollen verschiedene Projektionen auf die x, y-Ebene haben.

Wenn längs C der Ausnahmefall $\Delta = 0$ eintritt[1], so muß, damit das Anfangswertproblem lösbar wird, C selbst eine charakteristische Kurve sein; wir können nämlich den Parameter t auf der Kurve dann so wählen, daß längs der Kurve $a = \frac{dx}{dt}$, $b = \frac{dy}{dt}$ wird. Die partielle Differentialgleichung besagt nunmehr $c = \frac{du}{dt}$; somit muß C in der Tat eine charakteristische Kurve sein. Ist aber C eine charakteristische Kurve, so gibt es durch sie als Anfangskurve nicht nur eine, sondern unendlich viele Integralflächen, die sich alle in C schneiden; wir brauchen nämlich lediglich durch irgendeinen Punkt von C eine andere Kurve C' zu legen, welche eine nirgends charakteristische Projektion hat. Die Integralfläche durch C' enthält dann gewiß die charakteristische Kurve C und wir erkennen daher, daß die Mannigfaltigkeit der Lösungen des Anfangswertproblems für C durch die Mannigfaltigkeit der Kurven C' gegeben wird. Alle zugehörigen Integralflächen enthalten die Kurve C. Die charakteristischen Kurven sind so als Kurven gekennzeichnet, in denen sich zwei Integralflächen durchsetzen *(Verzweigungskurven)*, während durch alle nicht charakteristischen Kurven höchstens eine Integralfläche gehen kann.

Wir fassen unsere Überlegungen in folgendem Satz[2] zusammen:

Ist für die Anfangskurve C überall $\Delta \neq 0$, *so besitzt das Anfangswertproblem eine und nur eine Lösung. Ist jedoch längs C überall* $\Delta = 0$, *so muß C, damit das Anfangswertproblem lösbar ist, charakteristische Kurve sein. Das Anfangswertproblem besitzt in diesem Falle unendlich viele Lösungen.*

---

[1] Den Fall, daß Δ nur in isolierten Punkten oder auf einer sonstigen Teilmenge von C verschwindet, lassen wir hier beiseite.

[2] Ein zusammenfassender Existenzsatz mit expliziter Formulierung aller Voraussetzungen würde folgendermaßen lauten: Es sei G_0 ein Gebiet der x, y-Ebene, G das Gebiet des x, y, u-Raumes, welches durch Hinzunahme der Werte u mit $|u| < U$ aus G_0 entsteht. Es seien a, b, c in G stetig differenzierbare Funktionen von x, y, u. Es seien $x(t), y(t), u(t)$ stetig differenzierbare Funktionen von t für $|t| < T$ mit $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$, welche eine Kurve C in G mit doppelpunktfreier Projektion C_0 in G_0 definieren. Auf C sei $\Delta = a y_t - b x_t \neq 0$. Dann gibt es ein

Wir weisen darauf hin, daß Lösungen des Anfangswertproblems nur solche Lösungen der Differentialgleichung (1) sein können, die durch C gehen und in einer Umgebung von C — also auch auf C selbst — stetig und stetig differenzierbar sind. Ohne die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit von u auf C können wir aus der Bedingung $\Delta = 0$ längs C nicht schließen, daß C eine charakteristische Kurve ist. In der Tat kann es Lösungen der Differentialgleichung geben, die durch eine Kurve C mit $\Delta = 0$ gehen, ohne daß C charakteristisch ist. Allerdings können dann die Ableitungen von u auf C nicht mehr stetig sein; C erscheint in solchen Fällen als *Rückkehrkante* (Enveloppe von Charakteristiken) *der Integralfläche* $u(x, y)$.

3. Beispiele. 1. Zur Illustration der gewonnenen Ergebnisse betrachten wir die Differentialgleichung

$$u\,u_x + u_y = 1. \tag{4}$$

Die zugehörigen charakteristischen Differentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= u \\ \frac{dy}{ds} &= 1 \\ \frac{du}{ds} &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

und werden gelöst durch

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{s^2}{2} + u_0 s \\ y &= y_0 + s \\ u &= u_0 + s, \end{aligned}$$

wobei x_0, y_0, u_0 willkürliche Integrationskonstante sind. Insbesondere ist die Schar der durch eine vorgegebene Anfangskurve C:

$$x_0 = \varphi(t), \quad y_0 = \psi(t), \quad u_0 = \chi(t)$$

gehenden Charakteristiken durch

$$\begin{aligned} x(s, t) &= \varphi(t) + s\chi(t) + \frac{s^2}{2} \\ y(s, t) &= \psi(t) + s \\ u(s, t) &= \chi(t) + s \end{aligned} \tag{6}$$

Teilgebiet G_0' von G_0, das C_0 enthält, und eine in $G_0^{0\prime}$ stetig differenzierbare Funktion $u(x, y)$, welche dort der Differentialgleichung $a\,u_x + b\,u_y = c$ und auf C_0 der Anfangsbedingung: $u(x(t), y(t)) = u(t)$ genügt. Die Lösung u ist eindeutig bestimmt.

Wir werden im folgenden grundsätzlich auf entsprechende Formulierungen von Existenzsätzen verzichten. Denn unsere Darstellung ist mehr auf das Methodische gerichtet, und wir wollen demgemäß nicht daran behindert sein, die verschiedenen Momente eines verwickelten Sachverhaltes ihrer relativen Bedeutung gemäß verschieden zu betonen.

gegeben. Die Determinante

$$\Delta(s, t) = x_s\, y_t - x_t\, y_s = s(\psi_t - \chi_t) + \chi\, \psi_t - \varphi_t$$

hat dabei auf C den Wert

$$\Delta = \Delta(0, t) = \chi\, \psi_t - \varphi_t. \tag{7}$$

Ist nun längs C diese Determinante $\Delta \neq 0$, so lassen sich aus (6) die Parameter s und t eliminieren, so daß u als Funktion von x und y darstellbar ist. In der Tat folgt zunächst

$$\begin{aligned} u &= y + \chi(t) - \psi(t) \\ x &= \varphi(t) + \chi(t)\,(y - \psi(t)) + \frac{(y - \psi(t))^2}{2} \end{aligned}$$

und alsdann aus der zweiten Gleichung t als Funktion von x und y, falls

$$D = \varphi_t - \chi\, \psi_t + (y - \psi(t))\,(\chi_t - \psi_t)$$

von Null verschieden ist. Bei Annäherung an die Kurve C gilt nun $y - \psi(t) \to 0$, so daß also wegen $\varphi_t - \chi\, \psi_t \neq 0$ eine Umgebung von C existiert, in der $D \neq 0$, $t = t(x, y)$ und daher $u = u(x, y)$ ist.

Wählen wir für C die *charakteristische Kurve*

$$\begin{aligned} x_0 &= \tfrac{1}{2} t^2, \\ y_0 &= t, \\ u_0 &= t, \end{aligned} \tag{8}$$

so geht (6) über in

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(s + t)^2, \\ y &= s + t, \\ u &= s + t, \end{aligned}$$

d. h. wiederum in eine Darstellung der Kurve C. Bei beliebiger Funktion w wird nun durch die Gleichung

$$x = \tfrac{1}{2} u^2 + w(u - y) \tag{9}$$

implizit eine Lösung von (4) gegeben, was übrigens als Spezialfall des Beispieles Nr. 5 aus Kap. I, § 1 entnommen werden kann. Wählen wir w so, daß $w(0) = 0$ ist und u aus (9) eindeutig berechnet werden kann, so geht die Fläche $u = u(x, y)$ durch die vorgegebene Kurve.

Schließlich sei C die nichtcharakteristische Kurve

$$\left\{ \begin{aligned} x_0 &= t^2 \\ y_0 &= 2t \\ u_0 &= t. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Das System (6) geht über in

$$\begin{aligned} x &= \frac{s^2}{2} + s\,t + t^2 \\ y &= s + 2t \\ u &= s + t. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Determinante $\Delta(s, t) = s$ verschwindet für $s = 0$, ohne daß C charakteristisch ist. Durch Elimination von s und t folgt

$$u(x, y) = \frac{y}{2} \pm \sqrt{x - \frac{y^2}{4}}, \tag{12}$$

also zwei Flächenmäntel, die durch C gehen und für $x > \frac{y^2}{4}$, also außerhalb C der Gleichung (4) genügen. Das Anfangswertproblem wird durch (12) nicht gelöst, da die Ableitungen u_x und u_y bei Annäherung an C nicht beschränkt bleiben. C ist eine *Rückkehrkante der Fläche* $u = u(x, y)$.

2. Für den Fall einer *linearen Differentialgleichung* (1), wobei die Funktionen a, b, c von u nicht explizit abhängen, bedeutet das Verschwinden von Δ längs einer nicht charakteristischen Anfangskurve C, daß die durch das System

$$x = x(s, t), \qquad y = y(s, t), \qquad u = u(s, t)$$

bestimmte Mannigfaltigkeit eine Zylinderfläche ist, deren Erzeugende senkrecht zur x, y-Ebene stehen. Setzen wir voraus, daß auf C

$$y_s u_t - u_s y_t \neq 0$$

gilt, so läßt sich x als Funktion von y und u ausdrücken. Wir zeigen, daß $x = f(y, u)$ von u nicht abhängt.

Zunächst beachten wir, daß im Fall linearer Differentialgleichungen aus (2a) für die Determinante $\Delta = x_s y_t - x_t y_s$ die Relation

$$\Delta_s = (a_x + b_y)\Delta$$

folgt, daß also Δ überall verschwindet, wenn dies auf C der Fall ist. Nun aber folgt aus

$$x_s = f_y y_s + f_u u_s$$
$$x_t = f_y y_t + f_u u_t$$

sofort

$$\Delta = f_u (u_s y_t - u_t y_s),$$

d. h.

$$f_u = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = f(y).$$

§ 2. Quasilineare Differentialgleichungen bei n unabhängigen Veränderlichen.

Ist die Anzahl n der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ größer als zwei, so ändert sich an der Theorie der partiellen Differentialgleichungen nichts Wesentliches; als neues Moment kommt lediglich hinzu, daß neben den eindimensionalen charakteristischen Kurven und neben den n-dimensionalen Integralflächen noch $(n-1)$-dimensionale charakteristische Mannigfaltigkeiten C von Bedeutung werden. Eine Integralfläche kann man einmal aus einer $(n-1)$-parametrigen Schar

von charakteristischen Kurven aufbauen, andererseits aus einer einparametrigen Schar charakteristischer $(n-1)$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, deren jede wiederum von einer $(n-2)$-parametrigen Schar charakteristischer Kurven erzeugt wird[1].

Wir betrachten die quasilineare Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a, \tag{1}$$

wo die Größen a_i ebenso wie die Größe a gegebene Funktionen der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ mit stetigen Ableitungen und $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$ sind. Offenbar besagt die Gleichung geometrisch, daß die Fläche $u(x_1, \ldots, x_n)$ des x, u-Raumes in jedem Punkte die „charakteristische Richtung" $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : du = a_1 : a_2 : \ldots : a_n : a$ als Tangentialrichtung enthält. Entsprechend wie bei zwei unabhängigen Veränderlichen definieren wir nunmehr: Die n-parametrige Schar von Kurven, welche im xu-Raume durch das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i, \qquad \frac{du}{ds} = a \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

gekennzeichnet ist, heißt die zur partiellen Differentialgleichung gehörige *Schar von charakteristischen Kurven*; ihre Projektionen auf den x-Raum heißen *charakteristische Grundkurven*.

Diese charakteristischen Kurven sind durch das Differentialgleichungssystem ohne Bezugnahme auf Lösungen der partiellen Differentialgleichung (1) definiert[2].

Wir stellen jetzt den Zusammenhang her, indem wir zeigen:

Auf jeder durch $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ gegebenen Integralfläche der partiellen Differentialgleichung gibt es eine die Integralfläche erzeugende $(n-1)$-parametrige Schar von charakteristischen Kurven. Jede von einer solchen Schar erzeugte Fläche $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ ist Integralfläche. Ferner: *Wenn eine charakteristische Kurve einen Punkt mit einer Integralfläche gemein hat, so liegt sie ganz auf dieser Fläche.*

[1] Auch alle Zwischenstufen könnte man diskutieren (vgl. Fußnote [1] auf S. 89).

[2] Daß die $n+1$ charakteristischen Differentialgleichungen (2) nur eine n-parametrige Schar von Kurven definieren, liegt an dem Auftreten der unwesentlichen additiven Integrationskonstante in dem nicht explizit in (2) vorkommenden Parameter s.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß im Spezialfall einer linearen Differentialgleichung, d. h. wenn die a_i nicht explizit von u abhängen, schon die Differentialgleichungen $\frac{dx_i}{ds} = a_i$, $(i = 1, \ldots, n)$, ein bestimmtes System bilden, welches die „charakteristischen Grundkurven" als $(n-1)$-parametrige Schar im x-Raum bestimmt, während im allgemeinen Falle diese Grundkurven eine n-parametrige Schar bilden.

Zum Beweise betrachten wir das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $\frac{dx_i}{ds} = a_i$, $(i = 1, \ldots, n)$, wobei rechts in $a_i(x_1 \ldots x_n, u)$ für u die Lösungsfunktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ einzusetzen ist. Dieses Differentialgleichungssystem definiert eine $n-1$-parametrige Schar von Kurven auf der Integralfläche, welche demgemäß diese Fläche erzeugen. Längs dieser Kurven wird u eine Funktion des Kurvenparameters s, und wir erhalten $\frac{du}{ds} = \sum u_{x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum a_i u_{x_i}$, also, da u der Differentialgleichung genügt, $\frac{du}{ds} = a$. Damit ist diese Kurve als charakteristische Kurve erkannt. Die zweite Behauptung ergibt sich unmittelbar wie in § 1 aus der eindeutigen Bestimmtheit der charakteristischen Kurve durch einen gegebenen Punkt.

Wir benutzen diese Zusammenhänge, um nun umgekehrt aus den durch die charakteristischen Differentialgleichungen gewonnenen charakteristischen Kurven die Integralflächen aufzubauen. Dabei gehen wir von dem folgenden *Anfangswertproblem* aus: Mit Hilfe von $n-1$ unabhängigen Parametern $t_1, \ldots, t_{n-1}$ sei im $(n+1)$-dimensionalen Raume eine $(n-1)$-dimensionale Anfangsmannigfaltigkeit C:

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad (i = 1, \ldots, n); \qquad u = u(t_1, \ldots, t_{n-1})$$

gegeben, wobei wir voraussetzen, daß der Rang der Matrix $\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}\right)$ gleich $n-1$ ist. Wir setzen die Projektion C_0 dieser Mannigfaltigkeit auf den x-Raum als doppelpunktfrei voraus; d. h. wir nehmen an, daß verschiedenen Wertsystemen $t_1, \ldots, t_{n-1}$ verschiedene Punkte von C_0 entsprechen. Gesucht ist in einer Umgebung von C_0 eine Lösung $u(x_1, \ldots, x_n)$ der Differentialgleichung, welche durch C geht, d. h. identisch in $u(t_1, \ldots, t_{n-1})$ übergeht, wenn die Größen x_i durch $x_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$ ersetzt werden.

Wir lösen dieses Anfangswertproblem, indem wir für ein vorgegebenes Wertsystem $t_1, \ldots, t_{n-1}$ das System der gewöhnlichen charakteristischen Differentialgleichungen (2) durch Funktionen

$$x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$$

integrieren, welche für $s = 0$ in die vorgegebenen Funktionen von $t_1, \ldots, t_{n-1}$ übergehen. Diese Funktionen hängen nicht nur von s, sondern auch von $t_1, \ldots, t_{n-1}$ stetig differenzierbar ab. Nunmehr denken wir uns aus den Gleichungen $x_i = x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$ umgekehrt die Größen $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$ durch $x_1, \ldots, x_n$ ausgedrückt und in $u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$ eingesetzt, so daß u als Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ erscheint. Diese Einführung der Größen $x_1, \ldots, x_n$ als neue unabhängige Veränderliche ist sicherlich dann möglich, wenn die Funktionaldeterminante

$$
(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} = \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (s, t_1, \dots, t_{n-1})}
$$

längs C, d. h. bei Einsetzung $s = 0$, nicht verschwindet. Wegen (2) gilt auf C für die Elemente der ersten Zeile $\frac{\partial x_i}{\partial s} = a_i(x_1, \dots, x_n, u)$, wobei für die x_i und u die vorgeschriebenen Anfangswerte als Funktionen der $t_1 \dots t_{n-1}$ einzusetzen sind.

Die Funktionaldeterminante (3) ist somit identisch mit

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}
$$

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir aus $u(s, t_1, \dots, t_{n-1})$ eine Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$. Die Gleichung $\frac{du}{ds} = a$ geht über in $\sum u_{x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum a_i u_{x_i} = a$; also ist u eine Lösung der Differentialgleichung (1), und wir haben somit das Anfangswertproblem gelöst. *Unter der Voraussetzung $\Delta \neq 0$ besitzt also das Anfangswertproblem für unsere Anfangsmannigfaltigkeit eine eindeutig bestimmte Lösung.*

Im Ausnahmefall, wo $\Delta = 0$ längs C gilt, versagt unsere Lösung des Anfangswertproblemes. Wir stellen die Frage, unter welchen weiteren Bedingungen auch in diesem Falle das Anfangswertproblem lösbar ist.

Zunächst drücken wir das Bestehen der Gleichung $\Delta = 0$ in folgender Weise aus: Es gibt $n-1$ eindeutig bestimmte Faktoren $\lambda_i(t_1, \dots, t_{n-1})$, welche stetig von den Parametern abhängen, so daß längs C die linearen Abhängigkeiten

$$
(4)\qquad a_i = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}
$$

bestehen. Dies folgt in der Tat unmittelbar aus dem Verschwinden der Determinante Δ und dem Nichtverschwinden mindestens einer der zur ersten Zeile gehörigen Unterdeterminanten.

Wir führen nunmehr, um die gesuchten Bedingungen zu formulieren, den Begriff „*charakteristische* $(n-1)$-*dimensionale Mannigfaltigkeit*" ein; zunächst in geometrischer Sprechweise, wobei wir jedem Punkte $x_1, \dots, x_n, u$ des x, u-Raumes einen „*charakteristischen Vektor*" $a_1, \dots, a_n, a$ zuordnen.

Die Mannigfaltigkeit C heißt charakteristisch, wenn in jedem ihrer Punkte der zugehörige charakteristische Vektor tangential zur Mannigfaltigkeit gerichtet ist.

Indem wir die Mannigfaltigkeit C durch $n-1$ Parameter $t_1, \ldots, t_{n-1}$ darstellen, formulieren wir unsere Definition analytisch: C heißt eine charakteristische Mannigfaltigkeit zur partiellen Differentialgleichung $\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} = a$, wenn es $n-1$ Faktoren $\lambda_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$, $(i = 1, \ldots, n-1)$ gibt, so daß in C die Relationen

$$a_i = \sum_{=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

$$a = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} \tag{5'}$$

bestehen: d. h. daß der charakteristische Vektor linear von den $n-1$ linear unabhängigen Tangentialvektoren mit den Komponenten

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \qquad \frac{\partial u}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, \qquad \cdot 1)$$

abhängt.

Für eine charakteristische Mannigfaltigkeit zu einer quasilinearen Differentialgleichung gelten die folgenden Sätze: *Jede charakteristische Mannigfaltigkeit wird erzeugt durch eine $n-2$-parametrige Schar von charakteristischen Kurven; und umgekehrt erzeugt jede solche Kurvenschar eine charakteristische Mannigfaltigkeit.*

Wenn eine charakteristische Kurve Γ einen Punkt mit einer charakteristischen Mannigfaltigkeit C gemeinsam hat, so liegt sie ganz in ihr.

Um den ersten Satz zu beweisen, betrachten wir in der Parametermannigfaltigkeit der t_i eine eindimensionale Kurve bzw. eine $n-2$-parametrige Schar solcher durch einen Parameter s dargestellter Kurven $t_i = t_i(s)$, welche durch das System von $n-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dt_\nu}{ds} = \lambda_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1}) \tag{6}$$

definiert sind. Es gehen dann die Funktionen $x_i(t_1, \ldots, t_{n-1})$ und $u(t_1, \ldots, t_{n-1})$ in Funktionen von s über, und für diese wird

$$\frac{dx_i}{ds} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \lambda_\nu \quad \text{und} \quad \frac{du}{ds} = \sum^{n-1} \frac{\partial u}{\partial t_\nu} \lambda_\nu,$$

somit zufolge der Definitionsgleichungen der charakteristischen Mannigfaltigkeit

$$\frac{dx_i}{ds} \quad . \quad \frac{du}{ds} = a.$$

Dies aber drückt aus, daß unsere in C liegenden Kurven

$$x_i = x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$$
$$u = u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$$

charakteristische Kurven sind. Da sie eine $n-2$-parametrige Schar bilden, so erzeugen sie C. — Die Umkehrung versteht sich von selbst, da eine von Scharen charakteristischer Kurven erzeugte Mannigfaltigkeit gewiß in jedem ihrer Punkte vom zugehörigen charakteristischen Vektor berührt wird.

Der zweite Satz folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Lösungen der charakteristischen Differentialgleichungen eindeutig durch die Anfangsbedingung bestimmt sind, einen Punkt von C zu enthalten. Denn nach dem Obigen geht durch diesen Punkt schon eine ganz auf C liegende charakteristische Kurve.

Nunmehr können wir als Ergebnis den folgenden abschließenden Hauptsatz aussprechen: *Ist $\Delta \neq 0$ längs der Anfangsmannigfaltigkeit C, so gibt es durch C eine und nur eine Lösung des Anfangswertproblems. Gilt jedoch längs C überall $\Delta = 0$, so ist für die Lösbarkeit des Anfangswertproblems notwendig und hinreichend, daß C eine charakteristische Mannigfaltigkeit ist. In diesem Falle gibt es unendlich viele Lösungen des Anfangswertproblems und C erscheint wiederum als Verzweigungsmannigfaltigkeit.*

Es bleibt nur der auf den Fall $\Delta = 0$ bezügliche Teil des Satzes zu beweisen. Aus der Voraussetzung $\Delta = 0$ folgte die Existenz von $n-1$ Faktoren λ, die — stetig und differenzierbar — von den Parametern $t_1, \ldots, t_{n-1}$ abhängen, so daß die Relationen (5) gelten. Wir haben auch die fehlende Bedingung (5') zu erweisen, vorausgesetzt, daß durch C eine Integralfläche $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ geht. Für die Lösung u gilt längs C

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i},$$

also, da u die Differentialgleichung (1) erfüllt,

$$a = \sum \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu}.$$

Dies aber ist die zu beweisende Relation[1].

Ist umgekehrt C eine charakteristische Mannigfaltigkeit, so konstruieren wir unendlich viele sie enthaltende Lösungen u der partiellen Differentialgleichung folgendermaßen: Wir wählen eine willkürliche

[1] Man sieht das Ergebnis übrigens auch leicht geometrisch ohne Rechnung ein, indem man beachtet, daß der charakteristische Vektor tangential an der Integralfläche sein muß; da seine Projektion auf den x-Raum zufolge der Relationen (5) tangential zur Projektion von C auf den x-Raum ist, so folgt, daß er selber tangential zu C ist.

$(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit C', welche C in einer $n-2$-dimensionalen Mannigfaltigkeit S schneidet und für welche überall $\Delta \neq 0$ ist. Durch C' geht dann eine eindeutig bestimmte Integralfläche J'. Diese aber enthält gemäß ihrer oben angegebenen Konstruktion alle durch S gehenden charakteristischen Kurven, somit die von diesen erzeugte Mannigfaltigkeit C. Der Beweis unseres Hauptsatzes ist damit zu Ende geführt.

§ 3. Allgemeine Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

1. Charakteristische Kurven und Fokalkurven. Wir betrachten eine allgemeine Differentialgleichung

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{1}$$

wobei zur Abkürzung $p = u_x$, $q = u_y$ gesetzt ist und — entsprechend unserer ständigen Verabredung — vorausgesetzt wird, daß F in dem zu betrachtenden Wertebereich eine stetige und mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Funktion seiner fünf unabhängigen Veränderlichen ist. Wir machen dabei ausdrücklich die Voraussetzung

$$F_p^2 + F_q^2 \neq 0.$$

Die partielle Differentialgleichung läßt sich im x, y, u-Raume geometrisch folgendermaßen deuten (vgl. Kap. I, § 4): In jedem betrachteten Punkte (x, y, u) wird von den Richtungskoeffizienten p, q der Tangentialebene einer Integralfläche $u(x, y)$ das Bestehen der Gleichung $F = 0$ verlangt. Diese Gleichung ist jetzt nicht mehr linear in p und q; daher stellen die möglichen Tangentialebenen im allgemeinen kein Ebenenbüschel mehr dar; wir nehmen an, daß sie eine einparametrige Schar bilden und einen Kegel, den *Kegel von* MONGE, einhüllen. Die Differentialgleichung ordnet somit jedem Punkte (x, y, u) des betrachteten Raumstückes einen solchen Mongeschen Kegel zu; das Integrationsproblem besteht in der Aufgabe, Flächen zu finden, welche auf dieses Kegelfeld passen, d. h. in jedem Punkte den zugehörigen Kegel berühren.

Wir können die Mongeschen Kegel statt durch die Relation $F = 0$ für ihre Tangentialebenen auch durch eine Relation für ihre Seitenlinien charakterisieren. Um zu einer analytischen Darstellung zu gelangen, denken wir uns den Mongeschen Kegel $F = 0$ in Parameterform dargestellt, indem p und q als Funktionen eines Parameters λ aufgefaßt werden. Dann erscheint eine Seitenlinie des Kegels als Grenzlage der Schnittgeraden der zum Parameter λ und der zum Parameter $\lambda + h$ gehörigen Tangentialebene für $h \to 0$. Denken wir uns längs der Seitenlinie x, y, u etwa als Funktionen der Entfernung σ von der Spitze dargestellt, so gelangt man in bekannter Weise neben der Gleichung

$$\frac{du}{d\sigma} = p(\lambda)\frac{dx}{d\sigma} + q(\lambda)\frac{dy}{d\sigma}$$

zu der Gleichung

$$0 = p'(\lambda)\frac{dx}{d\sigma} + q'(\lambda)\frac{dy}{d\sigma}.$$

Da außerdem durch Differentiation von $F = 0$ nach λ die Gleichung

$$F_p\, p'(\lambda) + F_q\, q'(\lambda) = 0$$

besteht, so erhalten wir sofort für die Seitenrichtungen des Kegels die Relation

$$dx : dy : du = F_p : F_q : (p F_p + q F_q), \tag{2}$$

die wir als die zur Differentialgleichung (1) duale Darstellung des Mongeschen Kegels auffassen können.

Die so charakterisierten Seitenrichtungen des Mongeschen Kegels wollen wir als *charakteristische Richtungen* bezeichnen. Zum Unterschied gegen die quasilinearen Gleichungen bei denen jedem Raumpunkt nur eine charakteristische Richtung zukommt, haben wir es also hier in jedem Punkte mit einer einparametrigen Schar charakteristischer Richtungen zu tun. Raumkurven, welche in jedem Punkt charakteristische Richtung besitzen, wollen wir *Fokalkurven* oder *Mongesche Kurven* nennen. Indem wir auf ihnen einen geeigneten Parameter s einführen, können wir die Bedingungen (2) für die Fokalkurven in die Gestalt

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \qquad \frac{dy}{ds} = F_q, \qquad \frac{du}{ds} = p F_p + q F_q \tag{3}$$

setzen. Die letzte dieser drei Differentialgleichungen heißt die *Streifenbedingung*. Sie bringt zum Ausdruck, daß durch die Funktionen $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$, $p(s)$, $q(s)$ nicht nur eine Raumkurve, sondern zugleich eine in jedem ihrer Punkte berührende Ebene definiert ist. Man nennt ein Gebilde, welches aus einer Kurve und aus einer Schar von Tangentialebenen dieser Kurve besteht, einen *Streifen*. Dies System der drei gewöhnlichen Differentialgleichungen (3) und die Relation $F(x, y, u, p, q) = 0$ für die fünf Funktionen x, y, u, p, q in ihrer Abhängigkeit von s stellt ein unterbestimmtes System dar. Jede Lösung dieses Systems liefert einen sogenannten *Fokalstreifen*[1].

Der Kern unserer Theorie beruht nun auf folgender Überlegung: Auf jeder Integralfläche $u(x, y)$ muß es Fokalkurven geben; denn in jedem Punkte berührt die Integralfläche einen Mongeschen Kegel, enthält also eine charakteristische Richtung und dieses charakteristische Richtungsfeld liefert auf der Integralfläche zugehörige Fokalkurven als

[1] Um die vier Bedingungen für einen Fokalstreifen zu einem vollständigen System zu ergänzen, können wir noch eine willkürliche Relation zwischen x, y, u vorschreiben, also für die Fokalkurve Lage auf einer vorgegebenen Fläche verlangen. (Der Streifen wird allerdings im allgemeinen die Fläche nicht berühren.) Man erkennt dann leicht, daß es im allgemeinen eine einparametrige Schar von Fokalkurven auf einer vorgegebenen Fläche gibt.

Bahnkurven. Wir zeigen: Die Forderung, eine Fokalkurve soll in eine Integralfläche $u = u(x, y)$ eingebettet sein, führt zu zwei weiteren gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Größen p und q als Funktionen von s.

In der Tat, gehen wir von einer bestimmten Integralfläche $u = u(x, y)$ aus, auf welcher demgemäß durch $p = u_x$ und $q = u_y$ auch die Größen p und q gegeben sind, so wird durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \qquad \frac{dy}{ds} = F_q$$

auf der Integralfläche eine einparametrige Schar von Kurven definiert. Längs dieser Kurven wird jedenfalls

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds},$$

also

$$\frac{du}{ds} = p F_p + q F_q.$$

Unsere Kurven auf der Integralfläche bilden mithin eine Schar Mongescher Kurven und erzeugen die Integralfläche. Nun erhalten wir aus der partiellen Differentialgleichung durch Differentiation nach x bzw. nach y die auf unserer Integralfläche in x, y identisch bestehende Relation

$$F_p p_x + F_q q_x + F_u p + F_x = 0$$
$$F_p p_y + F_q q_y + F_u q + F_y = 0.$$

Betrachten wir jetzt eine unserer Mongeschen Kurven mit dem Parameter s, so gehen diese beiden letzten Gleichungen vermöge $F_p = \frac{dx}{ds}$, $F_q = \frac{dy}{ds}$, $p_y = q_x$ sofort über in die Relationen

$$\frac{dp}{ds} + F_u p + F_x = 0, \qquad \frac{dq}{ds} + F_u q + F_y = 0$$

längs der betreffenden Mongeschen Kurven. Wenn also eine Mongesche Kurve auf einer Integralfläche eingebettet ist, so genügen die Koordinaten x, y, u ihrer Punkte und die Größen p und q längs ihr einem System von fünf gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} = F_p, \qquad \frac{dy}{ds} = F_q, \qquad \frac{du}{ds} = p F_p + q F_q \\ &\frac{dp}{ds} = -(p F_u + F_x), \qquad \frac{dq}{ds} = -(q F_u + F_y). \end{aligned} \tag{4}$$

Das System dieser Differentialgleichungen heißt das zur Gleichung (1) gehörige *charakteristische Differentialgleichungssystem*.

Wir kehren nun den Zusammenhang um, indem wir davon absehen, daß dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem aus der Betrachtung einer als vorhanden angenommenen Integralfläche gewonnen wurde; wir nehmen vielmehr das System ohne Bezugnahme auf Lösungen von (1)

zum Ausgangspunkt. Es definiert dann, da im Parameter s eine additive Konstante unerheblich ist, eine *vierparametrige Schar von Kurven.* $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$ mit zugehörigen Tangentialebenen $p(s)$, $q(s)$, d. h. eine Schar von Streifen.

Wir bemerken: *Die Funktion F ist ein Integral unseres charakteristischen Differentialgleichungssystems*; d. h. längs jeder Lösung dieses Systems hat F einen konstanten Wert[1]. In der Tat gilt für eine solche Lösung

$$\frac{dF}{ds} = F_p \frac{dp}{ds} + F_q \frac{dq}{ds} + F_u \frac{du}{ds} + F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds}$$

und der Ausdruck rechts wird vermöge der charakteristischen Differentialgleichungen identisch in s gleich Null.

Wir wollen nun aus der vierparametrigen Schar der Lösungen der charakteristischen Differentialgleichungen eine dreiparametrige Schar durch die Bedingung heraussondern, daß F auf diesen Lösungen nicht einen beliebigen konstanten Wert, sondern der Ausgangsdifferentialgleichung gemäß den Wert Null besitzt[2]. *Jede Lösung der charakteristischen Differentialgleichungen, welche außerdem noch der Gleichung $F = 0$ genügt, wollen wir einen „charakteristischen Streifen" nennen; die einen solchen Streifen tragende Raumkurve $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$ heißt charakteristische Kurve.*

Wie im quasilinearen Falle folgen aus der Herleitung der charakteristischen Differentialgleichungen die Sätze: *Auf jeder Integralfläche gibt es eine einparametrige Schar charakteristischer Kurven und zugehöriger charakteristischer Streifen.* Ferner: *Wenn ein charakteristischer Streifen ein Element, d. h. Werte x, y, u, p, q mit einer Integralfläche gemeinsam hat, dann gehört der Streifen gänzlich der betreffenden Integralfläche an.*

Die wichtigste Erkenntnis in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist nun, daß das Integrationsproblem unserer partiellen Differentialgleichung (1) äquivalent ist mit dem Integrationsproblem des charakteristischen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (4): D. h. man kann die Integration der partiellen Differentialgleichung (1) auf die des charakteristischen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückführen.

2. Lösung des Anfangswertproblems. Zum Beweise wollen wir analog zu §§ 1 und 2 die Integralflächen mit Hilfe der charakteristischen Streifen aufbauen. Wir stellen für unsere partielle Differentialgleichung wiederum das *Anfangswertproblem*, und zwar zweckmäßigerweise in der folgenden Form: Mit Hilfe eines Parameters t sei durch die Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $p(t)$, $q(t)$ ein *Anfangsstreifen* C_1 mit doppelpunktfreier Projektion C_0 gegeben, derart daß

[1] Zu dieser Bedeutung des Wortes „Integral", welche nicht mit der Bedeutung: Integral gleich Lösung verwechselt werden darf, vgl. Kap. I, § 5, S. 24.

[2] Ohne diese Einschränkung würden wir gleichzeitig alle Differentialgleichungen $F =$ konst. zu betrachten haben.

1. die Streifenrelation

$$\frac{du}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}$$

2. $F=0$ identisch in t besteht.

Ein solcher Streifen C_1 heißt ein *Integralstreifen*[1]. Das Anfangsproblem besteht nun darin, in Umgebung von C_0 eine Funktion $u(x, y)$ zu finden, die dort der Differentialgleichung genügt und samt $p=u_x$, $q=u_y$ auf C_0 die vorgegebenen Werte annimmt, also den Anfangsstreifen C_1 enthält.

Wir denken uns nun zur Lösung des Anfangswertproblems durch jedes Anfangselement dieses vorgegebenen Streifens den charakteristischen Streifen mit s als laufenden Parameter gelegt; d. i. eine Lösung der charakteristischen Differentialgleichungen (4), welche für $s=0$ in $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $p(t)$, $q(t)$ übergeht. Dieses Lösungssystem bezeichnen wir mit

$$x(s, t),\ y(s, t),\ u(s, t),\ p(s, t),\ q(s, t).$$

Wiederum ist durch bekannte Sätze über gewöhnliche Differentialgleichungen die eindeutige Bestimmtheit dieser Lösungen und ihre stetig differenzierbare Abhängigkeit von s und vom Parameter t gesichert. Wenn der Ausdruck

$$\Delta = F_p y_t - F_q x_t = x_s y_t - x_t y_s \tag{5}$$

längs unseres Anfangsstreifens und also auch in einer gewissen s, t-Umgebung desselben von Null verschieden ist, so können wir in dieser Umgebung statt der Parameter t und s die Größen x und y als unabhängige Veränderliche einführen, also die Größen u, p, q als Funktionen von x und y ausdrücken; insbesondere erhalten wir eine Fläche $u(x, y)$. Wir behaupten, daß auf dieser Fläche $p=u_x$ und $q=u_y$ wird und daß die Fläche eine Integralfläche ist, mithin unser Anfangswertproblem löst.

Die letzte Tatsache versteht sich von selbst, sobald auf unserer Fläche die Relationen $p=u_x$, $q=u_y$ feststehen; denn da F Integral des Gleichungssystems (2) ist, so verschwindet wegen der zweiten Anfangsbedingung längs unserer Fläche sicherlich die Größe $F(x, y, u, p, q)$ identisch in s und t, also auch in x und y.

Um nun die Relation $p=u_x$ und $q=u_y$ zu verifizieren, brauchen wir lediglich zu zeigen, daß die beiden Größen

$$\begin{aligned} U &= u_t - p\,x_t - q\,y_t \\ V &= u_s - p\,x_s - q\,y_s \end{aligned} \tag{6}$$

[1] Man könnte bei der Problemstellung auch zunächst nur die Anfangskurve C als vorgegeben betrachten und durch die Streifenrelation sowie die Gleichung $F=0$ die Anfangsgrößen p und q hinzubestimmt denken; jedoch ist die hier gewählte Form des Anfangswertproblemes vorzuziehen, weil dabei die für das eigentliche Problem unwesentliche Diskussion der sich für p und q ergebenden Gleichungen vermieden wird.

auf unserer Fläche identisch verschwinden; denn sicherlich gelten die Relationen

$$(7)\qquad \begin{aligned} 0 &= u_t - u_x x_t - u_y y_t \\ 0 &= u_s - u_x x_s - u_y y_s ; \end{aligned}$$

da die Determinante $x_t y_s - x_s y_t = \Delta$ dieses linearen Gleichungssystems für u_x, u_y nach Voraussetzung nicht verschwindet, so folgt alsdann aus $U = V = 0$ und (7) sofort $p = u_x$, $q = u_y$.

Das Verschwinden der Größe V ist eine unmittelbare Aussage der charakteristischen Differentialgleichungen. Um das Verschwinden von U zu beweisen, fassen wir U, ebenso wie V, als Funktionen von s und t auf. Wir gehen aus von der Identität

$$\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial V}{\partial t} = -(p_s x_t - p_t x_s + q_s y_t - q_t y_s).$$

Berücksichtigen wir jetzt die charakteristischen Differentialgleichungen (4) und benutzen wir, daß aus dem identischen Verschwinden von V auch $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ folgt, so ergibt sich

$$\frac{\partial U}{\partial s} = p_t F_p + q_t F_q + (p x_t + q y_t) F_u + F_x x_t + F_y y_t .$$

Andererseits folgt aus der identisch in s, t erfüllten Relation $F = 0$ durch Differentiation nach t

$$p_t F_p + q_t F_q + u_t F_u + x_t F_x + y_t F_y = 0,$$

somit

$$(8)\qquad \frac{\partial U}{\partial s} = -F_u U.$$

Diese Gleichung stellt bei festem t eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung für U als Funktion von s dar. Da U für $s = 0$ nach Voraussetzung verschwindet, so ist wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung[1] für $U(s)$ durch den Anfangswert $U(0)$ die Größe U für alle Werte von s Null. Die gewünschte Verifikation ist damit geleistet. Wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen durch die Anfangsbedingungen ist die durch unsere Konstruktion gelieferte Integralfläche eindeutig festgelegt.

Wir können so unser Resultat folgendermaßen zusammenfassen: *Ist* $C: x = x(t),\ y = y(t),\ u = u(t)$ *eine vorgegebene Raumkurve, die durch* $p(t)$, $q(t)$ *zu einem der Streifenrelation und der Relation* $F = 0$ *genügenden Anfangsstreifen* C_1: x, y, u, p, q *ergänzt wird, und ist längs dieses*

[1] Oder wegen

$$U(s) = U(0)\, e^{-\int F_u ds}$$

Streifens $\Delta = F_p\, y_t - F_q\, x_t \neq 0$, *so gibt es in einer Umgebung durch diesen Anfangsstreifen eine und nur eine Integralfläche* $u(x, y)$.

3. Charakteristiken als Verzweigungselemente. Ergänzende Bemerkungen. Integralkonoid. Wir haben uns noch über die Bedeutung des durch die Gleichung $\Delta = 0$ charakterisierten Ausnahmefalles klar zu werden. Gilt für einen Streifen C_1, welcher auf einer Integralfläche $u(x, y)$ liegen soll, überall $F_p y_t - F_q x_t = 0$, so muß C_1 nach den Ausführungen von S. 65 ein charakteristischer Streifen auf dieser Integralfläche sein. Im Ausnahmefall $\Delta = 0$ kann daher durch die Kurve C nur dann eine Integralfläche gehen, wenn die Kurve C charakteristisch ist, d. h. wenn die durch die Bedingungen 1. und 2. hinzubestimmten Funktionen p und q diese Kurve zu einem charakteristischen Streifen ergänzen. Ist diese Bedingung erfüllt, dann gibt es durch den Anfangsstreifen wiederum nicht nur eine, sondern unendlich viele Integralflächen, die sich daher längs dieses Anfangsstreifens berühren. In der Tat, betrachten wir eine Kurve C', welche die Kurve C schneidet und welche zu einem Anfangsstreifen so ergänzt ist, daß dieser Anfangsstreifen in dem gemeinsamen Punkte auch den charakteristischen Streifen zu C berührt, dann wird das Anfangswertproblem durch C' eine Integralfläche ergeben, welche den ganzen zu C gehörigen charakteristischen Streifen enthält, da ja diese Integralfläche mit dem charakteristischen Streifen ein Element gemeinsam hat.

Die charakteristischen Kurven auf einer Integralfläche sind also Linien, längs denen sich verschiedene Integralflächen berühren. Man kann daher diese Kurven bzw. Streifen als *Verzweigungselemente von Integralflächen* betrachten. Bei Überschreiten einer solchen Linie kann man, ohne die Bedingung der Stetigkeit der ersten Ableitungen von u zu verletzen, statt auf der ursprünglichen Integralfläche auch auf irgendeiner anderen der dort sich berührenden Schar weitergehen.

Zusammenfassend hat man die folgenden zwei Fälle für das Anfangswertproblem: *Gilt* $\Delta \neq 0$ *für den Anfangsstreifen* C_1, *so ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar. Gilt jedoch* $\Delta = 0$ *längs* C_1, *so ist das Anfangswertproblem nur lösbar, wenn der Anfangsstreifen* C_1 *charakteristisch ist; es gibt dann unendlich viele Lösungen.*

Zum Schluß noch eine weitere Bemerkung über den Ausnahmefall $\Delta = 0$. Wenn der Anfangsstreifen C der weiteren Bedingung, charakteristisch zu sein, nicht genügt, so ist C_1, wie man sofort sieht, lediglich ein Fokalstreifen; es kann dann keine Lösung des Anfangswertproblems durch C_1 geben, *d. h. keine Integralfläche, welche diesen Anfangsstreifen enthält und in seiner Umgebung stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt.* Wohl aber ist es denkbar, daß es eine Integralfläche gibt, für welche C singuläre Linie ist. In der Tat: Wenn wir durch jedes x, y, u, p, q-Element von C_1 als Anfangselement den charakteristischen Streifen ziehen, so zeigt genau dieselbe Diskussion wie früher,

daß diese Streifen bzw. ihre Kurven eine Integralfläche bilden, wenn sie nicht — im Falle eines charakteristischen C_1 — alle zusammenfallen.

Auf diesen Integralflächen müssen die Kurven C singulär sein und als *Enveloppen* der die Fläche erzeugenden charakteristischen Kurven erscheinen. Wir dürfen erwarten, daß sie *Rückkehrkanten der Integralflächen* sind. Diese Tatsachen werden wir an Hand von Beispielen bestätigen (vgl. § 6 und das in § 1 für den Fall quasilinearer Differentialgleichungen diskutierte Beispiel). In der Theorie der Lichtausbreitung werden sich die *Charakteristiken als Lichtstrahlen* erweisen; daher erscheinen dann die *Brennlinien* dieser Strahlen als *Fokalkurven*, was deren Bezeichnung rechtfertigt.

Wir heben noch einen besonderen Grenzfall des Anfangswertproblems hervor, nämlich den Fall, daß die Anfangskurve sich auf einen Punkt zusammenzieht. Genau dieselben Überlegungen wie oben führen zu folgendem Ergebnis: *Die Gesamtheit der charakteristischen Kurven durch einen festen Punkt P des x, y, u-Raumes bildet eine Integralfläche.* Diese Integralfläche, welche im Punkte P eine kegelartige Singularität (mit dem Mongeschen Kegel als Tangentialkegel) hat, heißt das *Integralkonoid der partiellen Differentialgleichung* in P. Es spielt in der Theorie der Lichtausbreitung als Lichtkegel, wie sich später zeigen wird, eine besonders wichtige Rolle.

Endlich noch eine Bemerkung über die wesentliche Verschiedenheit der Verhältnisse beim quasilinearen und beim allgemeinen nichtlinearen Falle — dieselbe Bemerkung gilt übrigens entsprechend auch bei n unabhängigen Veränderlichen —: Im linearen und quasilinearen Fall kann man sich mit den charakteristischen Kurven begnügen, welche eine zweiparametrige bzw. n-parametrige Schar bilden, um die Lösung zu konstruieren. Beim allgemeinen Falle ist man jedoch zu dem Zweck genötigt, durch Hinzunahme der Tangentialgrößen p, q, zu charakteristischen Streifen überzugehen, deren Trägerkurven charakteristische Kurven sind. Diese Streifen bilden aber nunmehr eine dreiparametrige (bzw. $2n-1$-parametrige) Schar, und dasselbe gilt dann im allgemeinen auch für ihre charakteristischen Trägerkurven.

§ 4. Zusammenhang mit der Theorie des vollständigen Integrals.

Wir haben früher in Kap. I, § 4, Nr. 2 gesehen, daß wir mit Hilfe eines vollständigen, von zwei Parametern a und b abhängigen Integrals $u=\varphi(x, y, a, b)$ der Differentialgleichung $F=0$ eine von einer willkürlichen Funktion abhängige Menge von Lösungen der Differentialgleichung durch den Prozeß der Enveloppenbildung erhielten, indem wir $b=w(a)$ setzten und aus den beiden Gleichungen

$$u=\varphi(x, y, a, w(a))$$
$$0=\varphi_a+\varphi_b w'(a)$$

die Größe a eleminiert dachten. Diese beiden Gleichungen geben uns eine Darstellung der noch von dem Parameter a abhängigen Berührungskurven der Schar mit ihrer Enveloppe. Da die Funktion $w(a)$ so gewählt werden kann, daß sie an einer bestimmten Stelle a einen beliebigen Wert b und die Ableitung $w'(a)$ einen beliebigen Wert c erhält, so stellen die beiden Gleichungen

(1) $\quad u = \varphi(x, y, a, b), \qquad$ (1a) $\quad 0 = \varphi_a + c\,\varphi_b$

eine von den drei Parametern a, b, c abhängige Kurvenschar dar, welche als Berührungskurven bei der Enveloppenbildung auftreten können.

Wir zeigen nun: *Die durch die Gleichungen* (1) *dargestellten Kurvenscharen sind charakteristische Kurven unserer Differentialgleichung.* Es müssen dann von selbst die zugehörigen durch $p = \varphi_x\,(x, y, a, b)$, $q = \varphi_y\,(x, y, a, b)$ gelieferten Streifen charakteristische Streifen sein.

Der Beweis folgt anschaulich sofort aus der Tatsache, daß sich längs unserer Kurve zwei verschiedene Integralflächen berühren, was, wie wir in § 4 gesehen haben, nur längs eines charakteristischen Streifens möglich ist.

Im übrigen ist die Behauptung leicht durch direkte Rechnung zu bestätigen. Betrachten wir etwa x statt s als unabhängige Veränderliche längs unserer Kurve, so folgt durch Differentiation nach x aus der Gleichung (1a)

$$0 = \varphi_{ax} + c\,\varphi_{bx} + y_x(\varphi_{ay} + c\,\varphi_{by}), \tag{2}$$

während die Differentiation der Differentialgleichung $F = 0$ für $u = \varphi\;(x, y, a, b)$ nach a bzw. b die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_u\,\varphi_a + F_p\,\varphi_{ax} + F_q\,\varphi_{ay} &= 0 \\ F_u\,\varphi_b + F_p\,\varphi_{bx} + F_q\,\varphi_{by} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ergibt. Durch Multiplikation der zweiten dieser Gleichungen mit c und Addition zur ersten gewinnen wir nunmehr wegen (1) und (2), unter der Voraussetzung $F_p \neq 0$, die Gleichung $F_p\,y_x - F_q = 0$, welche unsere Kurven nach den Überlegungen von S. 65 sofort als charakteristische Kurven kennzeichnet. Hierbei ist, wie nochmals hervorgehoben werde,

$$F_p^2 + F_q^2 \neq 0$$

im betrachteten Bereich vorausgesetzt.

Unsere beiden Gleichungen liefern uns also, sobald ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung bekannt ist, eine dreiparametrige Schar von charakteristischen Kurven bzw. Streifen; daß wir hier eine Darstellung durch die unabhängige Veränderliche x statt der symmetrischen durch einen Parameter s gewählt haben, ist belangslos. Wir haben somit den in § 3 behandelten Zusammenhang umgekehrt, nämlich die *Lösungen der charakteristischen Differentialgleichungen aus einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung gewonnen.*

In § 7 werden wir auf diesen dem ursprünglichen entgegengesetzten Gesichtspunkt nochmals ausführlich zurückkommen.

Daß wir auf diese Weise alle Charakteristiken bzw. alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung gewinnen, folgt sofort, wenn wir voraussetzen, daß man für jede vorgelegte Integralfläche, für welche $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$ ist, zu jedem Punkte ein dort berührendes Individuum der Schar $u = \varphi(x, y, a, b)$ hinzubestimmen kann.

Endlich noch eine Bemerkung über die Rolle der singulären Lösung. Wir erhalten diese nach Kap. I, § 4, Nr. 3 durch Bildung der Enveloppe der zweiparametrigen Schar $u = \varphi(x, y, a, b)$, bzw. ohne Bezugnahme auf ein spezielles vollständiges Integral durch Elimination von p und q aus den Gleichungen

$$F = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0.$$

Für eine singuläre Lösung werden alle Betrachtungen des § 4 hinfällig, da stets auf unseren Integralflächen das Bestehen der Relation $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$ vorausgesetzt war. Der Ausnahmecharakter der singulären Lösung kommt unter anderem auch darin zum Ausdruck, daß auf ihr die charakteristische Anfangsbedingung

$$\Delta = F_p \frac{dy}{dt} - F_q \frac{dx}{dt} = 0$$

identisch erfüllt ist, wie auch immer wir eine Anfangsmannigfaltigkeit auf ihr wählen. In diesem Sinne ist jeder auf der singulären Lösung gelegene Anfangsstreifen charakteristisch.

§ 5. Fokalkurven und Mongesche Gleichung.

Auf S. 64 hatten wir die Fokalkurven durch das Differentialgleichungssystem (3) dargestellt, wobei die Größen p, q noch der Nebenbedingung $F(x, y, u, p, q) = 0$ unterworfen waren. Führt man unter der Annahme $F_p \neq 0$ statt s einfach x als Parameter auf den Kurven ein, so erhält man die drei Gleichungen

$$(1) \qquad F = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{F_q}{F_p}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{pF_p + qF_q}{F_p}.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen p und q, so gelangt man zu einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung in den zwei Unbekannten y und u

$$(2) \qquad M\left(x, y, u, \frac{dy}{dx}, \frac{du}{dx}\right) = 0.$$

Diese Gleichung heißt die *Differentialgleichung von* MONGE. Sie ist das einfachste *Beispiel eines unterbestimmten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen* und stellt die Bedingung für die Seitenrichtungen des Mongeschen Kegels im Punkte (x, y, u) dar, während die Gleichung $F = 0$ dual hierzu die Abhängigkeit zwischen dessen Tangentialebenen gab. (Hätte man statt x den Parameter s auf den Fokalkurven beibehalten,

so würde die Kegelgleichung von der Form

$$(2') \qquad M\left(x, y, u, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{du}{ds}\right) = 0$$

sein, wo M homogen in den letzten drei Variablen ist.)

Wir können auch umgekehrt zu einer gegebenen Mongeschen Gleichung $M(x, y, u, y', u') = 0$ eine zugehörige partielle Differentialgleichung konstruieren, und zwar indem wir aus der Gleichung $M = 0$ und den beiden Gleichungen

$$q = -\frac{M_{y'}}{M_{u'}} \qquad p = \frac{y' M_{y'} + u' M_{u'}}{M_{u'}}$$

die Größen y', u' eliminieren, wobei sich als Resultat die Gleichung $F(x, y, u, p, q)$ ergibt. (Übergang zur Tangentialdarstellung des Mongeschen Kegels in (x, y, u).) Eine Mongesche Gleichung, d. h. eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei unbekannten Funktionen, und eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen repräsentieren dieselben geometrischen Gebilde, einmal erzeugt durch Flächenelemente (partielle Differentialgleichung) und zweitens durch Linienelemente (Mongesche Gleichung).

Die Lösungen der Mongeschen Gleichung, die Fokalkurven, sind, abgesehen von den charakteristischen Kurven, solche Kurven, welche in jedem Punkte von einer charakteristischen Kurve berührt werden. Aus den Betrachtungen von § 3, 3 entnehmen wir, daß wir diese Fokalkurven erhalten, indem wir zu einer Integralfläche der Differentialgleichung $F = 0$ die Enveloppe der auf ihr liegenden charakteristischen Kurven bilden (falls es eine gibt).

Diese Bemerkung führt zu einer bemerkenswerten Auflösungstheorie der Mongeschen Gleichungen. An sich erfordert die Bestimmung von u und y aus der Mongeschen Gleichung zuerst die willkürliche Festlegung irgendeiner weiteren Beziehung $W(x, y, u) = 0$ und sodann Integration einer gewöhnlichen durch Elimination von u oder y entstehenden Differentialgleichung erster Ordnung, d. h. also unendlich viele solche Integrationsprozesse. Irgendeine Darstellung der Lösungsgesamtheit der Mongeschen Gleichung (2) mittels einer willkürlichen Funktion kommt so nicht zustande. Es ist nun jedoch möglich, vom vollständigen Integral aus eine mit einer willkürlichen Funktion behaftete explizite Lösung der Mongeschen Gleichung zu geben, welche keinerlei Integrationsprozesse mehr enthält. Zu dieser *integrallosen Lösung* der Mongeschen Gleichung gelangen wir, indem wir annehmen, $u = \varphi(x, y, a, b)$ sei ein bekanntes vollständiges Integral der zur Mongeschen Gleichung äquivalenten partiellen Differentialgleichung. Wir haben dann zu den beiden Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} u = \varphi(x, y, a, w(a)) \\ 0 = \varphi_a(x, y, a, w(a)) + \varphi_b(x, y, a, w(a))\, w'(a), \end{cases}$$

die die zum Parameter a gehörige charakteristische Kurve auf der durch $b = w(a)$ bestimmten Integralfläche geben (vgl. S. 71), noch die weitere durch Differentiation nach a entstehende Gleichung

$$0 = \varphi_{aa} + 2\,\varphi_{ab} w'(a) + \varphi_{bb} w'^2(a) + \varphi_b w''(a) \tag{4}$$

hinzuzufügen. Diese drei Gleichungen stellen eine Raumkurve mit Hilfe des Parameters a dar, und zwar eine Enveloppe von Charakteristiken. Sie liefern die gewünschte Lösung, sobald wir aus ihnen durch Elimination u und y als Funktionen von x ausgedrückt denken.

§ 6. Beispiele.

Wir wollen die entwickelte Theorie an einer Reihe von — zum Teil auch an sich wichtigen — Beispielen erläutern.

1. Die Differentialgleichung (grad u)$^2 = 1$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_x^2 + u_y^2 = 1 \tag{1}$$

bzw. die Gleichung

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1 \tag{2}$$

für eine Funktion $u(x, y, z)$, welche ausdrückt, daß der absolute Betrag des Gradienten der Funktion u den Wert 1 hat.

Diese Differentialgleichungen haben durch ihre Bedeutung für die geometrische Optik auch an sich Interesse. Denn die Lösungen u beschreiben mögliche Zustände einer Lichtausbreitung in einem homogenen Medium, wobei die Flächen $u =$ konst. die *Wellenfronten*, die Charakteristiken die *Lichtstrahlen* sind. Allgemein beschreibt übrigens die Differentialgleichung

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = n(x, y, z) \tag{3}$$

die Lichtausbreitung in einem inhomogenen Medium mit dem vom Orte abhängigen Brechungsindex $n(x, y, z)$.

Wir behandeln zunächst den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen, für welche wir schon in Kap. I, § 3 das vollständige Integral

$$u = a x + \sqrt{1 - a^2}\, y + b \tag{4}$$

und durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} u &= a x + \sqrt{1 - a^2}\, y + w(a) \\ 0 &= x - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\, y + w'(a) \end{aligned}\right. \tag{4'}$$

eine noch eine willkürliche Funktion enthaltende Lösung gewonnen haben. Die beiden Gleichungen

$$u = a x + \sqrt{1 - a^2}\, y + b$$
$$0 = x - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\, y + c$$

und die zugehörigen Relationen

$$p = a, \qquad q = \sqrt{1-a^2}$$

geben uns die von den 3 Parametern a, b, c abhängige Schar der charakteristischen Streifen, längs deren wir etwa x als unabhängige Veränderliche ansehen. Wir erkennen, daß die charakteristischen Kurven, die „Lichtstrahlen" gerade Linien sind und daß längs dieser ganzen Geraden die zugehörige Tangentialebene fest bleibt, und zwar haben sowohl die charakteristischen Geraden als auch die zugehörigen Ebenen gegen die x, y-Ebene eine Neigung von 45° und sind hierdurch gekennzeichnet. Der Mongesche Kegel im Punkte x_0, y_0, u_0 lautet offenbar

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (u-u_0)^2.$$

Die charakteristischen Differentialgleichungen, welche durch die obige Relation gelöst werden, können wir in der folgenden Proportion schreiben

$$(5) \qquad dx : dy : du : dp : dq = p : q : 1 : 0 : 0$$

und selbstverständlich auch sofort direkt integrieren: es ist

$$p = p_0, \quad q = q_0, \quad u = s + s_0, \quad x = p_0 s + x_0, \quad y = y_0 s + q_0,$$

wobei mit x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 die betreffenden Anfangswerte für den Parameterwert $s = 0$ bezeichnet sind.

Die Mongesche Gleichung für die Funktionen $u(x)$ und $y(x)$, die zu unserer partiellen Differentialgleichung gehört, gewinnen wir durch Elimination von p und q aus $p^2 + q^2 = 1$, $y' = \frac{q}{p}$, $u' = \frac{1}{p}$. Sie lautet

$$(6) \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$$

Ihre Lösungen sind diejenigen Kurven, deren Tangenten überall gegen die x, y-Ebene den Neigungswinkel von 45° besitzen. Wir können diese *Fokalkurven* oder „*Brennlinien*" integrallos mit Hilfe einer willkürlichen Funktion $w(a)$ folgendermaßen[1] darstellen:

$$(7) \qquad \begin{aligned} u &= ax + \sqrt{1-a^2}\, y + w(a) \\ 0 &= x - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\, y + w'(a) \\ 0 &= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}^3}\, y + w''(a). \end{aligned}$$

Wir können vermittels dieser Fokalkurven die Lösungen der Differentialgleichung (1) — abgesehen von den Ebenen (4) und den Integralkonoiden, d. h. den geradlinigen Kreiskegeln, deren Erzeugende gegen die x, y-Ebene um 45° geneigt sind — als abwickelbare Tangentenflächen kennzeichnen, deren Rückkehrkante eine Fokalkurve ist, also

[1] Es sei als Aufgabe gestellt, diese Darstellung durch Rechnung direkt zu verifizieren.

eine Kurve, deren Tangenten mit der x, y-Ebene stets den Winkel 45° einschließen.

Die Lösungen von (1) besitzen noch eine andere wichtige geometrische Bedeutung. Wir betrachten die Kurvenschar $u(x, y) = c =$ konst. in der x, y-Ebene und behaupten: *Der Wert der Funktion $u(x, y)$ in einem Punkte der Ebene ist gleich dem Abstand dieses Punktes von der Kurve $u(x, y) = 0$.* Die Kurven $u(x, y) = c$ sind zu dieser Kurve äquidistante Parallelkurven im Abstand c; die orthogonalen Trajektorien zu der Kurvenschar sind gerade Linien (nämlich die Projektionen unserer charakteristischen Kurven) und die Enveloppe dieser geraden Linien, die gemeinsame Evolute der Kurven $u =$ konst. ist die Projektion der Rückkehrkante, d. h. der Fokalkurven.

Der Beweis dieser Tatsache ergibt sich z. B., indem wir für eine gegebene Anfangskurve $G(x_0, y_0) = 0$ das Anfangswertproblem lösen, wobei längs dieser Kurve als Anfangsbedingung $u = 0$ vorgeschrieben wird. Um die Lösung nach der Charakteristikenmethode aufzubauen, betrachten wir die durch die Punkte x_0, y_0 gehenden Charakteristiken, bzw. ihre Projektionen $x = p_0 s + x_0$, $y = q_0 s + y_0$, $u = s$. Wegen $p_0^2 + q_0^2 = 1$ bedeutet s die Entfernung des Punktes x, y auf diesen geraden Linien vom Punkte x_0, y_0. Zur Bestimmung von p_0 und q_0 beachten wir, daß aus der Anfangsbedingung, wenn wir etwa längs der Anfangskurve x_0 als unabhängigen Parameter ansehen, $\frac{d u_0}{d x_0} = p_0 + q_0 \frac{d y_0}{d x_0}$ folgt. Es wird also $p_0 G_{y_0} - q_0 G_{x_0} = 0$. Somit steht die obige charakteristische Projektionsgerade orthogonal auf der Anfangskurve. Es ist also u — wenigstens in einer hinreichend kleinen Umgebung der Anfangskurve — tatsächlich der Abstand des Punktes x, y von dieser Kurve. Daß jede Kurve $u =$ konst. wiederum orthogonal zu unseren Geraden stehen, folgt unmittelbar aus den obigen Betrachtungen.

Eine etwas andere Wendung des Beweises ergibt sich, wenn wir von dem Problem ausgehen, die orthogonalen Trajektorien zu den als gegeben betrachteten Kurven $u =$ konst. zu finden. Sie werden durch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\text{(8)} \qquad \frac{dx}{ds} = u_x, \qquad \frac{dy}{ds} = u_y$$

charakterisiert, aus denen sich durch Quadrieren und Addieren sofort

$$\text{(9)} \qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

ergibt; s bedeutet also die Bogenlänge auf den Trajektorien. Indem wir ferner etwa die erste der Differentialgleichungen (8) nach s differenzieren und rechts wieder die Differentialgleichungen (8) berücksichtigen, gelangen wir zu der Gleichung $\frac{d^2 x}{d s^2} = u_{xx} u_x + u_{xy} u_y$. Die rechte Seite aber ist identisch Null, wie sich durch Differentiation der

partiellen Differentialgleichung nach x ergibt, ebenso folgt $\frac{d^2 y}{d s^2} = 0$; die Trajektorien sind also gerade Linien.

In genau derselben Weise erkennt man für 3 unabhängige Veränderliche, daß die Lösungen der partiellen Differentialgleichung (2) durch eine Schar äquidistanter Flächen $u(x, y, z) =$ konst. gegeben wird, die zu einer willkürlichen Anfangsfläche $G(x, y, z) = 0$ parallel sind. Diese Flächen besitzen geradlinige orthogonale Trajektorien, und das Stück dieser geraden Linien zwischen den Flächen $u = c_1$ und $u = c_2$ besitzt die konstante Länge $c_1 - c_2$; u selbst ist der Abstand des Punktes x, y, z von der Anfangsfläche.

2. $F(u_x, u_y) = 0$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$p \cdot q = \tfrac{1}{2}. \qquad (p = u_x,\ q = u_y)^{\dagger} \tag{10}$$

Die äquivalente Mongesche Gleichung für $y(x)$ und $u(x)$ lautet

$$u'^2 = 2y'. \tag{11}$$

Ein vollständiges Integral, das alle Flächenelemente der Differentialgleichung enthält, ist

$$u = ax + \frac{1}{2a} y + b. \tag{12}$$

Hieraus entsteht die von einer willkürlichen Funktion $w(a)$ abhängige Familie von Lösungen

$$\begin{cases} u = ax + \dfrac{1}{2a} y + w(a) \\ 0 = x - \dfrac{1}{2a^2} y + w'(a) \end{cases} \tag{13}$$

nach Elimination von a; durch Hinzunahme von

$$0 = \frac{1}{4a^3} y + w''(a) \tag{13'}$$

erhalten wir endlich die integrallose Darstellung der Fokalkurven mit Hilfe einer willkürlichen Funktion w.

Die Gesamtheit der Charakteristiken wird durch die Gleichungen

$$u = ax + \frac{1}{2a} y + b$$

$$0 = x - \frac{1}{2a^2} y + c$$

mit den drei Parametern a, b, c und etwa x als unabhängiger Veränderlichen geliefert. Die charakteristischen Gleichungen lauten

$$dx : dy : du : dp : dq = q : p : 1 : 0 : 0. \tag{14}$$

---

† Durch die Transformation (Drehung) $\xi = u$, $\eta = \frac{x - y}{\sqrt{2}}$, $\omega = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$ geht unsere Differentialgleichung in die Differentialgleichung $\omega_\xi^2 - \omega_\eta^2 = 1$ für $\omega(\xi, \eta)$ über, die ähnlich wie die in Nr. 1 behandelt werden kann.

Die Charakteristiken sind also wiederum gerade Linien und die zugehörigen Tangentialebenen bleiben längs der ganzen Geraden fest, wobei $p\,q = \frac{1}{2}$ ist. Die charakteristischen Geraden werden daher durch die Gleichungen

$$(15) \qquad y = \frac{p_0}{q_0}\,x + y_0, \qquad u = \frac{1}{q_0}\,x + u_0$$

gegeben.

Wir lösen schließlich das Anfangswertproblem, für die Anfangswerte $u(0, y_0) = u_0 = v(y_0)$, die in der Ebene $x = 0$ willkürlich vorgegeben seien. Es ergibt sich sofort

$$q(0, y_0) = v'(y_0), \qquad p(0, y_0) = \frac{1}{2\,v'(y_0)};$$

wir haben somit in den Gleichungen

$$(16) \qquad \begin{aligned} u &= \frac{1}{v'(y_0)}\,x + v(y_0) \\ y &= \frac{1}{2\,v'(y_0)^2}\,x + y_0 \end{aligned}$$

die Lösung des Anfangswertproblems, wobei wir aus der zweiten Gleichung y_0 durch x und y ausgedrückt und in die ersten eingesetzt denken müssen. Ein Vergleich mit der oben gefundenen Lösung

$$(13) \qquad \begin{cases} u = 2\,a\,x + a\,w'(a) + w(a) \\ y = 2\,a^2 x + w'(a)\,2\,a^2 \end{cases}$$

zeigt, daß tatsächlich die Lösungen folgendermaßen ineinander übergehen: wir führen durch die Gleichung $y_0 = 2a^2 w'(a)$ statt a einen neuen Parameter y_0 ein und definieren sodann durch die Gleichung $v(y_0) = (a\,w(a))' = a\,w'(a) + w(a)$ zu $w(a)$ eine neue Funktion $v(y_0)$. Wegen der Beziehungen

$$\frac{d\,y_0}{d\,a} = 2\,a\,[2\,w'(a) + a\,w''(a)] = 2\,a\,(a\,w(a))''$$

$$v'(y_0) = \frac{d\,v(y_0)}{d\,y_0} = (a\,w(a))''\,\frac{d\,a}{d\,y_0} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{}{2\,v'(y_0)^2} = 2a^2$$

gehen dann die beiden Darstellungen ineinander über.

Die beiden vorangehenden Beispiele sind Spezialfälle der allgemeinen Differentialgleichung

$$(17) \qquad F(u_x, u_y) = 0,$$

bei welcher ganz ähnliche Verhältnisse vorliegen. Aus den charakteristischen Gleichungen

$$(18) \qquad dx : dy : du : dp : dq = F_p : F_q : p\,F_p + qF_q : 0 : 0$$

erkennen wir wie oben, daß die charakteristischen Streifen aus geraden Linien mit nur einer zugehörigen Tangentialebene bestehen, und daß

infolgedessen die Lösungen abwickelbare Flächen sind. Diese letzte Tatsache wird noch deutlicher, wenn wir bemerken, daß es möglich ist, ein vollständiges Integral aufzustellen, das aus lauter Ebenen besteht. Zu dem Zweck denken wir uns die Gleichung $F(p, q) = 0$ durch zwei Funktionen $p(a)$ und $q(a)$, wo a ein Parameter ist, erfüllt. Dann erhalten wir die vollständige Lösung

$$u = p(a)\,x + q(a)\,y + b,$$

die in der Tat aus lauter Ebenen besteht.

3. Die Differentialgleichung von Clairaut[1]. Wir betrachten ferner erneut die Clairautsche Differentialgleichung

$$u = x u_x + y u_y + f(u_x, u_y). \tag{19}$$

In Kap. I, § 4 fanden wir als ein vollständiges Integral die Ebenenschar

$$u = a x + b y + f(a, b). \tag{20}$$

Die durch Enveloppenbildung aus dem vollständigen Integral entstehenden Lösungen, die durch die Formeln

$$\begin{aligned} u &= a x + w(a)\,y + f(a, w(a)) \\ 0 &= x + w'(a)\,y + f_a + f_b w' \end{aligned} \tag{21}$$

gegeben werden, stellen abwickelbare Flächen dar. Ebenso erkennen wir, daß alle durch Aneinanderreihung von Charakteristiken entstehenden Integralflächen abwickelbar sind; denn aus den charakteristischen Gleichungen

$$\begin{gathered} dx : dy : du = (x + f_p) : (y + f_q) : (p x + q y + p f_p + q f_q) \\ dp = dq = 0 \end{gathered} \tag{22}$$

entnehmen wir wie oben (vgl. Nr. 1 und 2), daß die charakteristischen Streifen gerade Linien mit nur einer zugehörigen Tangentialebene sind.

Die singuläre Lösung der Differentialgleichung (19) haben wir bereits in Kap. I, §§ 4 und 6 betrachtet; wir erhalten sie, vorausgesetzt, daß $f_{aa} f_{bb} - f_{ab}^2 \neq 0$ ist, wenn wir aus den Gleichungen

$$x = -f_a \qquad y = -f_b$$

a und b ausrechnen und in

$$u = a x + b y + f(a, b)$$

einsetzen; in Tangentialkoordinaten ξ, η, ω ist ihre Darstellung einfach gegeben durch die Stützfunktion

$$\omega = -f(\xi, \eta). \tag{23}$$

---

[1] Vgl. auch Kap. I, §§ 4 und 6.

Die Gesamtheit der Lösungen kann nun durch ihre Beziehungen zur singulären Lösung einfach gekennzeichnet werden. Wir bemerken, daß die Ebenen des vollständigen Integrals gerade die Tangentialebenen der singulären Lösung und die Charakteristiken Tangenten sind. Hieraus folgt, daß die Gesamtheit der Lösungen der Clairautschen Differentialgleichung diejenigen abwickelbaren Flächen sind, welche die singuläre Lösung berühren. Das Anfangswertproblem kann man nun einfach dadurch lösen, daß man die Ebenen bestimmt, die die Anfangskurve und zugleich die singuläre Lösung berühren, und ihre Enveloppe bildet.

Daß der Mongesche Kegel der Tangentialkegel von einem Punkte an die singuläre Lösung ist, hätte man schon unmittelbar aus der Differentialgleichung entnehmen können. *Der Mongesche Kegel ist hier zugleich Integralkonoid*[1].

4. Die Differentialgleichung der Röhrenflächen. Ein instruktives Beispiel bietet die schon in Kap. I, § 4 aufgestellte Differentialgleichung der Röhrenflächen:

$$u^2(p^2+q^2+1)=1. \tag{24}$$

Für sie ist die Schar von Kugeln

$$(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1 \tag{25}$$

ein vollständiges Integral. Geometrisch ergibt sich sofort, daß die zur u-Achse parallelen größten Kreise der Kugeln die Charakteristiken sind.

Analytisch entnehmen wir diese Tatsache der charakteristischen Differentialgleichungen

$$dx:dy:du:dp:dq=u^2p:u^2q:1-u^2:-\frac{p}{u}:-\frac{q}{u}, \tag{26}$$

aus denen sich ergibt

$$d(x+up)=d(y+uq)=d\left(\frac{p}{q}\right)=0.$$

Wir gewinnen somit die Gleichungen

$$x-a=-up;\qquad y-b=-uq,\qquad p=cq,$$

wobei a, b, c Integrationskonstanten sind. Aus ihnen und aus der Relation $u^2(p^2+q^2)=1-u^2$ folgen nun tatsächlich die Gleichungen $(x-a)^2+(y-b)^2+u^2=1$ und $\frac{x-a}{y-b}=c$ die charakteristischen Kurven sind also die oben genannten Kreise. Ferner ergibt sich aus $x-a:y-b:u=p:q:-1$ für die zugehörigen Tangentialebenen, daß ihre Normalen in den Mittelpunkt des Kreises weisen.

[1] Diese Betrachtungen dieser Nummer gelten ebenso für die nur formal allgemeine Differentialgleichung

$$F(p, q, u-xp-yq)=0,$$

Die weiteren Integralflächen sind Enveloppen einparametriger Scharen von Kugeln mit dem Radius 1, deren Mittelpunkt sich auf einer Kurve in der x, y-Ebene bewegt. Ist diese Kurve, die „Seele" der Röhrenfläche, weniger gekrümmt als der Einheitskreis, so wird die Röhrenfläche wirklich die Gestalt eines Rohres haben. Die charakteristischen Kreise auf ihr besitzen dann keine Enveloppe. Ist jedoch der Krümmungsradius der Seele kleiner als eins, so erhalten wir durch diese Enveloppenbildung bzw. als Erzeugnis der zugehörigen charakteristischen Kreise eine Fläche mit einer Rückkehrkante. Diese Rückkehrkanten sind die Fokalkurven unserer Differentialgleichung. Die Projektion dieser Fokalkurven auf die x, y-Ebene wird dann die Evolute der Seelenkurven unserer „Röhren".

Es sei empfohlen, diese Verhältnisse an einem konkreten Beispiel und an einem Modell anschaulich zu machen.

5. Homogenitätsrelation. Als letztes Beispiel betrachten wir eine lineare Differentialgleichung, und zwar die *Homogenitätsrelation* (vgl. Kap. I, § 1, 6)

$$px + qy = hu, \tag{27}$$

wo h eine Konstante ist. Die charakteristischen Differentialgleichungen

$$dx : dy : du = x : y : hu \tag{28}$$

werden durch die Gleichungen

$$\frac{u}{x^h} = a \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = b \tag{29}$$

integriert. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung wird also dann mit Hilfe einer willkürlichen Funktion W durch die Gleichung $u = x^h W\left(\frac{y}{x}\right)$ oder mit Hilfe einer willkürlichen Funktion w durch die Gleichung

$$u = y^h w\left(\frac{y}{x}\right)$$

gegeben, also tatsächlich durch eine homogene Funktion h^{ten} Grades von x und y.

Eine andere Darstellung der allgemeinen Lösung ergibt sich aus dem vollständigen Integral

$$u = a x^h + b y^h,$$

aus welchem sich die Lösung vermittelst der Gleichungen

$$u = a x^h + w(a)\, y^h$$
$$0 = x^h + w'(a)\, y^h$$

ausdrückt. Da sich aus der zweiten Gleichung a als Funktion des Quotienten $\frac{x}{y}$ ergibt, gewinnen wir auch so für u eine allgemeine homogene Funktion h^{ten} Grades.

§ 7. Allgemeine Differentialgleichung mit n unabhängigen Veränderlichen.

Bei der allgemeinen partiellen Differentialgleichung

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad \left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \tag{1}$$

mit n unabhängigen Veränderlichen verläuft die Integrationstheorie ganz analog wie bei $n = 2$. Wir wollen dabei auf die ausführliche Wiederholung der geometrischen Deutung verzichten und vor allem das neu auftretende Moment, nämlich die charakteristischen Streifenmannigfaltigkeiten diskutieren.

Wir ordnen in Analogie zu § 3 der Differentialgleichung $F = 0$ das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \qquad \frac{du}{ds} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = -(F_{x_i} + F_u p_i) \tag{2}$$

für die $2n + 1$ Funktionen x_i, u, p_i eines Parameters s zu. Dieses System (2) heißt das zur partiellen Differentialgleichung (1) gehörige *charakteristische Differentialgleichungssystem.*

$F(x_i, u, p_i)$ ist ein Integral[1] dieses charakteristischen Differentialgleichungssystems, für jede Lösung dieses Systems wird nämlich

$$\frac{dF}{ds} = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i} \frac{dx_i}{ds} + \sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{dp_i}{ds} + F_u \frac{du}{ds} = 0.$$

Wir nennen alle Lösungen unseres charakteristischen Differentialgleichungssystems, die noch überdies der Bedingung $F = 0$ genügen, *charakteristische Streifen.* Sie bilden eine $2n - 1$ parametrige Schar. Nunmehr erkennt man genau wie bei zwei Veränderlichen: *Auf jeder Integralfläche $u(x_1, \ldots, x_n)$ der Differentialgleichung $F = 0$ liegen unendlich viele charakteristische Streifen. Jeder charakteristische Streifen, der ein Element, d. h. ein Wertsystem x_i, u, p_i mit einer Integralfläche gemeinsam hat, liegt ganz auf der Integralfläche.*

Wie in § 3 lautet das *Anfangswertproblem*: Gegeben sei eine $n-1$-dimensionale *Anfangsmannigfaltigkeit C* durch stetig differenzierbare Funktionen $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ von Parametern $t_1, \ldots, t_{n-1}$, so daß die Matrix der Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ den Rang $n - 1$ hat. Diese Mannigfaltigkeit C sei durch weitere Vorgabe von n Funktionen $p_1, \ldots, p_n$ der Parameter t_i zu einer *Streifenmannigfaltigkeit C_1* ergänzt, wobei die *Streifenbedingungen*

$$u_{t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{3}$$

[1] Siehe Anmerkung 1, S. 66.

identisch in den t_ν erfüllt seien. Zwischen den Streifengrößen sei die Relation

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

als identisch in t_i bestehend vorausgesetzt. *Gesucht ist eine Integralmannigfaltigkeit* $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ *d. h. eine Lösung der Differentialgleichung* $F = 0$, *derart daß sie die gegebene Anfangsmannigfaltigkeit* C_1 *enthält.*

Zur Lösung betrachten wir nun die Schar derjenigen vom Parameter s abhängigen charakteristischen Streifen, welche für $s = 0$ ihr Anfangselement in der vorgegebenen Anfangsstreifenmannigfaltigkeit C_1 besitzen, d. h. diejenigen Lösungen

$$x_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad u(s, t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad p_i(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$$

der charakteristischen Differentialgleichungen, welche für $s = 0$ in die vorgegebenen Funktionen übergehen. Falls die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_1, \ldots x_n)}{\partial(s, t_1, \ldots t_{n-1})}, \tag{4}$$

die wegen (2) mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{p_1} & \ldots & F_{p_n} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

übereinstimmt, längs der Anfangsmannigfaltigkeit C_1 (d. h. für $s = 0$) und daher in einer Umgebung von C_1 nicht verschwindet, können wir umgekehrt dort die Größen $s, t_1, \ldots, t_{n-1}$ durch $x_1, \ldots, x_n$ ausdrücken, erhalten also durch Einsetzung dieser Ausdrücke in $u(s, t_1, \ldots, t_{n-1})$ eine eindeutig bestimmte Fläche $u = u(x_1, \ldots, x_{n-1})$, welche die Anfangsmannigfaltigkeit C_1 enthält. Wir wollen zeigen, daß diese Funktion u unser Anfangswertproblem löst. Da wir wissen, daß auf der Fläche J: $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ die Größe $F(x_i, u, p_i)$ identisch verschwindet, wenn für x_i, u, p_i, die Lösungen der charakteristischen Differentialgleichungen eingesetzt werden, so brauchen wir nur nachzuweisen, daß auf der Fläche J überall $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ist. Dieser Nachweis läßt sich genau wie bei zwei unabhängigen Veränderlichen führen (vgl. § 3, 2) und kann hier übergangen werden.

Es bleibt der Ausnahmefall zu diskutieren, daß $\Delta = 0$ auf C_1 gilt. Wir können die Relation $\Delta = 0$ wiederum wie in § 2 auch dadurch kennzeichnen, daß es $n - 1$ Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ gibt, mit denen die linearen Abhängigkeiten

$$F_{p_i} = \sum \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \tag{5}$$

längs C_1 bestehen.

Unser Ziel ist, weitere Bedingungen für die Lösbarkeit des Anfangswertproblems auch in diesem Falle zu finden, d. h. zu untersuchen, welche weiteren Bedingungen hinzukommen müssen, um das Anfangswertproblem lösbar zu machen. Wiederum wird uns hier eine übersichtliche Formulierung der Zusammenhänge durch die Einführung des Begriffes „*charakteristische Mannigfaltigkeit*" ermöglicht, den wir zunächst definieren und analysieren wollen. Zum Unterschiede gegen den quasilinearen Fall (§ 2), wo eine charakteristische Mannigfaltigkeit eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit C im $n+1$-dimensionalen x, u-Raum war, haben wir jetzt $n-1$-dimensionale Streifenmannigfaltigkeiten C_1, charakterisiert durch $2n+1$ Größen x_i, u, p_i, zu betrachten, die wir auch in einem $2n+1$-dimensionalen x, u, p-Raume deuten können.

Wir ordnen zunächst jedem Punkte des $2n+1$-dimensionalen x, u, p-Raumes (oder jedem Flächenelement des $n+1$-dimensionalen x, u-Raumes) das System der $2n+1$ Zahlen

$$(6)\qquad \begin{cases} a_i = F_{p_i} & a = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu F_{p_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu \\ b_i = -F_{x_i} - p_i F_u & i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

als Komponenten eines „*charakteristischen Streifenvektors*" zu. Nunmehr definieren wir: *Eine $n-1$-dimensionale Streifenmannigfaltigkeit C_1, für welche identisch die Relation $F(x_i, u, p_i) = 0$ gilt, heißt eine charakteristische Streifenmannigfaltigkeit, wenn in jedem ihrer Punkte der charakteristische Streifenvektor tangential ist.* Diese auf die Deutung im $2n+1$-dimensionalen Raume bezügliche geometrische Definition präzisieren wir folgendermaßen analytisch, indem wir lineare Abhängigkeit des Vektor (a_i, a, b_i) von den $n-1$ unabhängigen definitionsgemäß an C_1 tangentialen Vektoren

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}, \quad \frac{\partial u}{\partial t_\nu}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

fordern:

Für die $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit C_1 gegeben durch Funktionen x_i, u, p_i der unabhängigen Parameter $t_1, \ldots, t_{n-1}$ bestehe identisch in den t die Relation

$$(7)\qquad F(x_i, u, p_i) = 0$$

sowie die *Streifenrelationen*

$$(8)\qquad \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{d t_\nu}. \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

Dann heißt die Streifenmannigfaltigkeit charakteristisch, wenn es in ihr $n-1$ Faktoren $\lambda_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1})$ gibt, so daß die linearen Abhängigkeiten[1]

[1] Diese $2n+1$ Relationen zwischen den $2n+1$ Größen x_i, u, p_i sind nicht unabhängig voneinander. Vielmehr bestehen die $n-1$ Identitäten

$$(9)\qquad \frac{\partial F}{\partial t_\varrho} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial t_\varrho} - \frac{\partial U_\varrho}{\partial t_\nu} \right) + F_u U_\varrho + \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial p_i}{\partial t_\varrho} - P_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\varrho}\right.$$

$$(9)\qquad X_i = a_i - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = 0$$

$$(10)\qquad U = a - \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = 0$$

$$(11)\qquad P_i = b_i - \sum^{n-1} \lambda_\nu \frac{}{\partial t_\nu} = 0$$

bestehen.

Es gelten nun wiederum die beiden Sätze: *Jede charakteristische Streifenmannigfaltigkeit C_1 wird durch eine $n-1$-parametrige Schar ganz in ihr liegender charakteristischer Streifen erzeugt.*

Jeder charakteristische Streifen, welcher ein Anfangselement mit einer charakteristischen Mannigfaltigkeit gemeinsam hat, liegt ganz in ihr.

Zum Beweise definieren wir wiederum wie in § 2 in der $n-1$-dimensionalen t_i-Mannigfaltigkeit die Kurven $t_i(s)$ durch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(12)\qquad \frac{d t_\nu}{d s} = \lambda_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1}). \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

Diese Kurven bilden eine $n-2$-parametrige Schar, welche die t-Mannigfaltigkeit erzeugt. Längs dieser Kurven wird durch $x_i(t_\nu)$, $u(t_\nu)$, $p_i(t_\nu)$ nach Einsetzung $t_\nu = t_\nu(s)$ ein in C_1 liegender eindimensionaler Streifen $x_i(s)$, $u(s)$, $p_i(s)$ definiert, den wir als charakteristischen Streifen unserer ursprünglichen partiellen Differentialgleichung zu erweisen haben. In der Tat wird nun unter Berücksichtigung unserer Relationen (9), (10), (11)

$$\frac{d x_i}{d s} = \sum_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} \lambda_\nu = a_i = F_{p_i}, \qquad \frac{du}{ds} = \sum_\nu \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu} = a = \sum p_i F_{p_i}$$

$$\frac{dp_i}{ds} = \sum \lambda_\nu \frac{\partial p_i}{\partial t_\nu} = b_i = -F_{x_i} - p_i F_u.$$

Unsere Funktionen sind also Lösungen des charakteristischen Gleichungssystems und definieren wegen des Bestehens von $F = 0$ somit einen charakteristischen Streifen. Die gewonnene $n-2$-parametrige Schar solcher Streifen bedeckt C_1.

die man leicht bestätigen wird. Somit folgt, daß außer der Relation $F = 0$ bzw. den daraus sich ergebenden Relationen $\frac{\partial F}{\partial t_\varrho} = 0$, den Streifenbedingungen (8) und den Bedingungen (9) und (10) nur noch eine einzige der n Bedingungen (11) gestellt zu werden braucht, um die Erfüllung der fehlenden zwangsläufig zu sichern. Es ist jedoch, wie auch sonst vielfach in Geometrie und Analysis, zweckmäßig aus Symmetriegründen in der Definition das System der abhängigen Relationen beizubehalten.

Der zweite Satz ergibt sich nunmehr genau entsprechend zur Überlegung im quasilinearen Falle (§ 2) aus der eindeutigen Bestimmtheit der Lösungen des charakteristischen Differentialgleichungssystems durch Anfangswerte.

Nach dieser Analyse der charakteristischen Mannigfaltigkeiten können wir das Gesamtergebnis genau wie im quasilinearen Falle aussprechen und den Beweis ebenso zu Ende führen:

Das Anfangswertproblem für eine gegebene Anfangsmannigfaltigkeit C_1 besitzt, falls längs C_1 überall $\Delta \neq 0$ ist, eine und nur eine Lösung. Besteht jedoch längs C_1 die Relation $\Delta = 0$, so ist notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des Anfangswertproblems, daß C_1 eine charakteristische Mannigfaltigkeit ist. In diesem Falle gibt es unendlich viele Lösungen.

Wir brauchen lediglich noch die den Fall $\Delta = 0$ betreffenden Behauptungen zu beweisen. In diesem Falle können wir sofort auf die Existenz von $n-1$ Faktoren $\lambda_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1})$ schließen, so daß die Relationen (9) erfüllt sind. Nehmen wir nun an, daß $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ eine Integralfläche J durch C_1 darstellt mit $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, so folgen sofort die noch fehlenden Relationen (10), (11), welche C_1 als charakteristische Mannigfaltigkeit kennzeichnen. Wir haben nämlich zunächst unter Berücksichtigung von $p_i = u_{x_i}$ und von (9)

$$a = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial u}{\partial t_\nu},$$

womit die Relation (10) als erfüllt festgestellt ist. Benutzen wir ferner, daß u identisch in den x_i der nach $x_\varkappa$ differenzierten partiellen Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \frac{\partial p_\varkappa}{\partial x_i} + F_u p_\varkappa + F_{x_\varkappa} = 0 \tag{13}$$

— wir haben dabei $\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_k}$ eingesetzt — genügen muß, und verwenden (12), so erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \lambda_\nu \frac{\partial p_k}{\partial t_\nu} = -F_u p_k - F_{x_k} = b_k ,$$

d. h. die fehlenden Relationen (11).

Somit haben wir bewiesen, daß aus der Lösbarkeit des Anfangswertproblems für C_1 folgt, daß C_1 eine charakteristische Streifenmannigfaltigkeit ist.

Daß diese Eigenschaft für die Lösbarkeit auch in der angegebenen Weise hinreicht, ergibt sich wörtlich wie im qualisinearen Falle. Man konstruiert irgendeine Quermannigfaltigkeit C_1', welche mit C_1 die $n-2$-dimensionale Mannigfaltigkeit S gemeinsam hat und für welche die

Bedingung $\Delta \neq 0$ überall erfüllt, das Anfangswertproblem also eindeutig durch eine Integralfläche J lösbar ist. Alle charakteristischen Streifen, die ein Anfangselement auf C_1 haben, also sicherlich auch diejenigen durch S, somit die durch diese erzeugte Mannigfaltigkeit C, liegen also auf C_1. Daher gibt es wegen der Willkür von C_1' unendlich viele Lösungen des Anfangswertproblems für C_1.

§ 8. Vollständiges Integral und Hamilton-Jacobische Theorie.

1. Enveloppenbildung und charakteristische Kurven. Es liege die partielle Differentialgleichung

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{1}$$

vor $\left(p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$. Eine von n Parametern a_i abhängige Lösung

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) \tag{2}$$

dieser Gleichung sei bekannt und die Determinantenbedingung

$$D = \varphi_{x_i a_k} \neq 0 \tag{3}$$

in dem in Betracht kommenden Teil des x, u-Raumes erfüllt[1]. Dann erweist sich die Enveloppe einer beliebigen $(n-1)$-parametrigen Schar dieser Lösungen wieder als eine Lösung. Wir setzen zum Beweise

$$a_i = \omega_i(t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

wo die ω_i willkürliche Funktionen der $n-1$ Parameter t_k sind. Man erhält die Enveloppe durch Berechnung von $t_1, \ldots, t_{n-1}$ aus den Gleichungen

$$0 = \sum_{i=1} \varphi_{a_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial t_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{4}$$

als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ und Einsetzen in

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, \omega_1(t_1, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \omega_n(t_1, \ldots, t_{n-1}))\,.$$

Die *Berührungskurven* der durch das vollständige Integral gelieferten Fläche mit der Enveloppe werden sich als *charakteristische Kurven* herausstellen. Eine solche Berührungskurve gehört zu einem bestimmten System von Werten t_ν, $\frac{\partial \omega_i}{\partial t_\nu}$ und a_i. Kennzeichnend für die Berührungskurve ist, daß längs ihr auch die Relationen (4) bestehen, aus denen sich

[1] Wir könnten auch in Analogie zu früher (Kap. I, § 4, 2) allgemeiner die Bedingung stellen daß die n-reihige Matrix

$$\begin{pmatrix} \varphi_{a_1} & \varphi_{x_1 a_1} & & \varphi_{x_n a} \\ \varphi_{a_n} & \varphi_{x_1 a_n} & \cdots & \varphi_{x_n a_n} \end{pmatrix}$$

den Rang n hat.

bis auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor λ gewisse konstante Werte b_i für die φ_{a_i}:

$$\varphi_{a_i} = \lambda b_i \tag{5}$$

ergeben. Fassen wir diese Gleichung (5) als Zuordnung von Werten λb_i zu Werten x_i und a_i auf, so können wir sie wegen Bedingung (3) in der Umgebung des betrachteten Wertsystems in eindeutiger Weise nach den x_i auflösen. Wir erhalten so Funktionen

$$x_i(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}, \lambda) .$$

Setzt man diese Funktionen in $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$ ein, so erhält man zu jedem solchen Wertsystem a_i, b_i eine Raumkurve dargestellt durch den Kurvenparameter λ. Daß alle diese Kurven Berührungskurven bei unserer Enveloppenbildung sind, ergibt sich daraus, daß man durch geeignete Wahl der Funktionen ω_i den Werten a_i und b_i beliebige Werte in der betrachteten Umgebung erteilen kann. Somit erhalten wir eine $2n$-parametrige Schar von Berührungskurven zu unserem vollständigen Integral.

Diese Kurven sind charakteristische Kurven unserer partiellen Differentialgleichung (1) und liefern zusammen mit

$$p_i = \varphi_{x_i}(x_k(a_\nu; b_\nu; \lambda); a_\nu)$$

charakteristische Streifen.

Dies ergibt sich aus der geometrischen Definition unserer Kurven als Berührungskurven. Um es analytisch einzusehen, differenzieren wir die Gleichungen (5) nach dem Kurvenparameter λ und bezeichnen Differentiation nach λ mit einem Strich

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_{a_i x_\varkappa} x'_\varkappa = b_i . \tag{6}$$

Andererseits folgt mit Hilfe von (5) durch Differentiation der Differentialgleichung (1) die ja durch $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$ identisch in den x_i und a_i erfüllt wird, nach a_i

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \varphi_{x_\varkappa a_i} F_{p_\varkappa} + F_u \lambda b_i = 0 . \tag{7}$$

Hiernach erfüllen die Größen $-\frac{F_{p_\varkappa}}{\lambda F_u}$ dasselbe inhomogene Gleichungssystem wie die $x'_\varkappa$; da die Determinante dieses Gleichungssystems nicht verschwindet, kann man

$$x'_\varkappa = -\frac{F_{p_\varkappa}}{\lambda F_u}$$

schließen. Setzt man den von Null verschiedenen Ausdruck $-\frac{1}{\lambda F_u}$ gleich ϱ, so folgt

$$x'_\varkappa = \varrho F_{p_\varkappa} . \tag{8}$$

Differenziert man andererseits die Differentialgleichung (1) nach $x_\varkappa$, so folgt

$$F_u p_\varkappa + \sum_i F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_\varkappa} + F_{x_\varkappa} = 0$$

oder, da nach (8)

$$\sum_i F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_\varkappa} = \frac{1}{\varrho} \sum \frac{\partial p_i}{\partial x_\varkappa} x_i' = \frac{1}{\varrho} \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_\varkappa \partial x_i} x_i'$$

$$= \frac{1}{\varrho} \sum_i \frac{\partial p_\varkappa}{\partial x_i} x_i' = \frac{1}{\varrho} p_\varkappa'$$

ist,

$$p_\varkappa' = -\varrho (F_u p_\varkappa + F_{x_\varkappa}).$$

Schließlich ist nach (8)

$$u' = \sum_i u_{x_i} x_i' = \varrho \sum_i p_i F_{p_i}.$$

Damit sind, da man den Kurvenparameter λ so wählen kann, daß $\varrho = 1$ wird, die charakteristischen Gleichungen (2) von S. 82 auf den vorliegenden Kurven erfüllt[1].

2. Die Kanonische Gestalt der charakteristischen Differentialgleichungen. Man kann die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in eine übersichtlichere Gestalt bringen und die Rechnungen von Nr. 1 vereinfachen, wenn die abhängige Variable u nicht mehr explizite in der Differentialgleichung auftritt. Bei einer beliebigen Differentialgleichung können wir dies stets durch Vermehrung der Anzahl der unabhängigen Veränderlichen um Eins erreichen.

Zu dem Zwecke brauchen wir z. B. (vgl. Kap. I, § 5, S. 25) nur $u = x_{n+1}$ als unabhängige Variable einzuführen und eine Schar von Lösungen $u = \psi(x_1, \ldots, x_n; c)$ in der Form $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = c$ implizite zu geben. An Stelle von u_{x_i} ist dann $-\frac{\varphi_{x_i}}{\varphi_{x_{n+1}}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ zu setzen. Wir erhalten also jetzt für die gesuchte Funktion φ eine Differentialgleichung, die von φ nicht explizite abhängt.

Wir wollen außerdem eine Variable $x_{n+1} = x$ auszeichnen und die Differentialgleichung nach der Ableitung von φ nach dieser Variablen aufgelöst denken. Wir können uns also, wenn wir statt φ wieder u schreiben, auf eine Differentialgleichung

---

[1] Beiläufig sei darauf hingewiesen, daß man noch auf andere Arten durch Enveloppenbildung Lösungen aus einer von willkürlichen Parametern abhängigen Lösung $\varphi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$ erhalten kann. Z. B. kann man die Enveloppe der n-parametrigen Schar (2) bilden und so wiederum zu einer singulären Lösung gelangen, welche wie für $n = 2$ auch durch Differentiation- und Eliminationsprozesse aus den Relationen $F = F_{p_i} = 0$ gewonnen werden kann. Oder man kann aus der n-parametrigen Schar mittels willkürlicher Funktionen irgendeine m-parametrige Schar mit $m < n$ herausgreifen und deren Enveloppe bilden. Die Berührungsmannigfaltigkeiten in diesem Falle werden dann charakteristische Mannigfaltigkeiten der Dimension m sein.

$$(9)\qquad \begin{cases} p + H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n) = 0 \\ p = u_x, \qquad p_i = u_{x_i} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

für eine Funktion u der $n+1$ Variablen $x, x_1, \ldots, x_n$ beschränken.

Das System der charakteristischen Differentialgleichungen geht dann, wenn wir, unter Berücksichtigung von $\frac{dx}{ds} = 1$, x statt s schreiben, in folgendes über:

$$(10)\qquad \frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und dazu noch

$$(11)\qquad \frac{du}{dx} = \sum_{i=1}^{n} p_i H_{p_i} - H, \qquad \frac{dp}{dx} = -H_x.$$

Schon die Gleichungen (10) bilden für sich ein bestimmtes System von $2n$ Differentialgleichungen. Wenn aus ihnen die Funktionen $x_i(x)$ und $p_i(x)$ bestimmt sind, so ergeben sich $p(x)$ und $u(x)$ aus den Gleichungen (11) durch einfache Integrationen.

Auf Differentialgleichungen von der Form (10) wird man in der Mechanik und in der Variationsrechnung (vgl. z. B. auch Bd. I, Kap. IV, § 9 und dies Kap. § 9) geführt. Ein zu einer Funktion $H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n)$ von $2n+1$ Veränderlichen gehöriges gewöhnliches Differentialgleichungssystem

$$(10)\qquad \frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}$$

heißt ein *kanonisches Differentialgleichungssystem*.

Die Resultate des vorigen Paragraphen können wir dahin zusammenfassen, daß die Integration der partiellen Differentialgleichung (9) sich auf die Integration eines kanonischen Systems mit derselben Funktion H reduzieren läßt.

3. Hamilton-Jacobische Theorie. Eine der Hauptleistungen von Jacobi war nun die Erkenntnis, daß sich dieser Zusammenhang umkehren läßt. Zwar gilt in der üblichen Rangordnung die Integration einer partiellen Differentialgleichung als ein höheres Problem als Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. Jedoch wird man vielfach in der mathematischen Physik auf ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der kanonischen Gestalt geführt, welche verhältnismäßig verwickelt erscheinen und der Integration Schwierigkeiten entgegensetzen, während die zugehörige partielle Differentialgleichung sich als weniger unzugänglich erweist, z. B. mit Hilfe von Trennung der Variabeln (Kap. I, § 3) leicht ein vollständiges Integral gewonnen werden kann. Dann kann man das Integrationsproblem des zugehörigen charakteristischen gewöhnlichen Differentialgleichungssystemes durch Differentiations- und Eliminationsprozesse auf Grund der Kenntnis des

vollständigen Integrales lösen. Dieses Ergebnis, welches schon in den früheren Resultaten von § 4 und § 8, 1 enthalten ist, läßt sich für den Fall kanonischer Differentialgleichungen besonders einfach formulieren und, unabhängig von der heuristischen Betrachtung der Enveloppenbildung, analytisch verifizieren.

Zunächst wollen wir den Begriff des vollständigen Integrals für unsere Differentialgleichung folgendermaßen neu fassen: wir beachten hierzu, daß zu jeder Lösung u der Differentialgleichung auch $u + a$ mit einer willkürlichen Konstanten a eine Lösung sein muß. Ist nun $u = \varphi(x; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n)$ eine von n Parametern a_i abhängige Lösung, derart daß die Determinante

$$|\varphi_{x_i a_k}| \tag{12}$$

von Null verschieden ist, so nennen wir den von $n + 1$ Parametern abhängigen Ausdruck

$$u = \varphi + a$$

ein *vollständiges Integral.* Den Hauptinhalt der hier zu behandelnden Theorie bildet der folgende Satz, der in vollkommener Analogie zu den zu Anfang des Paragraphen in Nr. 1 bewiesenen Tatsachen steht.

Kennt man zu der partiellen Differentialgleichung

$$u_x + H(x_1, \ldots, x_n, x, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0 \tag{9}$$

ein vollständiges Integral $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n, x; a_1, \ldots, a_n) + a$, *so gewinnt man aus den Gleichungen*

$$\varphi_{a_i} = b_i, \qquad \varphi_{x_i} = p_i, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

bei beliebigen $2n$ *Parametern* a_i *und* b_i *die* $2n$*-parametrige Schar von Lösungen des kanonischen Differentialgleichungssystems*

$$\frac{dx_i}{dx} = H_{p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dx} = -H_{x_i}. \tag{10}$$

Denken wir uns aus den ersten n der Gleichungen (13) die Größen x_i als Funktionen von x und den $2n$ Parametern a_i, b_i ausgedrückt, was wegen des vorausgesetzten Nichtverschwindens von $|\varphi_{x_i a_k}|$ möglich ist, und denken wir uns weiter diese Werte von x_i in das zweite System dieser Gleichungen eingesetzt, so erhalten wir Funktionen $x_i(x)$ und $p_i(x)$, die noch von $2n$ Parametern abhängen und die allgemeine Lösung der kanonischen Differentialgleichungen darstellen. Die Lösung des kanonischen Differentialgleichungssystems ist somit auf das Problem der Auffindung eines vollständigen Integrals der zugehörigen partiellen Differentialgleichung reduziert.

Den Beweis führen wir am kürzesten durch eine einfache Verifikation, nach dem Muster des zu Anfang des Paragraphen Bewiesenen[1].

[1] Der wesentliche Unterschied des hier folgenden Beweises von dem zu Anfang des Paragraphen gegebenen liegt in der Beibehaltung der unsymmetrischen Schreibweise.

Um zu zeigen, daß die nach der obigen Vorschrift bestimmten Funktionen $x_i(x)$ und $p_i(x)$ den Gleichungen

$$\frac{d x_i}{d x} = H_{p_i}, \qquad \frac{d p_i}{d x} = - H_{x_i} \tag{10}$$

genügen, differenzieren wir die Gleichungen $\varphi_{a_i} = b_i$ nach x und die Gleichung $\varphi_x + H(x, x_i, \varphi_{x_i}) = 0$ nach a_i und erhalten die $2n$ Gleichungen:

$$\frac{\quad}{\partial x\, \partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\quad}{\partial x_k\, \partial a_i} \frac{\partial x_k}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial a_i} + \sum_{k=1} H_{p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\, \partial a_i} = 0,$$

aus denen sich wegen des Nichtverschwindens der Determinante $|\varphi_{a_k x_i}|$ die erste der behaupteten Relationen ergibt. Zur Bestätigung der anderen Relation differenzieren wir die Gleichungen $\varphi_{x_i} = p_i$ nach x und die Gleichung $\varphi_x + H(x, x_i, \varphi_{x_i}) = 0$ nach x_i und erhalten die Gleichungen

$$\frac{d p_i}{d x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial x_i} + \sum_{k=1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x}$$

(15) und

$$0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial x_i} + \sum_{k=1}^{n} H_{p_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k\, \partial x_i} + H_{x_i},$$

aus denen sich unter Beachtung der schon bewiesenen Gleichung $\frac{d x_i}{d x} = H_{p_i}$ die zweite der behaupteten Relationen ergibt.

4. Beispiel. Zweikörperproblem. Für die Bewegung zweier Massenpunkte P_1 und P_2, die sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen, bestehen die Differentialgleichungen

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = U_{x_1}, & m_1 \ddot{y}_1 = U_{y_1}, & m_1 \ddot{z}_1 = U_{z_1} \\ m_2 \ddot{x}_2 = U_{x_2}, & m_2 \ddot{y}_2 = U_{y_2}, & m_2 z_2 = U_{z_2}, \end{cases} \tag{1}$$

wobei

$$U = \frac{\varkappa^2 m_1 m_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}$$

gesetzt ist.

Da, wie man leicht erkennt, die Bewegung stets in einer Ebene erfolgt, so können wir diese Ebene als x, y-Ebene unseres Koordinatensystems wählen mit dem Ort von P_2 als Anfangspunkt und erhalten alsdann für den Ort x, y des Massenpunktes P_1 mit $k^2 = \varkappa^2 m_1 m_2$ die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = U_x \qquad \ddot{y} = U_y; \qquad U = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + :}} \tag{2}$$

Durch Einführung der Hamiltonschen *Funktion*

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \frac{k^2}{\ldots} \tag{3}$$

geht dieses System (2) schließlich in das System der *kanonischen Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p & \dot{p} &= -H_x \\ \dot{y} &= H_q & \dot{q} &= -H_y \end{aligned} \tag{4}$$

für die Größen $x, y, p = \dot{x}, q = \dot{y}$ über, und die Integration dieser Gleichungen ist mit dem Problem äquivalent, ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung [1]

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + \ldots}} \tag{5}$$

aufzusuchen. Führen wir Polarkoordinaten r, ϑ ein, so erhalten wir aus (5)

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2}\varphi_\vartheta^2\right) = \frac{k^2}{r} \tag{6}$$

und erkennen leicht, daß diese Gleichung die von den Parametern α, β abhängige Lösungsschar

$$\varphi = -\alpha t - \beta\vartheta - \int^r \sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\varrho} - \frac{\beta^2}{\varrho^2}}\, d\varrho \tag{7}$$

besitzt. Nach dem Hauptsatz von Nr. 3 folgt alsdann die allgemeine Lösung von (4) in der Form

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -t_0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = -\vartheta_0$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} t - t_0 &= -\int_{r_0}^{r} \frac{d\varrho}{\sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\varrho} - \frac{\beta^2}{\varrho^2}}} \\ \vartheta - \vartheta_0 &= \beta \int_{r_0}^{r} \frac{d\varrho}{\varrho^2\sqrt{2\alpha + \frac{2k^2}{\varrho} - \frac{\beta^2}{\varrho^2}}} \end{aligned} \tag{8}$$

Die zweite dieser Gleichungen liefert die *Bahnkurve*, die erste bestimmt die Bewegung des Massenpunktes auf dieser Kurve in Abhängigkeit von der Zeit t.

[1] Vgl. Kap. I, § 3, Nr. 4.

Die Bahnkurve läßt sich — nach Einführung der Integrationsvariablen $\varrho' = \frac{1}{\varrho}$ — sofort explizit berechnen; wir erhalten:

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\arcsin \frac{\frac{\beta^2}{k^2}\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k^4}}},$$

oder, wenn wir zur Abkürzung die Größen

$$(8') \qquad p = \frac{\beta^2}{k^2}, \qquad \varepsilon^2 = \sqrt{1 + \frac{2\alpha\beta^2}{k^4}}$$

einführen:

$$\vartheta - \vartheta_0 = -\arcsin \frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon^2}$$

d. h.

$$(8'') \qquad r = \frac{p}{1 - \varepsilon^2 \sin(\vartheta - \vartheta_0)}.$$

Je nachdem ob $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon > 1$ gilt, ist also die Bahnkurve eine *Ellipse*, *Parabel* oder *Hyperbel*[1].

5. Beispiel. Geodätische Linien auf einem Ellipsoid. Die Differentialgleichungen der geodätischen Linien $u = u(s)$, $v = v(s)$ einer Fläche

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

lassen sich nach Bd. I, Kap. IV, § 9 in der folgenden kanonischen Form schreiben

$$(9) \qquad \begin{cases} u_s = H_p & p_s = -H_u, \\ v_s = H_q & q_s = -H_v, \end{cases}$$

wobei

$$p = E u_s + F v_s$$
$$q = F u_s + G v_s$$

und

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{EG - F^2}(G p^2 - 2 F p q + E q^2)$$

gesetzt ist mit

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Wir betrachten gemäß Nr. 3 die zu (9) gehörige partielle Differentialgleichung

$$(10) \qquad \varphi_s + \frac{1}{EG - F^2}(G\varphi_u^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + G\varphi_v^2) = 0$$

mit dem Ziel, ein vollständiges Integral dieser Gleichung zu gewinnen. Setzen wir zunächst

$$\varphi = -s + \psi(u, v),$$

[1] Für die Diskussion der Gleichungen (8) vgl. im übrigen etwa R. COURANT: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. II, 2. Aufl., S. 344.

so folgt für ψ die Gleichung[1]

$$(11)\qquad G\psi_u^2 - 2F\psi_u\psi_v + E\psi_v^2 = EG - F^2 .$$

Da uns in (9) nur die Lösungskurven interessieren, nicht aber die durch (9) zugleich mitbestimmte spezielle Parameterdarstellung dieser Kurven, so genügt es, eine einparametrige Lösungsschar $\psi\ (u, v; \alpha)$ von (11) aufzusuchen, aus der sich alsdann in der Form

$$(12)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = C$$

gemäß dem Hauptsatz von Nr. 3 die zweiparametrige Schar der geodätischen Linien ergibt.

Im speziellen Fall des *dreiachsigen Ellipsoides*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

besteht, wie man leicht verifiziert, die Parameterdarstellung (vgl. Bd. I, S. 195)

$$(13)\qquad \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{a(u-a)(v-a)}{(b-a)(c-a)}} \\ y &= \sqrt{\frac{b(u-b)(v-b)}{(c-b)(a-b)}} \\ z &= \sqrt{\frac{c(u-c)(v-c)}{(a-c)(b-c)}} \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(14)\qquad \begin{aligned} E &= (u-v)\,A(u) \\ F &= 0 \\ G &= (v-u)\,A(v)\,, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$A(u) = \frac{1}{4}\,\frac{u}{(a-u)(b-u)(c-u)}$$

gesetzt ist.

Wir erhalten somit für $\psi(u, v)$ die partielle Differentialgleichung

$$(15)\qquad A(v)\psi_u^2 - A(u)\psi_v^2 = (u-v)\,A(u)\,A(v)$$

und durch den Ansatz $\psi(u, v) = f(u) + g(v)$ sofort die von dem Parameter α abhängige Lösungsschar

$$(16)\qquad \psi(u, v; \alpha) = \int\sqrt{A(u)(u+\alpha)}\,du + \int\sqrt{A(v)(v+\alpha)}\,dv .$$

Aus (12) folgt somit als *Gleichung der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid:*

$$(17)\qquad \int\sqrt{\frac{A(u)}{u+\alpha}}\,du + \int\sqrt{\frac{A(v)}{v+\alpha}}\,dv = C .$$

[1] Vgl. Kap. II, § 9, 3.

§ 9. Hamiltonsche Theorie und Variationsrechnung.

Die Hamilton-Jacobische Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist mit der klassischen Variationsrechnung aufs engste verknüpft. Es besteht eine völlige Äquivalenz zwischen der Theorie einer solchen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung — in welcher die gesuchte Funktion nicht explizit auftritt — und einem Variationsproblem des folgenden Typus

$$\delta J = \delta \int F(s, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \ldots, \dot{u}_n, u_1, u_2, \ldots, u_n)\, ds = 0 , \tag{1}$$

wobei $u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s)$ n Funktionen eines Parameters s sind, der Punkt $\cdot$ Differentiation nach s bedeutet und $F(s, \dot{u}_\nu, u_\nu)$ eine von ihren $2n+1$-Argumenten in den betrachteten Bereichen zweimal stetig differenzierbar abhängige Funktion bedeutet. Diese Zusammenhänge sollen hier kurz dargestellt und dabei die Reslutate des § 8 wiedergewonnen und vertieft werden.

1. Die Eulerschen Differentialgleichungen in der kanonischen Form. Die Extremalen unseres Variationsproblems (vgl. Bd. I, Kap. IV) werden gegeben durch das System der *n Eulerschen Differentialgleichungen* zweiter Ordnung für die Funktionen $u_\nu(s)$

$$\frac{d}{ds} F_{\dot{u}_\nu} - F_{u_\nu} = 0. \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

Wir können nun (vgl. hierzu Bd. I, Kap. IV, § 9) unser Variationsproblem durch ein anderes äquivalentes kanonisches Variationsproblem ersetzen, welches zu einem System von $2n$ kanonischen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Extremalen führt. Hierzu führen wir durch eine *Legendresche Transformation* die „*Impulse*"

$$F_{\dot{u}_\nu} = v_\nu \tag{3}$$

ein. Wir nehmen an, daß aus diesen Gleichungen (3) in dem betrachteten Bereiche der Variabeln $\dot{u}_\nu$, u_ν, s sich die Größen $\dot{u}_\nu$ als Funktionen der Größen v_ν, u_ν, s berechnen lassen und machen zu diesem Zwecke die Voraussetzung

$$| F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu} | \neq 0 , \tag{4}$$

wobei dieser Ausdruck die n-reihige Determinante mit den Elementen $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}_\nu \partial \dot{u}_\mu}$ bedeutet. Dann stellt das System der Gleichungen

$$\begin{aligned} F_{\dot{u}_\nu} &= v_\nu \\ L_{v_\nu} &= \dot{u}_\nu \\ F(\dot{u}_\nu, u_\nu, s) + L(v_\nu, u_\nu, s) &= \sum \dot{u}_\nu v_\nu \end{aligned} \tag{5}$$

[1] Summationen sollen, falls nichts besonderes bemerkt wird, in diesem und dem folgenden Paragraphen stets von 1 bis n erstreckt werden.

eine *Legendresche Transformation und ihre Inverse* dar, wobei u_ν und s als nicht mittransformierte Parameter fungieren (vgl. Kap. I, § 6), und wir gewinnen unmittelbar die weitere Relation

$$L_{u_\nu} + F_{u_\nu} = 0. \tag{6}$$

Die Eulerschen Differentialgleichungen gehen dabei über in das *kanonische System*

$$\begin{cases} \dot{v}_\nu = -L_{u_\nu} \\ \dot{u}_\nu = L_{v_\nu} \end{cases} \tag{7}$$

mit der zum Variationsproblem gehörigen „*Legendreschen Funktion*" $L(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n; s)$. Diese kanonischen Differentialgleichungen gehören als Eulersche Gleichungen zu einem dem ursprünglichen Variationsproblem äquivalenten Problem (*„kanonische Form des Variationsproblems"*) (vgl. Bd. I, Kap. IV, § 9)

$$\delta J = \delta \int (\sum \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_\nu, u_\nu, s))\, ds = 0,$$

oder

$$\delta \int (\sum u_\nu \dot{v}_\nu + L(v_\nu, u_\nu, s)\, ds = 0\,,$$

wobei die $2n$ Größen u_ν, v_ν die Argumentfunktionen des Parameters s sind.

Die Variablen u_ν und v_ν heißen *kanonisch konjugiert.*

Es sei darauf hingewiesen, daß es eine kanonische Transformation nicht gibt, wenn die Funktion F homogen von erster Ordnung in den $\dot{u}_\nu$ ist[1] (s. jedoch Nr. 3), z. B.

$$F = \sum_{\nu=1}^{n} \dot{u}_\nu^2.$$

Jedoch sei betont, daß *unter Voraussetzung der Bedingung* (4) der Übergang von der Eulerschen Darstellung der Extremalen zur kanonischen auf Grund der Formel (5) unmittelbar umkehrbar ist, d. h. *zu jedem Variationsintegranden $F(\dot{u}_\nu, u_\nu, s)$ gehört eine Legendresche Funktion $L(u_\nu, v_\nu, s)$ und umgekehrt.*

Unser kanonisches System (7) von Eulerschen Differentialgleichungen ist identisch mit dem charakteristischen Differentialgleichungssystem der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$J_s + L(J_{u_\nu}, u_\nu, s) \tag{8}$$

für eine unbekannte Funktion $J(u_1, \ldots, u_n; s)$. In Nr. 2 und 4 werden wir erkennen, daß diese Gleichung eine unmittelbare Bedeutung für das Variationsproblem hat.

[1] Die Determinante in (4) ist dann identisch Null.

2. Der geodätische Abstand oder das Eikonal, seine Ableitungen und die Hamilton-Jacobische partielle Differentialgleichung. Wir setzen nunmehr voraus, daß in dem betrachteten Bereiche des $n+1$-dimensionalen Raumes der Variablen u_ν, s je zwei Punkte B mit den Koordinaten $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, \tau$ bzw. A mit den Koordinaten $q_1, \ldots, q_n, t$ in eindeutiger Weise durch eine Extremale verbunden werden können. Dann lassen sich die Extremalen, welche dieses Gebiet durchziehen, durch Funktionen

$$u_\nu = f_\nu(s; \varkappa_\nu, \tau, q_\nu, t)$$

und die zugehörigen Impulse v_ν mit $\varkappa_\nu$, τ, q_ν, t als Parametern durch

$$v_\nu = g_\nu\,(s, \varkappa_\nu, \tau, q_\nu, t) \tag{9}$$

darstellen. Insbesondere ist also für die Punkte A und B

$$\begin{aligned} q_\nu &= f_\nu\,(t; \varkappa_\nu, \tau; q_\nu, t) \\ \varkappa_\nu &= f_\nu\,(\tau; \varkappa_\nu, \tau; q_\nu, t)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Richtung der Extrenalen in diesen Punkten ist gegeben durch

$$\left\{\begin{aligned} \dot q_\nu &= \dot f_\nu\,(t; \varkappa_\nu, \tau; q_\nu, t) \\ \dot\varkappa_\nu &= \dot f_\nu\,(\tau; \varkappa_\nu, \tau; q_\nu, t)\,, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

wobei der Punkt $^\cdot$ Differentiation nach dem ersten Argument (Differentiation längs der Extremale) bedeutet. Diese Größen (11) sind Funktionen der $2n+2$-Variablen t, q_ν, τ, $\varkappa_\nu$, ebenso wie die Impulse v_ν an den Endpunkten

$$\left\{\begin{aligned} p_\nu &= g_\nu\,(t, \varkappa_\nu, \tau, q_\nu, t) = F_{\dot q_\nu}\,(\dot q_\nu, q_\nu, t) \\ \pi_\nu &= g_\nu\,(\tau, \varkappa_\nu, \tau, q_\nu, t) = F_{\dot\varkappa_\nu}\,(\dot\varkappa_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\,, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

die sog. *Feldfunktionen*

Setzen wir die Funktionen (9) in unser Variationsintegral

$$J = \int_\tau^t F\,(\dot u_\nu\, u_\nu, s)\; ds = \int_\tau^t \big(\sum_\nu v_\nu \dot u_\nu - L\;(v_\nu, u_\nu, s)\big)\; ds$$

ein, so geht dieses Integral über in eine Funktion

$$J\,(t,\; q_\nu,\, \tau,\, \varkappa_\nu)$$

der $2n+2$-Größen τ, $\varkappa_\nu$, t, q_ν.

Diese Funktion heißt *geodätischer Abstand der Punkte* B und A im Hinblick darauf, daß man das Variationsproblem als die Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Verbindungslinie im Raum auffassen kann. Man kann die Funktion $J(t, q_\nu, \tau, \varkappa_\nu)$ auch optisch deuten, indem man s als Zeitvariable betrachtet und

$$F = \frac{\sqrt{\sum \dot u_\nu^2}}{v\;(\dot u_\nu,\, u_\nu, s)}$$

setzt, wo dann v als Lichtgeschwindigkeit im u_ν-Raume abhängig von der Lage, Richtung und Zeit gedeutet wird. Nimmt man nun nach dem *Fermatschen Prinzip des stationären Lichtweges* (vgl. Bd. I, Kap. IV, § 1) an, daß die Lichtstrahlen Extremalen unseres Variationsproblems sind, so bedeutet die Funktion J die Zeit, welche das Licht braucht, um den Weg von B nach A auf der Lichtbahn zurückzulegen. Bei dieser Auffassung bezeichnet man J als das *Eikonal.*

Wir stellen uns die Aufgabe, die Ableitungen des Eikonals J nach seinen $2n+2$ unabhängigen Veränderlichen mit Hilfe der Funktion F auszudrücken.

Der grundlegende Zusammenhang beruht auf dem folgenden Satz: *Die partiellen Ableitungen des Eikonals werden durch die Formeln*

$$
(13)\qquad \begin{aligned} J_t &= -L(p_\nu, q_\nu, t) = F(\dot q_\nu, q_\nu, t) - \sum_\nu \dot q_\nu F_{\dot q_\nu} \\ J_{q_\nu} &= p_\nu = F_{\dot q_\nu} \end{aligned}
$$

$$
(13\,\mathrm{a})\qquad \begin{aligned} J_\tau &= L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau) = -F(\dot\varkappa_\nu, \varkappa_\nu, \tau) + \sum \varkappa_\nu F_{\dot\varkappa_\nu} \\ J_{\varkappa_\nu} &= -\pi_\nu = -F_{\dot\varkappa_\nu} \end{aligned}
$$

oder zusammengefaßt

$$
(14)\qquad \left\{ \begin{aligned} \delta J = &-L(p_\nu, q_\nu, t)\,\delta t + \sum_\nu p_\nu\,\delta q_\nu \\ &+ L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\,\delta\tau - \sum_\nu \pi_\nu\,\delta\varkappa_\nu \end{aligned} \right.
$$

gegeben, wobei $\dot q_\nu$, $\dot\varkappa_\nu$, p_ν, π_ν aus (11) bzw. (12) zu entnehmen sind.

Wir gelangen zu diesen Formeln am schnellsten mit Hilfe der kanonischen Darstellung des Variationsproblems. Betrachten wir die $2n+2$ Koordinaten des Anfangspunktes B und Endpunktes A als irgendwie stetig differenzierbar abhängig von einem Parameter ε und bezeichnen Differentiation bezüglich dieses Parameters durch das Symbol δ, so ergibt sich sofort unter Berücksichtigung der für die Extremalen bestehenden kanonischen Differentialgleichungen (7)

$$
\begin{aligned} \delta J = &\Big(\sum_\nu \dot q_\nu p_\nu - L(p_\nu, q_\nu, t)\Big)\,\delta t - \Big(\sum_\nu \dot\varkappa_\nu \pi_\nu - L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\Big)\,\delta\tau \\ &+ \int_\tau^t \Big[(v_\nu\,\delta\dot u_\nu + \dot u_\nu\,\delta v_\nu) - \sum_\nu (L_{u_\nu}\,\delta u_\nu + L_{v_\nu}\,\delta v_\nu)\Big]\,ds \\ = &\Big(\sum_\nu \dot q_\nu p_\nu - L(p_\nu, q_\nu, t)\Big)\,\delta t - \Big(\sum_\nu \dot\varkappa_\nu \pi_\nu - L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\Big)\,\delta\tau \\ &+ \int_\tau^t (v_\nu\,\delta u_\nu)^{\cdot}\,ds. \end{aligned}
$$

Nun folgt aus (10) unmittelbar

$$
\delta q_\nu = \dot q_\nu\,\delta t + \delta u_\nu\big|_{s=t}
$$

und entsprechend $\delta \varkappa_\nu = \dot{\varkappa}_\nu \delta \tau + \delta u_\nu|_{s=\tau}$. Es ist also wegen

$$\delta J = (\sum_\nu \dot{q}_\nu p_\nu - L(p_\nu, q_\nu, t))\,\delta t - (\sum_\nu \dot{\varkappa}_\nu \pi_\nu - L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau))\,\delta \tau + [\sum_\nu v_\nu \delta u_\nu]_\tau^t$$

$$\delta J = -L(p_\nu, q_\nu, t)\,\delta t + L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\,\delta \tau + \sum_\nu p_\nu \delta q_\nu - \sum_\nu \pi_\nu \delta \varkappa_\nu. \tag{15}$$

Diese Relation enthält unsere Behauptung.

Aus den Gleichungen (13) können wir sofort die Impulsgrößen p_ν eliminieren. Wir erhalten damit *für die geodätische Entfernung J als Funktion des Endpunktes A die „Hamilton-Jacobische" Differentialgleichung*

$$J_t + L(J_{q_\nu}, q_\nu, t) = 0, \tag{16}$$

welche auch die *Eikonalgleichung* genannt wird. Damit ist der in Nr. 1 angekündigte Zusammenhang der Gleichung (8) mit dem Variationsproblem hergestellt. Wie dort bemerkt wurde, sind die charakteristischen Gleichungen von (16) gerade unsere kanonischen Differentialgleichungen; die *Charakteristiken der Hamiltonschen Gleichung sind also die Extremalen des kanonischen Variationsproblemes.*

3. Homogene Integranden. Geodätische Linien. Auch in dem Ausnahmefall, daß F homogen vom ersten Grade in den Größen $\dot{u}_\nu$ ist, läßt sich eine entsprechende Überlegung durchführen. Es wird hier

$$|F_{\dot{u}_\nu \dot{u}_\mu}| \equiv 0 \qquad \text{sowie} \qquad L = -F + \sum \dot{u} F_{\dot{u}_\nu} \equiv 0,$$

und die Legendresche Transformation auf die kanonische Form versagt. In diesem Fall gilt jedoch wie oben in Nr. 2

$$J_t = 0, \qquad J_{q_\nu} = F_{\dot{q}_\nu},$$

wobei nunmehr die Ausdrücke $F_{\dot{q}_\nu}$ homogen vom nullten Grade in den $\dot{q}_\nu$ sind. Hieraus kann man die Verhältnisse der Größen $\dot{q}_\nu$ durch die Ableitungen J_{q_ν} ausdrücken, und die Homogenitätsrelation

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu} = F$$

liefert dann den Ersatz für die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung.

Als Beispiel betrachten wir den Fall der *geodätischen Linien*

$$F = \sqrt{Q}, \qquad Q = \sum_{\nu,\mu} a_{\nu\mu} \dot{u}_\nu \dot{u}_\mu,$$

wobei die Koeffizienten $a_{\nu\mu}$ der quadratischen Form Q Funktionen von $u_1, \ldots, u_n$ sind. Wir erhalten

$$J_t = 0, \qquad J_{q_\nu} = F_{\dot{q}_\nu} = \sum \frac{a_{\nu\mu} \dot{q}_\mu}{F}$$

oder

$$\frac{\dot{q}_\nu}{F} = \sum A_{\nu\mu} J_{q_\mu},$$

wobei die Größen $A_{\nu\mu}$ die zur Matrix $a_{\nu\mu}$ reziproke Matrix bilden. Multiplikation mit $F_{\dot{u}_\nu} = J_{q_\nu}$ und Summation gibt wegen der Homogenitätsrelation die Gleichung

$$\sum_{\mu,\nu} A_{\nu\mu} J_{q_\nu} J_{q_\mu} = 1 \tag{17}$$

als Hamiltonsche partielle Differentialgleichung für die geodätische Entfernung J. Für die Größe $\Gamma = J^2$ folgt die partielle Differentialgleichung

$$\sum_{\nu,\mu} A_{\nu\mu} \Gamma_{q_\nu} \Gamma_{q_\mu} = 4\Gamma. \tag{17a}$$

Z. B. erhalten wir im euklidischen Fall $F = \sqrt{\sum \dot{u}_\nu^2}$ die Differentialgleichung

$$1 = \sum_1^n J_{q_\nu}^2 .$$

Dasselbe allgemeine Resultat (17) erhält man für das Problem der geodätischen Linien, wenn s in F nicht explizit auftritt, folgendermaßen: In den Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{ds} F_{\dot{u}_\nu} - F_{u_\nu} = 0, \qquad F = \sqrt{Q} \tag{18}$$

oder

$$\frac{d}{ds} \frac{Q_{\dot{u}_\nu}}{\sqrt{Q}} - \frac{1}{\sqrt{Q}} Q_{u_\nu} = 0$$

wählen wir den Parameter s so, daß $Q = F^2 = 1$ wird. Die Eulerschen Differentialgleichungen werden dann einfach

$$\frac{d}{ds} Q_{\dot{u}_\nu} - Q_{u_\nu} = 0. \tag{18a}$$

Dieses nunmehr lineare Differentialgleichungssystem hat nun stets Q als Integral[1], so daß wir $Q = 1$ widerspruchsfrei als Zusatzforderung stellen können. Jetzt können wir die neuen Differentialgleichungen (18a) kanonisch transformieren, da sie zu dem quadratischen Integranden Q und nicht mehr zu dem vom ersten Grade homogenen Integranden $\sqrt{Q}$ gehören. Die kanonische Transformation mit H statt L ergibt unter Berücksichtigung der Homogenität von Q

$$\left\{ \begin{aligned} -Q + \sum Q_{\dot{u}_\nu} \dot{u}_\nu &= Q = H(p_\nu, u_\nu) \\ \dot{u}_\nu &= H_{p_\nu} \\ \dot{p}_\nu &= -H_{u_\nu} . \end{aligned} \right. \tag{19}$$

[1] Beweis: Längs einer Extremalen wird Q eine Funktion von s mit der Ableitung

$$\frac{dQ}{ds} = \sum Q_{\dot{u}_\nu} \ddot{u}_\nu + \sum Q_{u_\nu} \dot{u}_\nu .$$

Die rechte Seite ist aber auf Grund der Homogenitätsrelation gleich $2\frac{dQ}{ds} + \sum \dot{u}_\nu \left[Q_{u_\nu} - \frac{d}{ds} Q_{\dot{u}_\nu} \right]$. Wegen (18a) folgt somit $\frac{dQ}{ds} = 2\frac{dQ}{ds}$, also $\frac{dQ}{ds} = 0$.

Nunmehr folgt aus der Zusatzbedingung $H = 1$ unmittelbar die unserer obigen Gleichung (17) äquivalente Gleichung

$$H(J_{u_\nu}, u_\nu) = 1.$$

4. Extremalenfelder und Hamiltonsche Differentialgleichung. Wir kehren zur Diskussion des in Nr. 2 betrachteten geodätischen Abstandes J zurück. Wenn wir den Anfangspunkt B festhalten, wird J eine Funktion der $n+1$ Koordinaten q_ν, t des Endpunktes allein, welche der Hamiltonschen Differentialgleichung (16) genügt; wir setzen dabei, wie schon betont, voraus, daß der Endpunkt A ein Gebiet durchläuft, für welches die Extremale BA und damit auch die in den Formeln (11), (12) eingeführten Feldfunktionen eindeutig bestimmt sind. Ein solches Gebiet nennen wir ein *Feld*.

Der Begriff des Feldes und einer zugehörigen der Hamiltonschen Gleichung genügenden *Abstandsfunktion* von $n+1$ Veränderlichen läßt sich nun wesentlich erweitern. Wir definieren hierzu nicht nur die geodätische Entfernung von einem festen Punkt, sondern auch den *geodätischen Abstand von einer festen Anfangsfläche*

$$T(\varkappa_\nu, \tau) = 0.$$

Zu diesem Begriff des geodätischen Abstandes in einem Falde gelangen wir auf folgende Weise: Wir betrachten für einen Moment den Endpunkt A einer Extremalen als fest und suchen einen Anfangspunkt B auf der vorgegebenen Fläche

$$T(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, \tau) = 0, \tag{20}$$

so daß der geodätische Abstand $J(B, A)$ stationär gegenüber Variationen des Punktes B bleibt. Jetzt haben wir für die Variationen δq_ν, δt des Endpunktes A die Werte Null einzusetzen und erhalten aus unserer Formel (14) für den Anfangspunkt B die Bedingung

$$L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)\,\delta\tau - \sum_{\nu=1}^{n} \pi_\nu\,\delta\varkappa_\nu = 0. \tag{21}$$

Diese Bedingung muß erfüllt sein wie auch immer der Anfangspunkt auf der vorgegebenen Fläche $T = 0$ variiert wird. D. h. diese Gleichung muß eine Folge der Gleichung (20) oder

$$\delta T = \sum T_{\varkappa_\nu}\,\delta\varkappa_\nu + T_\tau\,\delta\tau = 0$$

sein. Dies ist gleichbedeutend mit dem Bestehen der folgenden Bedingungen, der sog. *Transversalitätsbedingungen* mit $L = L(\pi_\nu, \varkappa_\nu, \tau)$ (vgl. Bd. I, Kap. IV, § 5)

$$-L : \pi_\nu = T_\tau : T_{\varkappa_\nu} \tag{22}$$

oder mit $F = F(\dot\varkappa_\nu, \varkappa_\nu, \tau)$

$$F - \sum \dot\varkappa_\nu F_{\dot\varkappa_\nu} : F_{\dot\varkappa_\nu} = T_\tau : T_{\varkappa_\nu}. \tag{22a}$$

Diese Transversalitätsbedingung ist eine Beziehung, welche zwischen den Koordinaten eines Punktes der Fläche $T=0$ und den Ableitungen $\dot{x}_\nu$ bzw. den kanonisch konjugierten Größen π_ν der gesuchten Extremale bestehen muß. Wir nennen eine Extremale, welche in B die Bedingung (22) erfüllt, eine zur Fläche $T=0$ *transversale Extremale*. Ordnen wir jedem Punkt eines solchen Flächenstückes eine Transversale zu, so bilden diese Transversalkurven eine n-parametrige *Transversalenschar*.

Nunmehr sei vorausgesetzt, daß wir zu jedem Punkt des betrachteten Flächenstückes T eine solche transversal stehende Extremale konstruieren können und daß die Schar dieser Extremalen ein gewisses Gebiet um das Flächenstück herum eindeutig bedeckt oder, wie man sagt, ein *Extremalenfeld* bildet. Dann gehört zu jedem Punkt A dieses Feldes eindeutig ein Punkt B auf der Fläche $T=0$. Ebenso sind in dem Felde die Feldgrößen $\dot{q}_\nu$ bzw. die Größen $\dot{q}_\nu$ für die Extremalen als Ortsfunktionen eindeutig bestimmt. Wir können somit den Wert des Eikonals von B bis A als eine Funktion der Koordinaten q_ν, t des Endpunktes A auffassen. Dieses Eikonal stellt die stationäre geodätische Entfernung vom Punkte A zur Fläche $T=0$ dar. Wir bezeichnen sie als geodätischen Abstand des Punktes A von der Fläche.

Der zuerst betrachtete Fall des festen Anfangspunktes B ist der Grenzfall, welcher entsteht, wenn die Anfangsfläche (etwa eine Kugelfläche) sich auf den Punkt B zusammenzieht.

Wie man sehr leicht sieht, ist dieser geodätische Abstand im Spezialfalle des Integranden $F=\sqrt{1+\sum \dot{q}_\nu^2}$ genau der euklidische geradlinige Abstand. In diesem Falle ist das Extremalenfeld identisch mit dem *Normalenfeld* einer Fläche $T=0$, wird also von einer speziellen Art von n-parametrigen Geradenscharen gebildet. Der allgemeine Begriff des Extremalenfeldes ist somit lediglich die Verallgemeinerung dieses elementar-geometrischen Begriffs für den Fall, daß an Stelle des euklidischen Abstandes der durch unser Variationsproblem definierte geodätische Abstand und an Stelle der kürzesten geraden Verbindungslinie die zugehörigen Extremalen treten.

In naheliegender Verallgemeinerung der Verhältnisse beim Spezialfall des euklidischen Abstandes nennt man die Flächen $J=$ konst. eine *Schar von Parallelflächen zu unserem Variationsproblem*.

Da für diesen geodätischen Abstand gemäß den Transversalitätsbedingungen (22), (22a) die Relation (21) besteht, so erhalten wir für den geodätischen Abstand von einer Fläche aus der Formel (14) unmittelbar wieder dieselbe Beziehung wie bei festem Anfangspunkt B

$$\delta J = -L\,(p_\nu, q_\nu, t)\,\delta t + \sum p_\nu \delta q_\nu. \tag{23}$$

Mithin gelangen wir zu folgendem allgemeinen Resultat: *Sind* $\dot{q}_\nu = \dot{q}_\nu(q_1, \ldots, q_n, t)$ *bzw.* $p_\nu = p_\nu(q_1, \ldots, q_n, t)$ *die Feldgrößen in einem zu einer stetig differenzierbaren Fläche* $T=0$ *transversalen Extremalenfeld,*

so sind in diesem Feld die partiellen Ableitungen des geodätischen Abstandes $J = J(q_1, \ldots, q_n, t)$ von der Fläche $T = 0$ gegeben durch die Formeln

$$(13') \qquad \begin{aligned} J_t &= F(\dot{q}_\nu, q_\nu, t) - \sum \dot{q}_\nu F_{\dot{q}_\nu} = -L(p_\nu, q_\nu, t) \\ J_{q_\nu} &= F_{\dot{q}_\nu} = p_\nu . \end{aligned}$$

Der geodätische Abstand selbst genügt der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung (Eikonalgleichung)

$$(16') \qquad J_t + L(J_{q_\nu}, q_\nu, t) = 0.$$

Diese Behauptung ist an die Voraussetzung gebunden, daß unsere Feldkonstruktion, auf welcher der Begriff des geodätischen Abstandes beruht, möglich war. Ein Ausnahmefall für die Möglichkeit dieser Feldkonstruktion tritt ein, wenn die Anfangsfläche selbst von den zu ihr transversalen Extremalen erzeugt wird („charakteristisch" ist), wenn diese also ganz in die Anfangsfläche hineinfallen. Jedoch ist es durchaus möglich, daß die Transversalkurven die Anfangsfläche berühren, ohne in sie hineinzufallen und dann doch zur Konstruktion eines eindeutig an die Anfangsfläche nach einer Seite hin anschließenden Feldes dienen können. Man nennt dann die Anfangsfläche eine *Brennfläche*. Das obige Resultat bleibt auch in diesem Falle bestehen.

Wir formulieren sogleich die *Umkehrung* des obigen Satzes: *Ist $J(q_1, \ldots, q_n, t)$ eine Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung* (16'), *so gibt es ein Extremalenfeld, dessen Extremalen transversal zu allen Flächen einer Schar $J =$ konst., z. B. zu der Anfangsfläche $J = 0$ stehen. J bedeutet dann den geodätischen Abstand von der Anfangsfläche in diesem Extremalenfeld.*

Um diese Umkehrung zu beweisen, gehen wir von einer vorgegebenen Lösung J der Differentialgleichung (16') aus und definieren in dem betrachteten Gebiet n Feldgrößen p_ν durch die Gleichungen

$$p_\nu = J_{q_\nu}(q_1, \ldots, q_n, t).$$

Es wird dann vermöge (16')

$$J_t = -L(p_\nu, q_\nu, t).$$

Nunmehr definieren wir eine n-parametrige Schar von Kurven durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{q}_\nu = L_{p_\nu}, \qquad (\nu = 1,$$

wobei wir in der rechten Seite für die Größen p_ν die Werte

$$p_\nu = J_{q_\nu}(q_1, \ldots, q_n, t)$$

einzusetzen haben. Längs einer Integralkurve dieses Differentialgleichungssystems werden die Größen p_ν Funktionen des Parameters t, und die Differentiation nach diesem Parameter ergibt

$$\dot{p}_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} J_{q_\nu q_\mu} \dot{q}_\mu + J_{q_\nu t}.$$

Andererseits erhalten wir durch Differentiation der Differentialgleichung (16′) nach q_ν die Indentität

$$J_{q_\nu t} + L_{q_\nu} + \sum_\mu L_{p_\mu} J_{q_\nu q_\mu} = 0,$$

somit

$$\dot{p}_\nu = -L_{q_\nu}.$$

Diese Gleichungen zusammen mit der obigen $\dot{q}_\nu = L_{p_\nu}$ charakterisieren unsere Kurvenschar als eine n-parametrige Schar von Extremalen. Indem wir in den Transversalitätsbedingungen (22) π_ν durch J_{q_ν} und $\varkappa_\nu, \tau$ durch q_ν, t und T durch $J(q_1, \ldots, q_n, t)$ ersetzen, erkennen wir unmittelbar, daß die Schar dieser Extremalen auf allen Flächen der Schar $J =$ konst. transversal steht.

5. Strahlenkegel. Huyghens Konstruktion. Die Überlegungen dieses Abschnittes haben gezeigt, daß wir durch Lösung des Variationsproblems Lösungen der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung konstruieren können, welche noch von einer willkürlichen Funktion abhängen. Nämlich Lösungen, welche auf einer vorgegebenen Fläche $T = 0$ verschwinden, und daß wir damit alle möglichen Lösungen der partiellen Differentialgleichung erschöpfen. Der Spezialfall, daß die Anfangsfläche in einen Punkt ausartet, daß also J der geodätische Abstand von einem festen Punkt wird, führt zu den Lösungen der partiellen Differentialgleichung, die wir früher als *Integralkonoid* oder *Strahlenkegel* bezeichnet haben. Die entsprechenden Flächen $J =$ konst. $= c$ werden naturgemäß als *geodätische Kugeln* bezeichnet.

Es sei bemerkt, daß die Huyghenssche Enveloppen-Konstruktion hier wiederum eine ganz natürliche Beleuchtung erfährt. Wollen wir zu einer gegebenen Fläche $T = 0$ eine Schar von Parallelflächen $J =$ konst. $= c$ konstruieren, so können wir die Schar von Parallelflächen auffassen als Enveloppen der geodätischen Kugeln vom Radius c um die Punkte B der Ausgangsfläche. Man wird unmittelbar den Zusammenhang mit der Theorie des vollständigen Integrals feststellen.

6. Hilberts invariantes Integral zur Darstellung des Eikonals. Die Berechnung der Ableitungen des Eikonals J für ein Feld erlaubt uns ohne weiteres, das Eikonal selbst als ein vom Wege unabhängiges Linienintegral eines zu diesen Ableitungen gehörigen totalen Differentials hinzuschreiben. Wir betrachten in dem Felde des u_ν, s-Raumes eine willkürliche stückweise glatte Kurve C, gegeben durch Funktionen $u_\nu(s)$ mit dem Parameter s und den Ableitungen $u'_\nu(s)$, welche einen Punkt B des Feldes mit dem variablen Endpunkt A verbindet. Die zu den Punkten des Feldes gehörigen, den Extremalen des Feldes entsprechenden Ableitungen und Impulse als Funktionen von u_ν, s bezeichnen wir wie in Nr. 1 mit $\dot{u}_\nu$, v_ν.

Für irgendeine Funktion J des Ortes $A: u_\nu$, s gilt bei beliebigem Integrationsweg C zwischen den Punkten B und A

$$J(A) - J(B) = \int_B^A \left(\sum_\nu J_{u_\nu} du_\nu + J_s ds \right. \tag{25}$$

Wir wählen speziell für J den geodätischen Abstand des Punktes von der Anfangsfläche $T = 0$ in unserem Felde. Liegt B auf der Fläche $T = 0$, so ist insbesondere $J(B) = 0$. Führen wir nun für die partiellen Ableitungen von J gemäß (13′) ein, so erhalten wir für das Eikonal die folgende Integraldarstellung

$$J(q_\nu; t) - J(\varkappa_\nu, \tau) = \int_B^A \left(F(u_\nu, s, \dot{u}_\nu) + \sum_\nu (u'_\nu - \dot{u}_\nu) F_{\dot{u}_\nu} \right) ds \tag{26}$$

oder

$$J(q_\nu, t) - J(\varkappa_\nu, \tau) = \int_B^A \left(\sum_\nu v_\nu u'_\nu - L(v_\nu, u_\nu, s) \right) ds.$$

Nochmals sei betont: Die Größen u'_ν bedeuten die Ableitungen längs der Kurve C, während die Größen $\dot{u}_\nu$ bzw. v_ν die früher definierten Feldgrößen sind, d. h. die Ableitungen bzw. Impulsgrößen, welche im betreffenden Punkte zu den hindurchgehenden Feldextremalen gehören. Diese Feldgrößen sind dabei als gegebene Funktionen der Ortskoordinaten in dem Felde anzusehen.

Das „Hilbertsche unabhängige Integral" kann umgekehrt folgendermaßen charakterisiert werden. Wenn $v_\nu(q_1, \ldots q_n, t)$; $\nu = 1, \ldots, n$ in einem Gebiet des $n+1$-dimensionalen Raumes gegebene Funktionen sind, derart, daß das in diesem Raum über eine Kurve erstreckte Integral $\int_B^A (\sum v_\nu u'_\nu - L(v_\nu, u_\nu, s)) ds$ zwischen zwei Punkten B und A vom Wege unabhängig ist, so sind die Größen $v_\nu(u_1, \ldots, u_n, t)$ Feldgrößen eines Extremalenfeldes, und der Wert des Integrals als Funktion des Endpunktes A ist die zu diesem Extremalenfeld gehörige Abstandsfunktion J.

Der Beweis folgt fast unmittelbar aus der Bemerkung, daß für ein solches vom Wege unabhängiges Integral auf Grund elementarer Sätze der Integralrechnung im Endpunkt A die Relationen

$$J_{q_\nu} = p_\nu$$
$$J_t = -L$$

gelten müssen. Daher genügt ein solches Integral als Funktion der oberen Grenze der Hamiltonschen Differentialgleichung (16′), und somit folgt unsere Behauptung nunmehr unter Berufung auf den Satz aus Nr. 4, wonach jede Lösung der Hamiltonschen Differentialgleichung Abstandsfunktion in einem Extremalenfelde ist.

Wir haben damit erkannt, daß eine vollständige Äquivalenz zwischen der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung, der Konstruktion

von Extremalenfeldern und zugehörigen Abstandsfunktionen und der Aufsuchung eines vom Wege unabhängigen Integrals vom Typus (26) besteht.

7. Der Satz von Hamilton und Jacobi. Von der Hilbertschen Integraldarstellung aus ergibt sich ein neuer Beweis bzw. eine neue Beleuchtung des Theorems von JACOBI (vgl. § 8): Ist $J(q_1, \ldots, q_n, t, a_1, \ldots, a_n)$ eine Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung, für welche die Determinante $|J_{a_\nu q_\mu}|$ nicht verschwindet, so erhalten wir in den Gleichungen $J_{a_\nu} = b_\nu$ und $J_{q_\nu} = p_\nu$; $\nu = 1, \ldots, n$, die von $2n$-Parametern abhängigen Lösungen der kanonischen Gleichungen.

Nach den früheren Ergebnissen gehört nämlich zu der Funktion J ein noch von den Parametern $a_1, \ldots, a_n$ abhängiges Extremalenfeld, und J ist in diesem Extremalenfeld durch das Hilbertsche Integral (26) dargestellt. Nunmehr ergibt sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen die selbstverständlich ebenfalls vom Wege C unabhängige Integraldarstellung

$$J_{a_\mu} = \int_B^A \sum_{\nu=1}^n (u'_\nu - \dot{u}) F_{\dot{u}_\nu a_\mu} ds. \tag{27}$$

Wenn nun der Punkt A sich von einer Anfangslage A_0 aus längs einer Extremalen des zum Wertsystem a_i zugehörigen Feldes bewegt, d. h. wenn der betreffende Bogen von C eine Extremale und daher $u'_\nu = \dot{u}_\nu$ ist, so verschwindet dort der Integrand in (27) und es wird

$$J_{a_\nu} = b_\nu, \tag{28}$$

wobei b_ν eine Konstante, nämlich der Wert des Integrals zwischen B und A_0 ist. Umgekehrt, wenn durch die Gleichungen $J_{a_\nu} = b_\nu$ eine Kurvenschar $q_\nu(t; a_\nu, b_\nu)$ definiert wird — was wegen der Bedingung $|J_{a_\nu} q_\mu| = 0$ für eine gewisse Umgebung der betrachteten Wertsysteme a_i, b_i nur auf eine Weise möglich ist —, so müssen diese Kurven Extremalen sein. Denn auf einem Kurvenbogen C dieser Schar muß der Integrad in (27) verschwinden; es entsteht ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Differenzen $u'_\nu - \dot{u}_\nu$ mit der Determinante $|F_{\dot{u}_\nu a_\mu}|$. Andererseits sind nach Nr. 4 die Feldgrößen gegeben durch $v_\nu = F_{\dot{u}_\nu} = J_{u_\nu}$. Also ist unsere Determinante identisch mit $|J_{u_\nu a_\mu}|$, verschwindet somit nach Voraussetzung nicht. Somit ist $u'_\nu - \dot{u} = 0$; diese Kurven C sind also Extremalen.

Zu einem anderen Beweise des Hamilton-Jacobischen Satzes werden wir im nächsten Paragraphen gelangen.

§ 10. Kanonische Transformationen und Anwendungen.

1. Die kanonische Transformation. Die kanonische Darstellung der charakteristischen Differentialgleichungen eines Variationsproblems bzw. einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung bildet den

Ausgangspunkt für die in den Anwendungen wichtige *Theorie der kanonischen Transformationen.* Gegeben sei eine Funktion $L(v_\nu, u_\nu, s)$ und das zugehörige kanonische Differentialgleichungssystem

$$(29)\qquad \begin{aligned}\dot{u}_\nu &= L_{v_\nu}\\ v_\nu &= -L_{u_\nu}.\end{aligned}$$

Wir stellen die Frage, ob und wie wir die kanonisch konjugierten Variablen v_ν, u_ν in neue Variable

$$(30)\qquad \eta_\nu = \eta_\nu(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n); \qquad \omega_\nu = \omega_\nu(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n)$$

transformieren und aus der Funktion $L(v_\nu, u_\nu, s)$ eine neue Funktion $\Lambda(\eta_\nu, \omega_\nu, t)$ so gewinnen können, daß den Lösungen der kanonischen Differentialgleichungen (29) Lösungen der neuen kanonischen Differentialgleichungen

$$(31)\qquad \begin{aligned}\dot{\omega}_\nu &= \Lambda_{\eta_\nu}\\ \eta_\nu &= -\Lambda_{\omega_\nu}\end{aligned}$$

entsprechen. Eine solche Transformation der Variablen bzw. des kanonischen Differentialgleichungssystems heißt eine *kanonische Transformation.* Am einfachsten gewinnen wir kanonische Transformationen vom Variationsproblem aus. Unsere Forderung wird nämlich erfüllt, wenn durch die Transformation (30) der Integrand des einen kanonischen Variationsproblems in den Integranden des anderen kanonischen Variationsproblems übergeht, abgesehen von einem additiven Divergenzausdruck (vgl. Bd. I, Kap. IV, § 3, 5), welcher auf die Eulerschen Differentialgleichungen keinen Einfluß hat. Dies wird z. B. erreicht, wenn die Transformation (30) so gewählt wird, daß identisch in den Größen $u_\nu, \omega_\nu, \dot{u}_\nu, \dot{\omega}_\nu$ die Relation

$$(32)\qquad \sum \dot{u}_\nu v_\nu - L(v_\nu, u_\nu, s) \equiv \sum \dot{\omega}_\nu \eta_\nu - \Lambda(\eta_\nu, \omega_\nu, s) + \frac{dW}{ds}$$

gilt mit einer willkürlich gewählten Funktion

$$W = W(\omega_\nu, u_\nu, s)$$

und

$$\frac{dW}{ds} = \sum W_{\omega_\nu} \dot{\omega}_\nu + \sum W_{u_\nu} \dot{u}_\nu + W_s .$$

Unsere Gleichung (32) geht über in

$$\sum \dot{u}_\nu (v_\nu - W_{u_\nu}) - \sum \dot{\omega}_\nu (\eta_\nu + W_{\omega_\nu}) - L + \Lambda - W_s = 0$$

und, da sie identisch in den Ausdrücken $\dot{u}_\nu, \dot{\omega}_\nu, u_\nu, \omega_\nu$ bestehen soll, erhalten wir sofort den folgenden Satz: Wir gewinnen eine von einer willkürlichen Funktion $W(\omega_\nu, u_\nu, s)$ abhängige kanonische Transformation der Gleichungen (29) in die Gleichungen (31) durch die Relationen

$$(33)\qquad \begin{aligned}v_\nu &= W_{u_\nu}\\ \eta_\nu &= -W_{\omega_\nu}\\ \Lambda &= L + W_s\end{aligned}$$

Dabei haben wir natürlich nachträglich in der Größe Λ als unabhängige Veränderliche statt v_ν und u_ν die Größen η_ν und ω_ν einzuführen.

Zu anderen Formen für die Erzeugung der kanonischen Transformationen gelangen wir in ganz entsprechender Weise, indem wir andere Veränderliche bevorzugen und entsprechend von der zweiten in Nr. 1 auf S. 97 gegebenen Form des kanonischen Variationsproblemes ausgehen. Z. B.: Es sei W eine willkürliche Funktion von v_ν, ω_ν, t. Dann liefern die Gleichungen

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} u_\nu &= W_{v_\nu} \\ \pi_\nu &= -W_{\omega_\nu} \\ \Lambda &= L - W_s \end{aligned}\right.$$

wiederum eine kanonische Transformation, wenn man in Λ nachträglich als Variable die Größen ω_ν, η_ν einführt. Ebenso erhält man zwei weitere entsprechende Formen für kanonische Transformationen mit Hilfe von willkürlichen Funktionen

$$W(u_\nu, \eta_\nu, t) \quad \text{und} \quad W(v_\nu, \eta_\nu, t).$$

Stets sind diese willkürlichen Funktionen dadurch gekennzeichnet, daß sie je von einer Reihe der alten und einer Reihe der neuen kanonischen Veränderlichen abhängen.

2. Neuer Beweis des Jacobischen Satzes. Mit Hilfe unseres Resultates gewinnen wir einen einfachen neuen Beweis des Satzes von JACOBI. Wir versuchen, die gegebenen kanonischen Differentialgleichungen (29) zu lösen, indem wir eine kanonische Transformation mit einer Funktion Λ so bestimmen, daß diese Funktion identisch verschwindet, daß also für jede Bahnkurve die beiden neuen kanonisch konjugierten Variablen konstant werden.

Diese Funktion Λ finden wir auf Grund der Voraussetzung, daß wir eine Lösung $J(u_1, \ldots, u_n;\ a_1, \ldots, a_n, t)$ der Hamiltonschen Differentialgleichung $J_t + L(J_{u_\nu}, u_\nu, s) = 0$ besitzen, welche außer von den unabhängigen Veränderlichen noch von den n Parametern $a_1, \ldots, a_n$ abhängt, und für welche $|J_{u_\nu a_\mu}|$ im betrachteten Gebiet nicht Null ist. Wir wählen nun bei der Erzeugung einer kanonischen Transformation als $W(u_\nu, \omega_\nu, s)$ die Funktion $J(u_\nu, \omega_\nu, s)$ und erhalten sofort nach (33) die kanonische Transformation

$$v_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu}, \qquad \eta_\nu = -\frac{\partial J}{\partial \omega_\nu}, \qquad \Lambda = L(u_\nu, v_\nu, t) + \frac{\partial J}{\partial s}.$$

Auf Grund des Bestehens unserer Differentialgleichung identisch in $v_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu}$, u_ν und s wird aber nunmehr tatsächlich $\Lambda \equiv 0$. Die neuen kanonischen Differentialgleichungen lauten somit

$$\dot{\omega}_\nu = 0, \qquad \dot{\eta}_\nu = 0$$

und ihre Lösungen
$$\omega_\nu = a_\nu = \text{konst.}$$
$$\eta_\nu = J_{a_\nu} = b_\nu = \text{konst.},$$
was die Aussage des Hamilton-Jacobischen Satzes ist.

3. Variation der Konstanten (kanonische Störungstheorie). Eine weitere Anwendung ist die für die Astronomie und Atomphysik wichtige *kanonische Störungstheorie:* Wir nehmen an, daß die Funktion L als Summe erscheint

$$L = L_1(u_\nu, v_\nu, s) + L_2(u_\nu, v_\nu, s) \tag{35}$$

und daß die Integration der kanonischen Differentialgleichungen mit der Funktion L_1 schon geleistet worden ist; d. h., daß wir schon ein vollständiges Integral $J(u_\nu, a_\nu, s)$ der partiellen Differentialgleichung

$$J_t + L_1\left(u_\nu, \frac{\partial J}{\partial u_\nu}, s\right) = 0$$

besitzen. Dann transformieren wir die kanonischen Differentialgleichungen des zur Funktion L gehörigen Problems, indem wir für diese kanonische Transformation die Funktion $J(u_\nu, \omega_\nu, s)$ als erzeugende Funktion statt W wählen. Mit anderen Worten: Wir führen die kanonisch konjugierten Variablen durch
$$v_\nu = J_{u_\nu}$$
$$\eta_\nu = -J_{\omega_\nu}$$
und die neue Legendresche Funktion
$$\Lambda = L + J_s = L - L_1 = L_2$$
ein.

Wenn das „Störungsglied" L_2 nicht vorhanden, d. h. gleich Null wäre, so würden nach Nr. 2 die neuen kanonisch konjugierten Veränderlichen für jede Bahnkurve des Differentialgleichungssystems Konstanten sein. Nunmehr gehen sie vermöge des Störungsgliedes L_2 in neue Variable über, welche den kanonischen „*Störungsgleichungen*"

$$\dot\omega_\nu = \frac{\partial L_2}{\partial \eta_\nu}, \qquad \dot\eta_\nu = -\frac{\partial L_2}{\partial \omega_\nu} \tag{36}$$

genügen.

In manchen Fällen kann durch eine solche Zerspaltung des Integrationsproblems eine wesentliche Vereinfachung erzielt werden.

Anhang zum zweiten Kapitel.

§ 1. Erneute Diskussion der charakteristischen Mannigfaltigkeiten.

Wir wollen in diesem Paragraphen unseren auf das Anfangswertproblem bezüglichen Überlegungen eine etwas andere Wendung geben, wobei wir zu einer Herleitung der charakteristischen Bedingung für eine charakteristische Mannigfaltigkeit gelangen, welche den Vorzug hat,

auf partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung bequemer übertragbar zu sein.

1. Formale Vorbemerkungen zur Differentiation in n Dimensionen. In einem Bereiche der unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ möge eine mit stetigen Ableitungen versehene Funktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ und an einer Stelle P mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ zugehörige Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, zusammengefaßt als Vektor a, gegeben sein, für welche $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$ ist. Dann können wir durch den Punkt P eine gerade Linie legen, deren Punkte vermittels eines Parameters s durch die Ausdrücke $x_1 + a_1 s, \ldots, x_n + a_n s$ gegeben werden. Nunmehr ist als Ableitung der Funktion u nach s oder auch als eine Ableitung von u in der durch den Vektor a gegebenen „Richtung" der Ausdruck

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum a_i u_{x_i}$$

definiert.

Der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

bedeutet dann in jedem Punkte Differentiation in Richtung des Vektors a[1].

Sei im n-dimensionalen Raum durch die Gleichung $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine $n-1$-dimensionale Fläche B gegeben und $u(x_1, \ldots, x_n)$ als eine auf dieser Fläche sowie in ihrer Umgebung mit stetigen Ableitungen versehene Funktion. Sei weiter P ein Punkt der Fläche, für den

$$\sum \varphi_{x_i}^2 \neq 0$$

[1] Sind die Größen a_i stetig differenzierbare Ortsfunktionen $a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, so bilden die durch die a_i in jedem Punkte des Raumes definierten Richtungen dort ein Richtungsfeld, dessen Bahnkurven vermittels eines Parameters s eindeutig durch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d x_i}{d s} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben werden. Dann bedeutet $\frac{\partial}{\partial s}$ die Ableitung nach diesem Parameter s. s ist dabei nicht notwendig die Bogenlänge auf der Bahnkurve; diese Bogenlänge σ ist vielmehr mit s durch die Gleichung

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \sum_i a_i^2$$

verknüpft. Die Ableitung der Funktion ω auf der Kurve nach der Bogenlänge σ wird entsprechend durch

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sum a_i^2}} \sum a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

gegeben.

ist und $a \neq 0$ ein beliebiger Vektor. Wir betrachten die Ableitung von u auf B in der durch a gegebenen Richtung:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i a_i u_{x_i}. \tag{1}$$

Gilt dann

$$a_i = \lambda \varphi_{x_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

so bezeichnen wir (1) als „*normal gerichtete*“ *Ableitung*; ist außerdem noch $\sum_i a_i^2 = 1$, also

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_i \frac{\varphi_{x_i}}{\sqrt{\sum_i \varphi_{x_i}^2}} u_{x_i},$$

so sprechen wir von der „*normalen*“ *Ableitung* von u in P.

Ist der Vektor a in P tangential an B, also senkrecht zur Normalen in P, d. h. gilt

$$\sum_i a_i \varphi_{x_i} = 0,$$

so wird $\frac{\partial u}{\partial s} = \sum a_i u_{x_i}$ als „in der Fläche B liegende“ oder „*tangentiale*“ *Ableitung* bezeichnet; dagegen heißt $\frac{\partial u}{\partial s}$ für $\sum_i a_i \varphi_{x_i} \neq 0$ eine „*aus B herausführende*“ *Ableitung*.

Z. B. stellen die Ausdrücke

$$\varphi_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \varphi_{x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2}$$

für jedes Indexpaar $i \neq k$ in der Fläche liegende Ableitungen vor; wir können den Ausdruck als Differentiation in derjenigen Richtung deuten, die durch den Schnitt der Fläche $\varphi = 0$ mit der zweidimensionalen, durch die x_i- und k_k-Richtung in P aufgespannten Ebene gegeben wird.

Die in der Fläche liegenden Ableitungen von u hängen nur von der Werteverteilung von u auf der Fläche selbst ab, sind also bekannt, wenn die Werte von u lediglich auf der Fläche B bekannt sind. Denn führen wir etwa statt $x_1, \ldots, x_n$ in der Umgebung von B neue unabhängige Veränderliche $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ein, derart daß $\xi_2, \ldots, \xi_n$ $n-1$ unabhängige Parameter in B sind, während $\xi_1 = \varphi$ wird, so ergibt sich $u_{x_i} = u_\varphi \varphi_{x_i} + \ldots$, und wobei die Punkte Ausdrücke bedeuten, welche lediglich Ableitungen von u nach den inneren Parametern $\xi_2, \ldots, \xi_n$ enthalten. Es ist also der Ausdruck $\sum_i a_i u_{x_i} = u_\varphi \sum_i a_i \varphi_{x_i} + \sum_{k \neq 1} u_{\xi_k} \sum_i a_i \xi_{k x_i}$ unter der Bedingung $\sum a_i \varphi_{x_i} = 0$ bekannt, sobald die Werte $u(0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ von u auf B gegeben sind.

Es versteht sich von selbst, daß wir aus $n-1$ voneinander unabhängigen in B liegenden Ableitungen von u (z. B. falls $\varphi_{x_n} \neq 0$ ist, $\varphi_{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_n} - \varphi_{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$) und einer herausführenden Ableitung (z. B. u_φ) alle Ableitungen von u linear zusammensetzen können.

Alle Ableitungen u_{x_i} sind also bekannt, wenn in B die Funktion u und eine herausführende Ableitung von u gegeben ist.

Ist speziell $n = 2$ und $x_1 = x$, $x_2 = y$, so wird B eine Kurve in der x, y-Ebene, die wir uns auch mittels eines Parameters τ durch zwei Funktionen $x(\tau), y(\tau)$ dargestellt denken können. Die Bedingung für Differentiation innerhalb B lautet jetzt einfach $a_1 \frac{dy}{d\tau} - a_2 \frac{dx}{d\tau} = 0$ oder bei Wahl eines geeigneten Parameters t statt τ

$$a_1 = \frac{dx}{dt}, \qquad a_2 = \frac{dy}{dt}.$$

2. Anfangswertproblem und charakteristische Mannigfaltigkeiten. Wir formulieren das früher Kap. II, § 7 behandelte Anfangswertproblem in einer etwas modifizierten Weise, indem wir alle Aussagen auf den n-dimensionalen x-Raum beziehen. Es sei eine $n-1$-dimensionale Grundmannigfaltigkeit B in diesem Raum gegeben durch eine Relation

$$(3) \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

während wir früher (Kap. II, § 7) die Anfangsmannigfaltigkeit durch $n-1$-unabhängige Parameter $t_1, \ldots, t_{n-1}$ dargestellt haben. Den Punkten dieser Mannigfaltigkeit B seien irgendwelche Funktionswerte u zugeordnet, eine sog. „Belegung" von B. Wir erweitern dadurch B zu der „belegten Mannigfaltigkeit" C. Ebenso können wir durch Hinzufügung weiterer Belegungsfunktionen $p_1, \ldots, p_n$, welche der Streifenbedingung

$$(3') \qquad du = \sum_i p_i \, dx_i$$

oder mit Parametern geschrieben $\frac{\partial u}{\partial t_\nu} = \sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_\nu}$ in B genügen, B zu einer „*Streifenmannigfaltigkeit*" C_1 erweitern.

Ohne nun nochmals die eigentliche Lösung des Anfangswertproblems zu diskutieren, stellen wir uns die Frage: Eine gegebene Anfangsmannigfaltigkeit B sei mit einer Belegung u, bzw. u und p_i versehen. Für eine Funktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ soll in einer — hinreichend kleinen — Umgebung von B mit diesen Anfangswerten die Differentialgleichung $F(x_i, u, u_{x_i}) = 0$ gelten. Was besagt diese Differentialgleichung längs der Anfangsmannigfaltigkeit B für die Funktion u und deren Ableitungen?

Betrachten wir zunächst eine quasilineare Differentialgleichung

$$(4) \qquad \sum_i a_i u_{x_i} \quad a.$$

Durch die Relationen $\frac{dx_i}{ds} = a_i$ ist in dem mit Werten u belegten x-Raum eine bestimmte Differentiation $\frac{\partial}{ds} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

definiert, die wir lediglich auf der Mannigfaltigkeit B betrachten, in der wir die Belegungsfunktion u gegeben haben. Diese Differentiation bzw. ihre Richtung heiße dort *charakteristische Differentiation* bzw. *charakteristische Richtung*. Die Differentialgleichung besagt nun einfach

$$\frac{du}{ds} = a. \tag{5}$$

D. h. sie legt, da die rechte Seite auf B bekannt ist, den Wert der *charakteristischen Ableitung* von u längs B fest.

Es besteht nun die folgende *Alternative:* Entweder gilt in dem betrachteten Punkte von B

$$\gamma = \sum a_i \varphi_{x_i} \neq 0. \tag{6}$$

Dann führt die charakteristische Differentiationsrichtung in dem betreffenden Punkte aus der Mannigfaltigkeit B hinaus. Die Gleichung (5) d. h. also die Differentialgleichung (4), liefert eine hinausführende Ableitung von u, und damit sind durch die Vorgabe von u auf B und durch die Differentialgleichung alle ersten Ableitungen von u in B bzw. im betreffenden Punkte von B bestimmt. Indem wir dieses Ergebnis auf die nach den Veränderlichen, z. B. nach x_k differenzierte Differentialgleichung anwenden, sehen wir, daß auch die höheren Ableitungen von u längs B eindeutig bestimmt sind.

Oder es gilt an der betreffenden Stelle von B die Gleichung

$$\gamma = \sum a_i \varphi_{x_i} = 0, \tag{7}$$

die wir als *Charakteristikenbedingung* bezeichnen. Dann ist $\frac{\partial u}{\partial s}$ eine innere, also durch die Vorgabe von u auf B schon bekannte Ableitung. Die Relation (5) stellt somit für die Vorgabe von u eine weitere einschränkende Bedingung dar, welche erfüllt sein muß, wenn eine Lösung u der partiellen Differentialgleichung in der Umgebung von B mit den vorgegebenen Anfangswerten auf B existieren soll. Die beiden Relationen (3) und (5) kennzeichnen B, wenn sie in jedem Punkte P erfüllt sind, mit der Belegung u als eine *charakteristische Grundmannigfaltigkeit*[1].

Unsere Alternative erinnert an die bei linearen Gleichungssystemen (vgl. Bd. I, Kap. I).

Entweder bestimmt die Differentialgleichung im Punkte P der vorgegebenen Grundmannigfaltigkeit $\varphi = 0$ bei beliebig auf ihr vorgegebenen Werten von u in eindeutiger Weise die zugehörigen Ableitungen von u, oder die Differentialgleichung stellt dort eine Bedingungsgleichung für die vorgegebenen Anfangswerte u dar.

[1] Man erkennt leicht, daß unser Ausdruck γ und die in II, § 7 betrachtete Determinante Δ bis auf einem von Null verschiedenen Faktor übereinstimmen, woraus die Äquivalenz der obigen Kennzeichnung der charakteristischen Mannigfaltigkeit mit der früheren Definition hervorgeht.

Analoge Überlegungen gelten für die allgemeine Differentialgleichung

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{8}$$

Nur müssen wir uns hier erst durch Differentiation nach den unabhängigen Veränderlichen ein System neuer Differentialgleichungen verschaffen, welche in den Ableitungen $\frac{\partial p_i}{\partial x_\nu}$ linear, also in den p_i quasilinear sind[1]:

$$\sum_{\nu=1}^{n} F_{p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} + F_u p_i + F_{x_i} = 0 \tag{9}$$

Eine zulässige Anfangsmannigfaltigkeit sei wiederum gegeben durch die Grundmannigfaltigkeit $B: \varphi = 0$ und auf ihr die Belegung $u(x_1, \ldots, x_n)$, $p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_n(x_1, \ldots, x_n)$, wobei zwischen diesen Funktionen auf B die Bedingungsgleichung $F = 0$ und die Streifenbedingung

$$du = \sum p_\nu dx_\nu \tag{3'}$$

bestehen soll.

Wiederum definieren wir in den Punkten von B eine charakteristische Differentiation durch

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum F_{p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{10}$$

Die Relationen (9) gehen damit auf B über in

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = -F_{x_i} - p_i F_u \tag{11}$$

Sie liefern in einem Punkte von B die Alternative:

Entweder es ist

$$\gamma = \sum \varphi_{x_i} F_{p_i} \neq 0.$$

In diesem Falle führt die Differentiation $\frac{\partial}{\partial s}$ aus B hinaus, und unsere Relationen (11) liefern, da die rechte Seite durch die Vorgaben bekannt ist, die hinausführenden Ableitungen von p_i längs B. Es sind somit alle zweiten Ableitungen von u durch die Vorgaben und die Differentialgleichung längs B eindeutig bestimmt.

Oder es gilt die „*charakteristische Bedingung*“

$$\sum \varphi_{x_i} F_{p_i} = 0 \tag{12}$$

auf der belegten Mannigfaltigkeit bzw. dem betreffenden Punkte von B. Dann ist $\frac{\partial}{\partial s}$ eine innere Differentiation. Die Relation (11) auf B besagt also, da nunmehr auch die linke Seite durch die Vorgaben bekannt

[1] Ein solcher Linearisierungsprozeß wird immer wieder eine wichtige Rolle spielen.

ist, daß zwischen den Vorgaben die weiteren über (3′) hinaus einschränkenden Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial p_i}{\partial s} = -F_{x_i} - \dot{p}_i F_u$$

bestehen müssen. *Ist $\gamma = 0$ überall auf B, so heißt B, wenn auch noch diese weiteren charakteristischen Bedingungen* (11) *und die Streifenbedingung* (3′) *erfüllt sind, eine charakteristische Grundmannigfaltigkeit zu der Streifenmannigfaltigkeit, welche durch die Belegung von B mit u und $p_1, \ldots, p_n$ entsteht.* Man wird diese neue Definition mit der aus Kap. II, § 7 leicht als äquivalent erkennen.

Es sei erwähnt, daß wir zu der charakteristischen Bedingung formal noch auf anderen Wegen gelangen können. Beispielsweise können wir davon ausgehen, daß die Ausdrücke

$$(13) \qquad p_i \varphi_{x_n} - p_n \varphi_{x_i} = A_i, \qquad (i = 1, \ldots, u - 1)$$

wenn auf B überall $\varphi_{x_n} \neq 0$ ist, innere Ableitungen von u bedeuten und daher zugleich mit der Vorgabe von u bekannt sind. Man kann daher versuchen, aus diesen Ausdrücken und der Gleichung

$$F(x_i, u, p_i) = 0$$

längs B die Werte der p_i zu berechnen. Die Bedingung dafür, daß dies nicht eindeutig möglich ist, ist das Verschwinden der Funktionaldeterminante dieser n Gleichungen mit Bezug auf $p_1, \ldots, p_n$. Diese Determinante ist aber

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} F_{p_1}, & F_{p_2}, & E_{p_3} & \ldots & F_{p_n} \\ \varphi_{x_n} & 0 & 0 & \ldots & -\varphi_{x_1} \\ 0 & \varphi_{x_n} & 0 & \ldots & -\varphi_{x_2} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \varphi_{x_n}, & -\varphi_{x} \end{vmatrix} = (-1)^n \left(\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \varphi_{x_i}\right) \varphi_{x_n}^{n-}$$

und somit gewinnen wir durch die Forderung der Nichtbestimmbarkeit der p_i unsere Charakteristikenbedingung (7) wieder.

Endlich noch eine Bemerkung über die Natur der Charakteristikenbedingung. Diese Gleichung wird, im nichtlinearen Falle, erst sinnvoll, wenn wir für u und p: entsprechende Einsetzungen machen, etwa charakteristische Mannigfaltigkeiten auf einer gegebenen Integralfläche J: $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ betrachten. Setzen wir u und die Größen $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x_i in F_{p_i} ein, so kennzeichnet die Relation

$$(12) \qquad \sum_i F_{p_i} \varphi_{x_i} = 0,$$

wenn sie für $\varphi = 0$ erfüllt ist, die so auf J definierte Mannigfaltigkeit als charakteristisch. Ist die Relation nicht nur für $\varphi = 0$,

sondern identisch in $x_1, \ldots, x_n$ erfüllt, so wird sie zu einer linearen homogenen Differentialgleichung für die Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Sie definiert alsdann eine J erzeugende einparametrige Schar von charakteristischen Mannigfaltigkeiten $\varphi = c =$ konst. (vgl. hierzu Kap. I, § 5, S. 25). Will man die Relation (12), falls sie nur für eine einzige Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$ gefordert wird, als partielle Differentialgleichung schreiben, so denke man die Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$ etwa in der Form

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) - x_n = 0$$

ausgedrückt, wo nunmehr $x_1, \ldots, x_{n-1}$ unabhängige Veränderliche sind. Setzt man überall in (12) statt x_n die Funktion ψ ein und schreibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \psi_{x_1}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} = \psi_{x_{n-1}}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = -1,$$

so erhält man in den lediglich $n-1$ unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ für ψ die echte partielle Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{p_i} \psi_{x_i} - F_{p_n} = 0. \tag{13}$$

Es sei schließlich noch darauf hingewiesen, daß die charakteristischen Kurven dieser partiellen Differentialgleichungen (12), (13) bzw. (7) mit denen der ursprünglichen zusammenfallen.

§ 2. Systeme quasilinearer Differentialgleichungen mit gleichem Hauptteil. Neue Herleitung der Charakteristikentheorie.

Ein von den Überlegungen in Kap. II, § 7 etwas verschiedener Zugang[1] zur Charakteristikentheorie ergibt sich aus der Betrachtung des folgenden Systems von quasilinearen Differentialgleichungen:

$$\sum^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\varkappa} = b_\mu. \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

Die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$, die ebenso wie die b_μ von den Größen $x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m$ abhängen mögen, sind dabei in allen Gleichungen (1) identisch. Wir nennen ein solches Differentialgleichungssystem ein *System mit gleichem Hauptteil.*

Wir beweisen vorbereitend den folgenden Satz (vgl. Kap. I, § 5, Nr. 2): *Das System (1) ist mit einer homogenen linearen Differentialgleichung für eine Funktion von $m+n$ Variablen äquivalent.*

Es sei ein Lösungssystem $u_1, \ldots, u_m$ von (1) implizit in der Form

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m) = 0$$

$$\varphi_m(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m) = 0$$

[1] Vgl. auch eine Note von H. Cooley in Bull. Am. Math. Soc. Oct. 1937.

oder allgemeiner ein noch von den Parametern $c_1, \ldots, c_m$ abhängiges Lösungssystem in der Form

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1, \ldots, x_n;\, u_1, \ldots, u_m) = c_1 \\
(2) \qquad &\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varphi_m(x_1, \ldots, x_n;\, u_1, \ldots, u_m) = c_n
\end{aligned}
$$

gegeben. Um die Möglichkeit der Berechnung der $u_1, \ldots, u_m$ zu sichern, sei vorausgesetzt, daß die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)}$ überall von Null verschieden ist. Durch Differentiation der Gleichungen (2) ergeben sich alsdann die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, \ldots, m \\ \varkappa = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

und daraus nach Multiplikation mit $a_\varkappa$ und Summation über $\varkappa$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \left(\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} \right) = 0$$

also wegen (1):

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} = 0. \tag{3}$$

Wir erkennen, daß die Funktionen $\varphi = \varphi_\mu$ des Systems (2) identisch in $x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_m$ die Relation (3), d. h. auch identisch in $x_1, \ldots, x_n$, $u_1, \ldots, u_m$ dieselbe lineare Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x_\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{m} b_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial u_\lambda} = 0 \tag{3'}$$

erfüllen. Führen wir die Bezeichnungen

$$b_\lambda = a_{n+\lambda}, \qquad u_\lambda = x_{n+\lambda}, \qquad r = m + n$$

ein, so geht (3′) schließlich in die Differentialgleichung

$$\sum_{\varkappa=1}^{r} a_\varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x_\varkappa} = 0 \tag{3''}$$

für eine Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ über; der erste Teil unseres Satzes ist damit bewiesen.

Umgekehrt seien nun m Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ der Differentialgleichung (3″) gegeben, deren Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)}$ nirgends verschwinde. Wir zeigen, daß die aus den Gleichungen

$$\varphi_\mu(x_1, \ldots, x_m;\, u_1, \ldots, u_m) = c_\mu$$

berechneten Funktionen $u_1, \ldots, u_m$ dem System (1) genügen. Durch Differentiation erhalten wir zunächst die Gleichungen

$$\frac{\quad}{\partial x_\varkappa} \cdot \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} = 0$$

und daraus wiederum nach Multiplikation mit $a_\varkappa$ und Summation über $\varkappa$ unter Benutzung von (3):

$$\sum_{\lambda=1}^{\cdots} b_\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_\lambda} : \sum_{\varkappa=1} \sum_{\lambda=1} a_\varkappa \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa}$$

oder

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\lambda} \left(b_\lambda - \sum^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} \right) = 0$$

Da die Determinante der Größen $\frac{\partial \varphi_\mu}{d u_\lambda}$ nicht verschwindet, so muß

$$b_\lambda - \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\varkappa} = 0$$

gelten, d. h. das System (1) erfüllt sein.

Nach Kap. II, § 2 ist das Integrationsproblem der linearen Differentialgleichung (3′) mit der Integration des charakteristischen Differentialgleichungssystems

$$\frac{d x_\varkappa}{d s} = a_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, \ldots, r)$$

äquivalent. Wir erkennen somit auch die *Äquivalenz des Systems* (1) *von partiellen Differentialgleichungen mit gleichem Hauptteil mit einem System von* $m+n$ *gewöhnliche Differentialgleichungen, nämlich mit dem System*

$$\text{(4)} \qquad \frac{d x_\varkappa}{d s} = a_\varkappa, \quad \frac{d u_\lambda}{d s} = b_\lambda. \qquad \begin{matrix} (\varkappa = 1, \ldots, n) \\ (\lambda = 1, \ldots, m) \end{matrix}$$

Wir verwenden diese Ergebnisse, um erneut die *Charakteristikentheorie allgemeiner Differentialgleichungen erster Ordnung zu entwickeln.* Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\text{(5)} \qquad F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0$$

und ersetzen sie durch das folgende System von $n+1$ quasilinearen Differentialgleichungen für $u, p_1, \ldots, p_n$ mit gleichem Hauptteil, gebildet mit der Funktion $F(x_1, \ldots, x_n; u, p_1, \ldots, p_n)$

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{\nu} F_{p_\nu} \frac{\partial p_i}{\partial x_\nu} + F_u p_i + F_{x_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ &\sum F_{p_\nu} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} - \sum F_{p_\nu} p_\nu = 0. \end{aligned}$$

Die ersten n dieser Gleichungen entstehen dabei formal aus (5) durch Differentiation nach x_i und nachträglicher Ersetzung von u_{x_i} durch p_i und $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_\nu}$ durch $\frac{\partial p_i}{\partial x_\nu}$. Die letzte Gleichung würde durch dieses Ersetzen in eine Trivialität übergehen.

Nunmehr können wir ausgehend von dem quasilinearen Differentialgleichungssystem (6) mit gleichem Hauptteil für die $n+1$ unbekannten Funktionen u, p_i die Theorie der Differentialgleichung (5) entwickeln. Zuerst folgt aus den vorangehenden Überlegungen, daß die Integration von (6) mit der des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -F_{x_i} - p_i F_u, \quad \frac{du}{ds} = \sum_\nu p_\nu F_{p_\nu} \tag{7}$$

äquivalent ist, d. h. mit der Integration der in Kap. II, § 7 auf anderem Wege abgeleiteten charakteristischen Differentialgleichungen von F. Wir zeigen ferner, daß ein passend spezialisiertes Anfangswertproblem des Systems (6) mit dem der Differentialgleichung (5) äquivalent ist, womit sich eine neue Begründung der in II, § 7 vermittels der charakteristischen Differentialgleichungen (7) durchgeführten Lösung eines Anfangswertproblems ergibt.

Zunächst ist selbstverständlich, daß für jede Lösung der Differentialgleichung (5) die Funktionen u und $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ eine Lösung von (6) sind. Nunmehr betrachten wir umgekehrt ein solches Lösungssystem u, p_i des Differentialgleichungssystems (6), welches folgenden Anfangsbedingungen genügt: C sei eine $n-1$-dimensionale nirgends charakteristische Anfangsmannigfaltigkeit im x, u-Raum. Auf C seien Anfangswerte von p_i gegeben, so daß auf C überall $F = 0$ und außerdem

$$du - \sum_\nu p_\nu \, dx_\nu = 0 \tag{7a}$$

gilt. Ferner sollen die durch jeden Punkt von C gehenden Lösungen des Differentialgleichungssystems (7) mit den entsprechenden Anfangswerten von p_i eine C enthaltende n-dimensionale Fläche S mit der Gleichung $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ bilden. Dann ist diese Funktion u — zusammen mit der zugehörigen Funktion p_i — gerade die Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems von (6).

Wir wollen zeigen, daß sie auch das Anfangswertproblem für $F = 0$ löst. Hierzu brauchen wir lediglich zu beweisen, daß auf der ganzen Fläche S die Relationen

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = R(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) - u_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

erfüllt sind. Hierzu beachten wir, daß für die Funktion $P_i(x_1, \ldots, x_n)$

die Relationen

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_\varkappa} - \frac{\partial P_\varkappa}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_\varkappa} - \frac{\partial p_\varkappa}{\partial x_i} \tag{8}$$

bestehen.

Ferner wird

$$R_{x_i} = \sum_\nu F_{p_\nu} \frac{\partial p_\nu}{\partial x_i} + F_{x_i} + F_u u_{x_i}$$

und daher auf Grund der ersten der Differentialgleichungen (6) und (8)

$$R_{x_i} = \sum_\nu F_{p_\nu} \left(\frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu}\right) - F_u P_i. \tag{9}$$

Andererseits schreibt sich die letzte der Differentialgleichungen (6) in der Form

$$0 = \sum_\nu F_{p_\nu} P_\nu \tag{10}$$

und somit erhalten wir

$$\sum_i R_{x_i} F_{p_i} = 0,$$

d. h. indem wir zur Abkürzung

$$F_{p_i} = a_i$$

setzen, wobei dann die Größen $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ als bekannte Koeffizienten anzusehen sind:

$$\sum a_i R_{x_i} = 0. \tag{10a}$$

Betrachten wir nun auf der Integralfläche S die sie erzeugenden Kurven, welche durch (7) definiert sind, so besagt die Gleichung (10a) auf jeder dieser Kurven

$$\frac{dR}{ds} = 0,$$

d. h. da R im Anfangspunkt auf C verschwindet,

$$R \equiv 0 \tag{11}$$

auf S. Nunmehr wird aus unserer obigen Gleichung (9)

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu} - \sum_\nu a_\nu \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} + P_i F_u = 0$$

während die Gleichung (10)

$$\sum a_\nu P_\nu = 0$$

durch Differentiation nach x_i eine Relation der Form

$$\sum a_\nu \frac{\partial P_\nu}{\partial x_i} + \sum b_\nu P_\nu = 0$$

ergibt, wobei $b_\nu = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_i}$ wiederum eine bekannte Funktion der Größen $x_1, \ldots, x_n$ ist. Somit erhält man aus (9), (11) Gleichungen der Form

$$\sum_\nu a_\nu \frac{\partial P_i}{\partial x_\nu} + \sum_\nu c_\nu P_\nu = 0,$$

wobei auch die Größen c_ν bekannte Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind. Auf jeder der charakteristischen Kurven $\frac{dx_i}{ds} = a_i$ gehen diese letzten Gleichungen über in

$$\frac{dP_i}{ds} + \sum_\nu c_\nu P_\nu = 0,$$

ein System von gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen für die Größen P_i. Aus (10) zusammen mit den Anfangsbedingungen (7a) ergibt sich aber, daß die Anfangswerte der Größen P_i auf C Null sind, weil C nicht charakteristisch ist und somit die auf S. 83 definierte Determinante Δ nicht verschwindet. Also verschwinden diese Größen identisch. Damit ist der gewünschte Beweis der Äquivalenz unseres Anfangswertproblems für (6) und (5) geführt.

Literatur zum ersten und zweiten Kapitel.

KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig 1930.

BIEBERBACH, L.: Differentialgleichungen, Bd. 6 dieser Sammlung.

GOURSAT: Equations aux derivées partielles du 1. ordre, Paris 1921.

CARATHEODORY: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig 1935.

Drittes Kapitel.

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung im allgemeinen.

In Bd. I sind zahlreiche einzelne Probleme linearer partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung behandelt worden. In den folgenden Kapiteln wird es sich um eine mehr systematische Theorie handeln. Allerdings ist bei Differentialgleichungen höherer Ordnung im Gegensatz zur ersten Ordnung eine erschöpfende Auflösungstheorie ausgeschlossen. Wir müssen uns zudem auf eine Auswahl der für die mathematische Physik besonders wichtigen methodischen Gedanken beschränken.

Für die Anwendungen spielen — weil einer mehr expliziten Behandlung zugänglich — die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten eine besonders hervortretende Rolle. Aber auch deren tieferes Verständnis erfordert allgemeinere prinzipielle Begriffsbildungen. Wir stellen daher im ersten Teil dieses Kapitels solche allgemeinere Betrachtungen voran, insbesondere mit der Tendenz, wesentlich verschiedene Typen von Differentialgleichungen bzw. Differentialausdrücken voneinander zu trennen.

§ 1. Normalformen bei linearen Differentialgleichungsausdrücken zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

1. Elliptische, hyperbolische, parabolische Normalformen. Wir beginnen mit der Frage: Gegeben sei ein linearer Differentialausdruck zweiter Ordnung für die Funktion $u(x, y)$

$$L[u] = a\, u_{xx} + 2\, b\, u_{xy} + c\, u_{yy},$$

wobei die Koeffizienten a, b, c gegebene stetig differenzierbare und nicht zugleich verschwindende Funktionen von x und y in dem betrachteten Gebiet G sind. Wir studieren den Differentialausdruck

$$L[u] + g(x, y, u, u_x, u_y) = L[u] + \cdots, \tag{1}$$

wobei hier wie auch im folgenden die Punkte am Schluß einen die zweiten Ableitungen nicht enthaltenden Differentialausdruck $g(x, y, u, u_x, u_y)$ bedeuten, welcher für das Folgende nicht notwendig als linear vorausgesetzt zu werden braucht. Unser Ziel ist, durch Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher

$$\xi = \varphi(x, y) \qquad \eta = \psi(x, y) \tag{2}$$

den Differentialausdruck (1) bzw. die zugehörige Differentialgleichung

$$L[u] + \cdots = 0 \tag{1a}$$

auf einfache Normalformen zu transformieren. Dabei wird aus dem Differentialausdruck (1) ein äquivalenter Ausdruck der Form

$$\alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \cdots = \Lambda[u] + \cdots, \tag{3}$$

die Funktion $u(x, y)$ geht in eine Funktion $u(\xi, \eta) = u(x, y)$ über und wir erhalten

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x; \; u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y, \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \varphi_x^2 + 2 u_{\xi\eta} \varphi_x \psi_x + u_{\eta\eta} \psi_x^2 + \cdots \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \varphi_x \varphi_y + u_{\xi\eta} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + u_{\eta\eta} \psi_x \psi_y + \cdots \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \varphi_y^2 + 2 u_{\xi\eta} \varphi_y \psi_y + u_{\eta\eta} \psi_y^2 + \cdots, \end{aligned}$$

wo wiederum die Punkte Ausdrücke bedeuten, in denen keine Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion u auftreten. Es wird also

$$\Lambda[u] = \alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \cdots, \tag{4}$$

wo

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= a \varphi_x^2 + 2 b \varphi_x \varphi_y + c \varphi_y^2 \\ \beta &= a \varphi_x \psi_x + b (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + c \varphi_y \psi_y \\ \gamma &= a \psi_x^2 + 2 b \psi_x \psi_y + c \psi_y^2 \end{aligned} \right. \tag{5}$$

ist. Man bestätigt übrigens unmittelbar die Relation

$$\alpha\gamma - \beta^2 = (a c - b^2)(\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x)^2. \tag{6}$$

Da wir in der Transformation (2) zwei Funktionen φ und ψ zur Verfügung haben, so liegt der Versuch nahe, durch geeignete Wahl dieser Funktionen den neuen Differentialausdruck (3) in einfachere Gestalten zu verwandeln, indem wir den Koeffizienten α, β, γ zwei passende Bedingungen auferlegen.

Als solche Bedingungen formulieren wir:

$$\begin{aligned} &\text{I. } \alpha = \gamma, \quad \beta = 0 \\ &\text{II. } \alpha = -\gamma, \quad \beta = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = \gamma = 0 \\ &\text{III. } \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

Welche der durch diese Bedingungen gekennzeichneten Normalformen sich durch unsere Transformation erreichen läßt, hängt nun lediglich von dem algebraischen Charakter der quadratischen Form

$$Q(l, m) = a l^2 + 2 b l m + c m^2$$

in den Variablen l, m ab, wobei x und y als Parameter in den Koeffizienten angesehen werden. Es zeigt sich nämlich, daß man die Koeffizienten α, β, γ von $\Lambda[u]$ aus den Koeffizienten a, b, c von $L[u]$ gewinnen kann, indem man durch

$$l = \lambda \varphi_x + \mu \varphi_y \qquad m = \lambda \psi_x + \mu \psi_y$$

neue Variable λ, μ in $Q(l, m)$ einführt und für diese Form so

$$Q = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda\mu + \gamma\mu^2$$

erhält.

Je nach dem Typus der Form Q unterscheiden wir nun verschiedene Typen von Differentialausdrücken. Wir nennen — an einer Stelle x, y — den Differentialausdruck $L[u]$

I. *elliptisch*, wenn $ac - b^2 > 0$

II. *hyperbolisch*, wenn $ac - b^2 < 0$

III. *parabolisch*, wenn $ac - b^2 = 0$

ist.

Entsprechend lauten die *Normalformen des Differentialausdruckes*

$$\text{I. } \Lambda[u] = \alpha(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + \cdots$$

$$\text{II. } \Lambda[u] = \alpha(u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}) + \cdots$$

oder

$$\Lambda[u] = 2\beta u_{\xi\eta} + \cdots$$

$$\text{III. } \Lambda[u] = \alpha u_{\xi\xi} + \cdots$$

und die Normalformen der Differentialgleichung

$$\text{I. } u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \cdots = 0$$

$$\text{II. } u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \cdots = 0$$

oder

$$u_{\xi\eta} + \cdots = 0$$

$$\text{III. } u_{\xi\xi} + \cdots = 0.$$

Für eine gegebene Stelle x, y läßt sich eine solche Normalform schon durch eine lineare Transformation erreichen. Gibt nämlich

$$l = \varkappa_1\lambda + \varkappa_2\mu, \qquad m = \varkappa_3\lambda + \varkappa_4\mu$$

eine lineare Transformation von Q auf die entsprechende Normalform für den betreffenden Punkt x, y, so brauchen wir nur

$$\varphi = \varkappa_1 x + \varkappa_2 y, \qquad \psi = \varkappa_3 x + \varkappa_4 y$$

zu wählen.

Wir wollen nun annehmen, daß der *Differentialausdruck* $L[u]$ *in jedem Punkte des betrachteten Bereiches* G *denselben Typus* besitzt. Dann ist unser Ziel, zu zeigen, daß durch geeignete Transformationsfunktionen φ, ψ die *Normalform in jedem Punkte* von G erzielt werden kann. Diese Tatsache ist durch die algebraische Analogie noch nicht begründet, beruht vielmehr auf der Lösbarkeit gewisser Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zum Beweise dieser Behauptungen dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß im Gebiet G überall $a \neq 0$ ist. Andernfalls würde entweder die äquivalente Voraussetzung $c \neq 0$ gelten, oder es würde schon die zweite erwähnte Normalform vorliegen.

Man hat nun die Transformationsfunktionen φ und ψ so zu bestimmen, daß die neuen Koeffizienten α, β, γ den obigen Bedingungen genügen. Wir nehmen zunächst an, $L[u]$ sei in G hyperbolisch und stellen die Forderung $\alpha = \gamma = 0$; dann ergeben die Gleichungen (5) für das Verhältnis $\lambda:\mu$ der Ableitungen φ_x und φ_y bzw. ψ_x und ψ_y dieselbe quadratische Gleichung

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung hat zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_1 : \mu_1$ und $\lambda_2 : \mu_2$, da in G

$$ac - b^2 < 0$$

gilt. Wir dürfen wegen $a \neq 0$ annehmen

$$\mu_1 = \mu_2 = 1.$$

Dann sind durch (7) in G die Größen λ_1 und λ_2 als stetig differenzierbare Funktionen von x und y definiert. Wir erhalten somit im hyperbolischen Falle die Normalform

$$\beta u_{\xi\eta} + \cdots = 0,$$

indem wir die Transformationsfunktionen φ und ψ aus den Gleichungen

$$\varphi_x - \lambda_1 \varphi_y = 0, \qquad \psi_x - \lambda_2 \psi_y = 0 \tag{8}$$

bestimmen. Diese beiden linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung liefern in der Tat zwei Kurvenscharen $\varphi =$ konst. und $\psi =$ konst., welche wir auch als Lösungsscharen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' + \lambda_1 = 0, \qquad y' + \lambda_2 = 0$$

bzw.

$$a y'^2 - 2by' + c = 0$$

definieren können, wenn wir längs der Scharkurven y als Funktion von x auffassen.

Die Relation

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2}{a}\sqrt{b^2 - ac}$$

zeigt, daß Kurven der beiden Scharen sich in keinem der betrachteten Punkte berühren können und daß $\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0$ gilt. Aus der Gleichung (6) folgt für $\alpha = \gamma = 0$, daß $\beta \neq 0$ ist.

Die Kurven $\xi = \varphi(x, y) =$ konst. bzw. $\eta = \psi(x, y) =$ konst. heißen *die charakteristischen Grundkurven des linearen hyperbolischen Differentialausdruckes* $L[u]$.

Da wir die Differentialgleichung durch β dividieren dürfen, ergibt sich: *Im hyperbolischen Falle* $ac - b^2 < 0$ *läßt sich die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung* (1) *auf die Normalform*

$$u_{\xi\eta} + \cdots = 0 \tag{9}$$

transformieren, indem man die beiden Scharen der charakteristischen Grundkurven $\xi =$ konst. *und* $\eta =$ konst. *als Koordinatenlinien einführt.*

Gilt im betrachteten Gebiet G die Ungleichung $ac - b^2 > 0$, so ist der Differentialausdruck (1) in G *elliptisch*. In diesem Falle hat die quadratische Gleichung (7) keine reellen, aber wohl zwei konjugiert komplexe Lösungen λ_1 und λ_2, welche komplexwertige stetige Funktionen der reellen Veränderlichen x, y sind. Die Gleichungen $\alpha = \gamma = 0$ werden von keiner Schar reeller Kurven $\varphi =$ konst. befriedigt, es gibt keine charakteristischen Grundkurven. Wenn jedoch a, b, c analytische Funktionen x, y sind und wenn für $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ analytischer Charakter vorausgesetzt wird, so kann man die Differentialgleichungen (8) für komplexe x und y betrachten und wie oben auf die neuen Veränderlichen ξ und η transformieren, die dabei konjugiert komplex werden. Indem man sodann durch die Gleichungen

$$\frac{\xi + \eta}{} = \varrho; \qquad \frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma \tag{11}$$

wieder reelle unabhängige Veränderliche σ und ϱ einführt, erhält man $4u_{\xi\eta} = u_{\sigma\sigma} + u_{\varrho\varrho}$. Wir erhalten so *im elliptischen Falle die Normalform*

$$\Delta u + \cdots = u_{\varrho\varrho} + u_{\sigma\sigma} + \cdots = 0. \tag{12}$$

Für die Umrechnung über das Komplexe ist die einschneidende, durch die Natur der Sache nicht geforderte Voraussetzung analytischer Koeffizienten nötig. Daher ist der folgende direkte, das reelle Gebiet nicht verlassende Weg zur Transformation auf die Normalform im elliptischen Fall vorzuziehen. Indem wir in den Gleichungen (2), (3) ϱ und σ an Stelle von ξ, η schreiben, versuchen wir die Bedingungen

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = 0$$

oder explizite

$$a\varrho_x^2 + 2b\varrho_x\varrho_y + c\varrho_y^2 = a\sigma_x^2 + 2b\sigma_x\sigma_y + c\sigma_y^2$$
$$a\varrho_x\sigma_x + b(\varrho_x\sigma_y + \varrho_y\sigma_x) + c\varrho_y\sigma_y = 0$$

zu erfüllen. Diese Differentialgleichungen können durch eine elementare algebraische Überlegung auf das folgende lineare partielle Differentialgleichungssystem erster Ordnung reduziert werden.

$$\sigma_x = \frac{b\varrho_x + c\varrho_y}{W}, \qquad . = -\frac{a\varrho_x + b\varrho_y}{} \tag{13}$$

wobei

$$W^2 = ac - l$$

ist und für w beide Vorzeichen möglich sind. Aus diesem System, den sog. *Beltramischen Differentialgleichungen*, kann durch Elimination einer der Unbekannten, z. B. σ, unmittelbar die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für die andere der Größen, ϱ, gefunden werden

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{a\varrho_x + b\varrho_y}{W} \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{b\varrho_x + c\varrho_y}{W} = 0. \tag{14}$$

Von der Lösbarkeit dieser Differentialgleichungen (13) bzw. (14) hängt also die Transformation auf die Normalform (12) ab. Wir werden später in Kap. IV § 6 sehen, daß die Lösung dieser Differentialgleichungen und damit die Transformation auf die elliptische Normalform auch im nichtanalytischen Falle möglich ist, sobald für die Koeffizienten a, b, c lediglich stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird. Dabei ist es ausreichend eine einzige spezielle Lösung von (14) zu kennen.

Der dritte Fall ist der *parabolische Fall:* $ac - b^2 = 0$. Unsere quadratische Gleichung (7) hat dann eine reelle Wurzel, und wir können demgemäß eine Kurvenschar $\xi = \varphi(x, y)$ so einführen, daß $\alpha = 0$ wird, dann wird wegen (6) notwendigerweise auch $\beta = 0$, während z. B. für $\psi = x$ in G $\gamma = a \neq 0$ wird. Wir erhalten somit im *parabolischen Falle die Normalform*

$$u_{\eta\eta} + \cdots = 0.$$

Das am Anfang ausgesprochene Resultat ist damit bewiesen.

Es sei bemerkt, daß die Transformation auf die Normalform keineswegs eindeutig bestimmt ist. Z. B. bleibt im elliptischen Falle die Normalform erhalten, wenn wir das ϱ, σ-Gebiet irgendeiner konformen Abbildung unterwerfen.

2. Beispiele. Für unsere drei verschiedenartigen Differentialgleichungstypen haben wir Beispiele schon mehrfach diskutiert. Die einfachste hyperbolische Gleichung ist die Differentialgleichung der schwingenden Saite $u_{xx} - u_{tt} = 0$, wobei wir t statt y geschrieben haben im Hinblick auf die physikalische Bedeutung dieser Variablen als Zeitkoordinate. Diese Gleichung wurde in Kap. I, § 1 vollständig gelöst. Die einfachste elliptische Differentialgleichung ist die Potentialgleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, deren Lösung ebenfalls an verschiedenen Stellen (vgl. z. B. Kap. I, § 3) behandelt worden ist. Auch für die einfache parabolische Differentialgleichung die Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} = 0$ haben wir früher (Kap. I, § 3) Lösungen gefunden.

Wir werden im folgenden erkennen, daß die hier getroffene Typeneinteilung der Differentialgleichungen in sehr wesentlicher Weise die Natur der Differentialgleichungen und ihrer Lösungen betrifft. Im übrigen kann ein und dieselbe Differentialgleichung in verschiedenen Gebieten ein verschiedenes Verhalten zeigen.

Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$u_{xx} + y\, u_{yy} = 0, \tag{15}$$

die wegen $ac - b^2 = y$ für $y > 0$ elliptisch und für $y < 0$ hyperbolisch ist.

Im Gebiet $y < 0$ besitzt (7) d. h. die Gleichung

$$\lambda^2 + y\, \mu^2 = 0$$

die beiden reellen Lösungen $\frac{\lambda}{\mu} = \pm \sqrt{-y}$, so daß für φ und ψ die beiden Differentialgleichungen

$$\varphi_x + \sqrt{-y}\, \varphi_y = 0 \qquad \psi_x - \sqrt{-y}\, \psi_y = 0 \tag{16}$$

entstehen. Sie werden gelöst durch

$$\varphi = x + 2\sqrt{-y}$$
$$\psi = x - 2\sqrt{-y}.$$

Durch die Transformation

$$(17) \qquad \begin{cases} \xi = x + 2\sqrt{-y} \\ \eta = x - 2\sqrt{-y} \end{cases}$$

geht alsdann (15) für $y < 0$ über in die hyperbolische Normalform

$$(18) \qquad u_{xx} + y\,u_{yy} = 4\,u_{\xi\eta} + \frac{2}{\xi - \eta}\,(u_\xi - u_\eta).$$

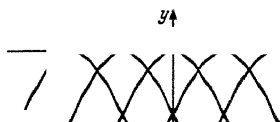
Die charakteristischen Grundkurven sind gegeben durch die Parabeln

$$y = -\tfrac{1}{4}\,(x - c)^2,$$

und zwar die Kurven $\varphi =$ konst. durch die von der x-Achse nach links laufenden, die Kurven $\psi =$ konst. durch die nach rechts laufenden Zweige dieser Parabeln (vgl. Abb. 2).

Abb. 2.

Im Falle $y > 0$ schreiben wir

$$(19) \qquad \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= 2\sqrt{y}. \end{aligned}$$

Durch diese Transformation geht alsdann (15) in die elliptische Normalform

$$(20) \qquad u_{xx} + y\,u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}\,u_\eta$$

über.

Für den Differentialausdruck

$$(21) \qquad u_{xx} + x\,u_{yy}$$

ist $a\,c - b^2 = x$; dieser Ausdruck ist also elliptisch für $x > 0$ und hyperbolisch für $x < 0$.

Im Falle $x < 0$ geht (21) durch die Transformation

$$(22) \qquad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y) = \tfrac{3}{2}\,y + \left(\sqrt{-x}\right)^3 \\ \eta = \psi(x, y) = \tfrac{3}{2}\,y - \left(\sqrt{-x}\right)^3 \end{cases}$$

in die Normalform

$$(23) \qquad u_{xx} + x\,u_{yy} = 9\,x\left[u_{\xi\eta} - \frac{1}{6\,(\xi - \eta)}\,(u_\xi - u_\eta)\right] \qquad (\xi > \eta)$$

über. Die charakteristischen Grundkurven sind die Neilschen Parabeln

$$y - c = \pm\,\tfrac{2}{3}\left(\sqrt{-x}\right)^3,$$

und zwar ergeben die nach unten gerichteten Zweige die Kurven $\varphi =$ konst. und die nach oben gerichteten die Kurven $\psi =$ konst.

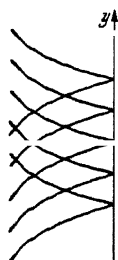



Abb. 3.

Im Falle $x > 0$ schreiben wir

$$\xi = \tfrac{3}{2} y - i\sqrt{x^3}$$
$$\eta = \tfrac{3}{2} y + i\sqrt{x^3},$$

setzen

$$\varrho = \frac{\xi + \eta}{2} = \frac{3}{2} y \tag{24}$$
$$\sigma = \frac{\xi - \eta}{2i} = -\sqrt{x^3}$$

und erhalten durch diese Transformation die Normalform

$$u_{xx} + x u_{yy} = \frac{9}{4} x \left[(u_{\varrho\varrho} + u_{\sigma\sigma}) + \frac{1}{3\sigma} u_\sigma \right]. \tag{25}$$

Die Funktionen (24) genügen den Beltramischen Differentialgleichungen

$$\sigma_x = -\sqrt{x}\, \varrho_y \tag{26}$$
$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{x}} \varrho_x .$$

§ 2. Normalformen quasilinearer Differentialgleichungen.

1. Normalformen. Die Typeneinteilung und die Transformation in gewisse Normalformen läßt sich auch auf nichtlineare Differentialgleichungen bzw. Differentialausdrücke verallgemeinern. Es ist dabei wie auch später zweckmäßig, von folgenden Abkürzungen Gebrauch zu machen:

$$p = u_x, \; q = u_y, \; r = u_{xx}, \; s = u_{xy}, \; t = u_{yy}.$$

Wir beschränken uns hier auf den weitaus wichtigsten Fall der quasilinearen Differentialausdrücke

$$L[u] = a r + 2 b s + c t + d, \tag{1}$$

wo nun a, b, c, d gegebene Funktionen der Größen x, y, u, p, q sind. Auch hier nennen wir den Differentialausdruck *elliptisch*, wenn $a c - b^2 > 0$, *hyperbolisch*, wenn $a c - b^2 < 0$, *parabolisch*, wenn $a c - b^2 = 0$ ist. Der Unterschied ist, daß diese Typeneinteilung nicht mehr a priori für den Differentialausdruck (1) unabhängig von der betreffenden Funktion u vorgenommen werden kann, sondern noch von der vorliegenden Funktion $u(x, y)$ abhängt. Demgemäß wird auch die Transformation auf Normalformen abhängig von der betrachteten Funktion $u(x, y)$.

Wir bemerken zunächst allgemein, daß bei Einführung von neuen Veränderlichen $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ mit der Funktionaldeterminante

$$D = \varphi_x \psi_y - \psi_x \varphi_y = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

die Formeln

$$(2)\qquad \begin{cases} D x_\xi = \eta_y \qquad D x_\eta = -\xi_y \\ D y_\xi = -\eta_x \quad D y_\eta = \xi_x \\ p = u_x = \dfrac{u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \qquad q = u_y = \dfrac{u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \end{cases}$$

gelten. Nunmehr nehmen wir $u(x, y)$ in $L[u]$ als gegebene Funktion an. Dann ist nicht nur u, sondern auch p und q auf dieser Fläche $u = u(x, y)$ als Funktion von x und y bekannt, und bei Einsetzung in $L[u]$ gehen die Koeffizienten a, b, c sowie die Größe d in gegebene Funktionen von x und y über. Wir können hiernach versuchen, für diese spezielle Fläche $u(x,y)$ neue Veränderliche genau entsprechend dem linearen Falle einzuführen, und zwar entweder so, daß nach dieser Transformation für die Koeffizienten des transformierten Differentialausdruckes $L[u]$ auf der vorgelegten Fläche die Bedingungen $\alpha = \gamma = 0$ erfüllt sind oder daß die Bedingungen $\alpha = \gamma$, $\beta = 0$ gelten, je nachdem der für diese Fläche eintretende Fall als hyperbolisch oder elliptisch klassifiziert werden kann — den Fall der parabolischen Ausartung lassen wir hier beiseite. Präzisiert: wir verlangen von den neuen Veränderlichen ξ, η bzw. ϱ, σ, daß für sie entweder das Gleichungssystem

$$(3)\qquad \begin{cases} a \xi_x^2 + 2 b \xi_x \xi_y + c \xi_y^2 = 0 \\ a \eta_x^2 + 2 b \eta_x \eta_y + c \eta_y^2 = 0 \end{cases}$$

oder gemäß (2)

$$(4)\qquad \begin{cases} a y_\xi^2 - 2 b y_\xi x_\xi + c x_\xi^2 = 0 \\ a y_\eta^2 - 2 b y_\eta x_\eta + c x_\eta^2 = 0 \end{cases}$$

gilt oder daß das Gleichungssystem

$$(5)\qquad \begin{cases} a \varrho_x^2 + 2 b \varrho_x \varrho_y + c \varrho_y^2 = a \sigma_x^2 + 2 b \sigma_x \sigma_y + c \sigma_y^2 \\ a \varrho_x \sigma_x + b (\varrho_x \sigma_y + \varrho_y \sigma_x) + c \varrho_y \sigma_y = 0 \end{cases}$$

bzw.

$$(6)\qquad \begin{cases} a y_\varrho^2 - 2 b y_\varrho x_\varrho + c x_\varrho^2 = a y_\sigma^2 - 2 b y_\sigma x_\sigma + c x_\sigma^2 \\ a y_\varrho y_\sigma - b (x_\varrho y_\sigma + y_\varrho x_\sigma) + c x_\varrho x_\sigma = 0 \end{cases}$$

besteht. Die Forderung des Gleichungssystems (3) ist durch zwei reelle Funktionen $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ dann und nur dann erfüllbar, wenn auf der betreffenden Fläche die Bedingung

$$a c - b^2 < 0$$

gilt. *Der Differentialausdruck ist dann für diese Fläche hyperbolisch.* Das Gleichungssystem (5) gehört zu dem *elliptischen Typus,* welcher durch das Bestehen der Relation

$$a c - b^2 > 0$$

längs der Fläche $u(x, y)$ charakterisiert wird. Wie bei linearen Differentialausdrücken gehen unsere Gleichungssysteme (3) und (5) formal durch die komplexe Transformation $\frac{\xi - \eta}{2} = \varrho$; $\frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma$ ineinander über.

Im hyperbolischen Fall lassen sich die Gleichungen (4) genau wie bei linearen Differentialgleichungen in zwei Gleichungen der Form

$$\mu_1 y_\eta + \lambda_1 x_\eta = 0\,, \qquad \mu_2 y_\xi + \lambda_2 x_\xi = 0 \tag{7}$$

zerspalten, wobei nunmehr in den Koeffizienten a, b, c, λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 nicht nur die Veränderlichen x und y sondern auch noch die Größen u, p, q auftreten und $\mu_1 = \mu_2 = 1$ gewählt werden darf, wenn $a \neq 0$ ist. Ersetzen wir durchweg die Größen p und q durch ihre Ausdrücke (2) und denken uns überall ξ und η an Stelle von x und y als neue Veränderliche eingeführt, so stellen die beiden Gleichungen (7) bzw. (4) zwei Relationen zwischen den Größen x, y, u und ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung nach ξ und η dar.

Diese zwei Gleichungen können durchaus nicht dazu dienen, die Kurven $\xi =$ konst. und $\eta =$ konst. unabhängig von $u(x, y)$ zu bestimmen, wie das im linearen Fall möglich war. Sie stellen vielmehr jetzt ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für drei Größen $u(\xi, \eta)$, $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ dar, also ein unterbestimmtes System.

Diese Auffassung legt nahe, die ursprüngliche Differentialgleichung $L[u] = 0$ ebenfalls als eine Differentialgleichung, nunmehr zweiter Ordnung, zwischen diesen drei Funktionen der unabhängigen Veränderlichen ξ, η aufzufassen, so daß die ursprüngliche Differentialgleichung mit diesen beiden „charakteristischen" Gleichungen zusammen ein Differentialgleichungssystem von drei Gleichungen für die drei Funktionen u, x, y bildet. Diese Wendung der Fragestellung entspricht geometrisch der Auffassung, daß die Integralfläche nicht in der unsymmetrischen Form $u(x, y)$, sondern in einer Parameterdarstellung mit Hilfe der unabhängigen „charakteristischen" Parameter ξ und η gesucht wird.

Die Transformation des Differentialausdruckes (1) ergibt dann die folgende Gestalt, in welcher, wie zu erwarten, nur noch die gemischten zweiten Ableitungen nach ξ und η auftreten

$$\begin{aligned} x_{\xi\eta}(y_\xi u_\eta - u_\xi y_\eta) + y_{\xi\eta}(u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi) + u_{\xi\eta}(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \\ = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}} \end{aligned} \tag{8}$$

oder

$$\begin{vmatrix} x_{\xi\eta} & y_{\xi\eta} & u_{\xi\eta} \\ & y_\xi & u_\xi \end{vmatrix} = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \, \frac{}{2\sqrt{b^2 - ac}} \tag{9}$$

oder, indem wir die Größen x, y, u als einen Ortsvektor $\mathfrak{x}$ zusammenfassen und die übliche Vektorschreibweise für inneres und äußeres Produkt verwenden

$$\mathfrak{x}_{\xi\eta}(\mathfrak{x}_\xi \times \mathfrak{x}_\eta) = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 \frac{d}{2\sqrt{b^2 - ac}}\,. \tag{10}$$

Ist speziell $d = 0$, so gelangen wir zu der bemerkenswerten Folgerung: Die Differentialgleichung (8) hängt nicht mehr von der speziellen Gestalt der Ausgangsgleichung ab. *Eine quasilineare Differentialgleichung der Form*

$$a r + 2 b s + c t = 0$$

läßt sich im hyperbolischen Falle in die feste Differentialgleichung zweiter Ordnung (8) *und die beiden noch von den Koeffizienten a, b, c abhängigen Differentialgleichungen erster Ordnung* (7) *transformieren.*

Nochmals sei darauf hingewiesen, daß in unseren Differentialgleichungen überall für p und q die Ausdrücke (2) einzusetzen sind. Unser System (7), (8) von drei partiellen Differentialgleichungen für den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ ist die gesuchte allgemeine Normalform im hyperbolischen Falle.

Falls auf einer Fläche $b^2 - a c < 0$ ist, also der elliptische Fall eintritt, gelangen wir zu einer anderen entsprechenden Transformation auf eine Normalform. Wir erhalten diese Transformation entweder rein formal aus dem obigen Ergebnis durch die Ersetzung $\frac{\xi + \eta}{2} = \varrho$, $\frac{\xi - \eta}{2i} = \sigma$ oder direkt durch den Ansatz (6). Das Ergebnis ist: *Im elliptischen Falle ist unsere Differentialgleichung* (1) *äquivalent dem folgenden Gleichungssystem von drei Differentialgleichungen für die Größen x, y, u bzw. für den Ortsvektor $\mathfrak{x}$ als Funktion der Parameter ϱ* und σ:

$$(11)\qquad \begin{gathered} a y_\varrho^2 - 2 b y_\varrho x_\varrho + c x_\varrho^2 = a y_\sigma^2 - 2 b y_\sigma x_\sigma + c x_\sigma^2 \\ a y_\varrho y_\sigma - b (y_\varrho x_\sigma + y_\sigma x_\varrho) + c x_\varrho x_\sigma = 0 \\ \Delta \mathfrak{x} (\mathfrak{x}_\varrho \times \mathfrak{x}_\sigma) = \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta u \\ x_\varrho & y_\varrho & u_\varrho \\ x_\sigma & y_\sigma & u_\sigma \end{vmatrix} = (x_\varrho y_\sigma - \end{gathered}$$

wo Δ den Potentialausdruck bedeutet.

Speziell, wenn $d = 0$ ist, wird die letzte, die zweiten Ableitungen enthaltende Differentialgleichung wiederum unabhängig von unserer Ausgangsgleichung, und zwar hat sie nunmehr die Gestalt

$$\Delta \mathfrak{x} (\mathfrak{x}_\varrho \times \mathfrak{x}_\sigma) = 0 .$$

2. Beispiel. Minimalflächen. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung der Minimalflächen

$$(12)\qquad (1 + q^2) r - 2 p q s + (1 + p^2) t = 0 .$$

Diese Differentialgleichung ist wegen $a c - b^2 = (1 + p^2 + q^2) > 0$ stets elliptisch. Wir können also auf ein Normalsystem der Form (11) transformieren. Eine kurze Rechnung ergibt für dieses System die folgenden Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{cases} x_\varrho^2 + y_\varrho^2 + u_\varrho^2 = x_\sigma^2 + y_\sigma^2 + u_\sigma^2 & \text{oder} \quad \mathfrak{x}_\varrho^2 = \mathfrak{x}_\sigma^2 \\ x_\varrho x_\sigma + y_\varrho y_\sigma + u_\varrho u_\sigma = 0 & \text{oder} \quad \mathfrak{x}_\varrho \mathfrak{x}_\sigma = 0 \end{cases}$$

$$(14)\qquad \Delta \mathfrak{x} (\mathfrak{x}_\varrho \times \mathfrak{x}_\sigma) = 0 \quad \text{mit} \quad \Delta \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{\varrho\varrho} + \mathfrak{x}_{\sigma\sigma} .$$

Wir können dieses System in eine noch wesentlich einfachere Form setzen, indem wir aus den Gleichungen (13) folgern

$$\mathfrak{x}_{\varrho\varrho}\mathfrak{x}_{\varrho} = \mathfrak{x}_{\varrho\sigma}\mathfrak{x}_{\sigma} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_{\sigma\sigma}\mathfrak{x}_{\varrho} = -\mathfrak{x}_{\varrho\sigma}\mathfrak{x}_{\sigma}.$$

Also
$$\mathfrak{x}_{\varrho}\Delta\mathfrak{x} = 0 \quad \text{und ebenso} \quad \mathfrak{x}_{\sigma}\Delta\mathfrak{x} = 0.$$

Andererseits besagt die Gleichung (14), daß $\Delta\mathfrak{x} = \alpha\mathfrak{x}_{\varrho} + \beta\mathfrak{x}_{\sigma}$ eine lineare Kombination der Vektoren $\mathfrak{x}_{\varrho}$ und $\mathfrak{x}_{\sigma}$ sein muß. Es folgt also $\alpha = \beta = 0$ und somit $\Delta\mathfrak{x} = 0$. Wir gelangen daher zu folgendem Resultat. *Eine Minimalfläche läßt sich in Parameterdarstellung mit passenden Parametern ϱ und σ durch folgende Bedingungen charakterisieren: Die drei Koordinaten u, x, y genügen je für sich der Potentialgleichung*

$$\Delta x = 0, \qquad \Delta y = 0, \qquad \Delta u = 0 \tag{15}$$

und sind den weiteren Bedingungen

$$\begin{cases} A = \mathfrak{x}_{\sigma}^2 - \mathfrak{x}_{\varrho}^2 = 0 \\ B = 2\,\mathfrak{x}_{\varrho}\mathfrak{x}_{\sigma} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

unterworfen.

Mit den in der Differentialgeometrie üblichen Bezeichnungen

$$E = \mathfrak{x}_{\varrho}^2 \qquad F = \mathfrak{x}_{\varrho}\mathfrak{x}_{\sigma} \qquad G = \mathfrak{x}_{\sigma}^2$$

für die Fundamentalgrößen unserer Fläche lauten die Bedingungen (16)

$$E - G = 0, \qquad F = 0.$$

Diese weiteren Bedingungen sind zwar zwei neue Differentialgleichungen neben den drei Gleichungen (15). Sie haben aber nur den Charakter einer Randbedingung. Wir brauchen nämlich diese Zusatzbedingungen (16) nicht mehr in einem zweidimensionalen ϱ, σ-Gebiet zu fordern. Es genügt vielmehr, sie für irgendeine Kurve in der ϱ, σ-Ebene zu stellen. Denn man erkennt sofort, daß auf Grund der Gleichungen (15) die beiden Bedingungen

$$A_{\varrho} = B_{\sigma} \qquad A_{\sigma} = -B_{\varrho}$$

gelten. Somit ist die Größe $A + iB$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $\varrho + i\sigma$ und verschwindet daher identisch, wenn ihr Realteil A auf einer Kurve, z. B. dem Rande, verschwindet und B in einem Punkte Null ist.

Für die Theorie der Minimalflächen sind die folgenden beiden sich aus dem Vorangehenden unmittelbar ergebenden Bemerkungen von Wichtigkeit. Erstens: *Die Abbildung der ϱ, σ-Ebene auf die Minimalfläche ist konform.*

Zweitens: Der Darstellung der Minimalflächen durch Potentialfunktionen ist äquivalent eine von WEIERSTRASS herrührende Darstellung mittels analytischer Funktionen der komplexen Veränderlichen

$$\varrho + i\sigma = \omega.$$

Wir gelangen zu den *Weierstrasschen Darstellungsformeln*, indem wir die Potentialfunktionen x, y, u von ϱ, σ als Realteile analytischer

Funktionen $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $f_3(\omega)$ von ω auffassen. Sind $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$ die konjugierten Potentialfunktionen, so wird also

$$x + i\tilde{x} = f_1(\omega), \quad y + i\tilde{y} = f_2(\omega), \quad u + i\tilde{u} = f_3(\omega).$$

Da wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$x_\sigma = -\tilde{x}_\varrho, \quad y_\sigma = -\tilde{y}_\varrho, \quad u_\sigma = -\tilde{u}_\varrho$$

ist, so wird

$$x_\varrho - i x_\sigma = f_1'(\omega), \quad y_\varrho - i y_\sigma = f_2'(\omega), \quad u_\varrho - i u_\sigma = f_3'(\omega)$$

und die Bedingungen (16) gehen über in

$$\varphi(\omega) = (E - G) - 2iF = \sum f_\nu'(\omega)^2 = 0.$$

Wir erhalten also das Resultat: Alle Minimalflächen lassen sich darstellen durch

$$x = \Re f_1(\omega), \quad y = \Re f_2(\omega), \quad u = \Re f_3(\omega),$$

wo $\Re$ „Realteil" bedeutet und die analytischen Funktionen $f_\nu(\omega)$ der Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{3} f_\nu'(\omega)^2 = 0$$

unterworfen sind.

Da wir übrigens statt ω eine der Funktionen, etwa $f_3(\omega)$, als unabhängige Veränderliche einführen können, so zeigt diese Formel, daß die Gesamtheit der Minimalflächen im wesentlichen nur von einer einzigen willkürlichen analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen abhängt.

§ 3. Klasseneinteilung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung bei mehr unabhängigen Veränderlichen.

1. Elliptische, hyperbolische und parabolische Differentialgleichungen. Bei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen lassen sich — außer bei konstanten Koeffizienten — im allgemeinen nicht mehr einfache Normalformen für ein ganzes Gebiet der unabhängigen Veränderlichen durch Transformation erzielen[1]. Trotzdem besteht auch für diese Differential-

[1] Würden wir z. B. wie in § 1 versuchen, durch eine Transformation

$$\xi_i = t_i(x_1, \ldots, x_n)$$

zu erreichen, daß in dem transformierten Ausdruck

$$\Lambda[u] = \sum_{i,k} \alpha_{ik} u_{\xi_i \xi_k}$$

die gemischten Glieder der Matrix (α_{ik}) verschwinden, so hätten wir die n Funktionen t_i den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Bedingungen (vgl. Formel (4))

$$\sum_{l,s} a_{ls} \frac{\partial t_k}{\partial x_l} \frac{\partial t_i}{\partial x_s} = 0, \qquad (i \neq k)$$

zu unterwerfen. Dieses System von Differentialgleichungen ist aber für $\frac{1}{2}(n-1)n > n$ d. h. für $n > 3$ überbestimmt und daher im allgemeinen unlösbar. Im Falle $n = 3$ ist eine Lösung noch möglich, jedoch können wir nicht mehr wie im Falle $n = 2$ auch die Glieder der Hauptdiagonale noch weiteren Bedingungen unterwerfen.

gleichungen eine fundamental wichtige analoge Klasseneinteilung. Wir betrachten einen linearen Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{x_i x_k} + \cdots \tag{1}$$

bzw. die Differentialgleichung $L[u] = 0$, wobei die Koeffizienten $a_{ik} = a_{ki}$ gegebene stetig differenzierbare Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ in einem Bereiche G sind, und die Punkte Ausdrücke niedriger als zweiter Ordnung in u bedeuten. Den ausgeschriebenen Ausdruck zweiter Ordnung nennen wir wieder den *Hauptteil des Differentialausdrucks*.

Wir gelangen zu der Typeneinteilung unserer Differentialausdrücke (1), indem wir den Einfluß einer Variablentransformation

$$\xi_i = t_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

auf die Gestalt des Differentialausdrucks an einer bestimmten Stelle x_i untersuchen. Schreiben wir zur Abkürzung

$$t_{ik} = \frac{\partial t_i}{\partial x_k},$$

so wird

$$u_{x_l} = \sum_{k=1}^{n} t_{kl} u_{\xi_k}$$

und

$$u_{x_l x_s} = \sum_{k,i} t_{kl} t_{is} u_{\xi_i \xi_k} + \cdots,$$

wobei wieder die Punkte Ausdrücke bedeuten, in welchen höchstens Ableitungen erster Ordnung der Funktion u auftreten. Durch diese Transformation geht (1) über in einen Ausdruck der Form

$$\Lambda[u] = \sum \alpha_{ik} u_{\xi_i \xi_k} + \cdots, \tag{3}$$

für deren Koeffizienten das Transformationsgesetz

$$\alpha_{ik} = \sum_{l,s} t_{kl} t_{is} a_{ls} \tag{4}$$

gilt. Die Koeffizienten des Hauptteils unseres Differentialausdrucks transformieren sich also an der betreffenden Stelle $x_1, \ldots, x_n$ genau so wie die Koeffizienten der quadratischen Form, der sog. *„charakteristischen Form“*:

$$Q = \sum_{i,k} a_{ik} y_i y_k,$$

wenn man in dieser quadratischen Form die unbestimmten Parameter y_i der affinen linearen Transformation in die neuen Parameter η_i

$$y_i = \sum_{l=1}^{n} t_{il} \eta_l \tag{5}$$

unterwirft. Nun wissen wir, daß eine solche quadratische Form sich durch eine affine Transformation stets in eine *„kanonische“ Gestalt*

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \eta_i^2$$

transformieren läßt, wobei die Koeffizienten lediglich die Werte $+1$, -1 oder Null haben können. Die Anzahl der negativen Koeffizienten, der *Trägheitsindex*, ist dabei eine affine Invariante, ebenso wie die Anzahl der verschwindenden Koeffizienten, der „*Defekt*", der quadratischen Form (vgl. Bd. I, Kap. I, §§ 3, 4). Diese Anzahlen werden demgemäß auch für unsere Differentialgleichung an der betreffenden Stelle von Bedeutung sein.

Wir nennen den *Differentialausdruck* an der betreffenden Stelle *elliptisch*, wenn alle $\varkappa_i = 1$ oder alle $\varkappa_i = -1$ sind. Wir nennen sie eigentlich hyperbolisch oder schlechthin „*hyperbolisch*", wenn alle $\varkappa_i$ bis auf eins -1 sind, und das übrig bleibende $+1$ ist bzw. umgekehrt. Sind mehrere Vorzeichen positiv und mehrere negativ, so spricht man gelegentlich von dem *ultrahyperbolischen* Falle. Falls ein oder mehrere der Koeffizienten $\varkappa_i$ verschwinden, so heißt die Differentialgleichung *parabolisch ausgeartet*.

Ist der Differentialausdruck an einer Stelle elliptisch, so können wir durch eine geeignete Variablentransformation u erreichen, daß die Differentialgleichung *an der betreffenden Stelle* die Form $u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} + \cdots = 0$ besitzt; ist sie hyperbolisch, so können wir sie an der betreffenden Stelle in die Form $u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_{n-1} x_{n-1}} - u_{x_n x_n} + \cdots = 0$ transformieren. Wir können jedoch eine solche Normalform im allgemeinen nicht durch ein und dieselbe Transformation für ein ganzes Gebiet erzielen, in welchem die Differentialgleichung das betreffende Verhalten zeigt, da die Transformation auf die kanonische Form durchaus von der Stelle (x_i) abhängt (s. oben S. 135).

2. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wenn jedoch die Koeffizienten a_{ik} in Gleichung (1) Konstanten sind, so läßt sich durch unsere obigen Betrachtungen eine überall zugleich gültige Normalform erzielen. Wir brauchen lediglich die unabhängigen Veränderlichen x_i einer solchen affinen Transformation $\xi_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k$ zu unterwerfen, daß die „charakteristische Form", wenn wir die Variablen gemäß (5) transformieren, in die kanonische Gestalt übergeht. Die Differentialgleichung nimmt dann, wenn wir wieder für die neuen unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ schreiben, die Form an

$$\sum \varkappa_i u_{x_i x_i} + \cdots = 0. \tag{6}$$

Ist nicht nur der Hauptteil zweiter Ordnung, sondern der ganze Ausdruck $L[u]$ linear und homogen, so geht die Differentialgleichung in die Form über

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{i=n} b_i u_{x_i} + c\,u = 0,$$

wobei b_i und c Konstanten sind und $\varkappa_i = \pm 1$ bzw. $\varkappa_i = 0$ gilt.

Man kann nun Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten durch eine weitere Transformation noch wesentlich vereinfachen, indem man die Ableitungen erster Ordnung für diejenigen Variablen x_i, für welche $\varkappa_i \neq 0$ ist, herausschafft. Zu dem Zwecke sehen wir von dem parabolischen Falle ab und führen statt u eine neue gesuchte Funktion v ein durch die Relation

$$u = v e^{-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{b_l}{\varkappa_l}x_l}. \tag{7}$$

Der Differentialausdruck geht dann nach kurzer Rechnung über in

$$L[u] = e^{-\frac{1}{2}\sum\frac{b_l}{\varkappa_l}x_l}\left[\sum \varkappa_i v_{x_i x_i} + \left(c + \frac{1}{4}\sum\frac{b_l^2}{\varkappa_l}\right)v\right]. \tag{8}$$

Bei der Betrachtung nicht parabolisch linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann man sich also auf Differentialgleichungen der Form

$$\sum \varkappa_i v_{x_i x_i} + d v = g(x_1, \ldots, x_n) \tag{9}$$

beschränken, wobei g irgendeine gegebene Funktion der unabhängigen Veränderlichen ist und d eine Konstante bedeutet. *Im elliptischen Falle* werden also *alle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf die Form*

$$\Delta v + d v = g,$$

im hyperbolischen Falle, wenn wir $n+1$ statt n schreiben und $x_{n+1} = t$ setzen, *auf die Form*

$$\Delta v - v_{tt} + d v = g(x_1, \ldots, x_n, t)$$

reduziert.

§ 4. Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen.

In analoger Weise wie bei zweiter Ordnung kann man auch bei Differentialausdrücken höherer Ordnung und bei Systemen von Differentialgleichung auf algebraischem Wege eine Unterscheidung zwischen verschiedenen Typen vornehmen. Anstatt eines *algebraischen charakteristischen Gebildes* zweiter Ordnung tritt dabei ein entsprechendes algebraisches Gebilde *höherer Ordnung* auf.

1. Differentialgleichungen höherer Ordnung. Wir betrachten eine Differentialgleichung von der Ordnung k

$$L[u] = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} a_{i_1, \ldots, i_n} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} + \cdots = 0, \tag{1}$$

wobei die Koeffizienten $a_{i_1, \ldots, i_n}$ des *Hauptteils,* d. h. des Ausdrucks, welcher Ableitungen der Ordnung k enthält, gegebene Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ im zugrunde gelegten Bereiche G

sind. Dieser Differentialgleichung bzw. dem Differentialausdruck $L[u]$ ordnen wir die folgende homogene Form k^{ter} Ordnung in den Variablen $y_1, \ldots, y_n$ zu

$$C(y) = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} a_{i_1, \ldots, i_n} y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n},$$

die sog. *charakteristische Form*, wobei der Punkt $x_1, \ldots, x_n$ als fest betrachtet wird. Unterwerfen wir wie vorher die unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ einer Transformation

$$\xi_i = t_i(x_1, \ldots, x_n); \qquad \frac{\partial t_i}{\partial x_l} = t_{il}, \tag{2}$$

so wird wiederum

$$L[u] = \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k}' \alpha_{i_1, \ldots, i_n} \frac{\partial^k u}{\partial \xi_1^{i_1}, \ldots, \partial \xi_n^{i_n}} + \cdot \tag{3}$$

wobei die Punkte Ausdrücke bedeuten, welche Ableitungen niederer Ordnung der unbekannten Funktion u enthalten, und die Koeffizienten $\alpha_{i_1, \ldots, i_n}$ des neuen Differentialausdruckes aus den Koeffizienten $a_{i_1, \ldots, i_n}$ des ursprünglichen durch die Transformation

$$\alpha_{i_1, \ldots, i_n} = \sum_{l_1, \ldots, l_n} a_{l_1, \ldots, l_n} t_{i_1 l_1} \ldots t_{i_n l_n} \tag{4}$$

hervorgehen. Wir können dies auch ausdrücken: Für die charakteristische Form gilt bei der affinen Transformation

$$y_i = \sum_l t_{il} \eta_l \tag{5}$$

die Identität

$$C(y) = \sum a_{i_1, \ldots, i_n} y_1^{i_1}, \ldots, y_n^{i_n} = \sum \alpha_{i_1, \ldots, i_n} \eta_1^{i_1}, \ldots, \eta_n^{i_n}.$$

Daher werden Eigenschaften der Form k^{ter} Ordnung C, welche bei affinen Transformationen der unabhängigen Veränderlichen $y_1, \ldots, y_n$ ungeändert bleiben, charakteristische Merkmale unseres Differentialausdruckes sein, und zwar solche Merkmale, welche allen Differentialausdrücken gemeinsam sind, die aus dem ursprünglichen durch Transformation der unabhängigen Veränderlichen entstehen. Es liegt somit nahe, derartige *affin invariante Eigenschaften der charakteristischen Form C als charakteristische Merkmale zur Typenunterscheidung von Differentialgleichungen höherer Ordnung* zu benutzen.

Insbesondere betrachten wir den algebraischen „*charakteristischen*" *Kegel* k^{ter} Ordnung im $y_1, \ldots, y_n$-Raume, welcher durch die Gleichung

$$C = 0 \tag{6}$$

zu jeder festen Stelle $(x_1, \ldots, x_n)$ geliefert wird, und können dann sofort die folgenden Typenunterscheidungen vornehmen:

Falls das charakteristische Gebilde $C = 0$ außer dem Nullpunkt $y_1 = \cdots = y_n = 0$ keine reellen Punkte hat, d. h. wenn C eine positiv

oder negativ definite Form ist, — eine gegenüber affinen Transformationen invariante Eigenschaft — so heißt der Differentialausdruck $L[u]$ *elliptisch* an der betreffenden Stelle bzw. *in dem betreffenden Bereiche G.*

Wenn durch eine affine Transformation an der Stelle $x_1, \ldots, x_n$ die Form C auf eine Form k^{ter} Ordnung in weniger als n Variablen transformiert werden kann, so heißt der Differentialausdruck an der betreffenden Stelle *parabolisch ausgeartet.* In diesem Falle kann man durch Transformation der unabhängigen Veränderlichen x_i an der betreffenden Stelle den Differentialausdruck in einen solchen transformieren, bei welchem Ableitungen von der k^{ten} Ordnung lediglich in bezug auf $n-1$ oder weniger unabhängige Veränderliche auftreten.

Weitere Typen von Differentialgleichungen wird man unterscheiden je nach den Realitätsverhältnissen des Kegels $C = 0$.

Insbesondere nennen wir den Differentialausdruck $L[u]$ *hyperbolisch* oder besser *total hyperbolisch* an der betreffenden Stelle, wenn folgende Eigenschaft besteht: Man kann, nötigenfalls nach einer geeigneten Variablentransformation, an der betreffenden Stelle eine Variable, z. B. $y_n = s$ auszeichnen, derart, daß die aus $C = 0$ bei beliebiger Wahl der Veränderlichen $y_1, \ldots, y_{n-1}$ für s entstehende algebraische Gleichung k reelle Wurzeln besitzt, wobei auch mehrfache Wurzeln zugelassen sind.

Ein Beispiel für den elliptischen Fall ist die Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0$$

oder ausgeschrieben

$$\sum_i \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} + 2 \sum_{i<k} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \, \partial x_k^2}.$$

Das charakteristische Gebilde wird hier gegeben durch

$$C = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2 = 0.$$

Ein anderes Beispiel für eine elliptische Differentialgleichung ist

$$\sum \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^4} = 0$$

mit der charakteristischen Form

$$C = \sum y_i^4.$$

Ein Beispiel für eine parabolisch ausgeartete Differentialgleichung wird durch

$$u_{tt} = \Delta\Delta u$$

gegeben, wobei $n+1$ durch n ersetzt und die Variable $x_{n+1} = t$ ausgezeichnet ist. Die charakteristische Form hier ist $\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^2$, enthält also die Variable $y_{n+1} = s$ nicht.

Ein total hyperbolischer Differentialausdruck ist

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta - 2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u = \Delta\Delta u - 3\Delta u_{tt} + 2 u_{tttt}.$$

Die charakteristische Form mit den Variabeln $y_1, \ldots, y_n, s$ lautet

$$C = (\sum y_i^2 - s^2)(\sum y_i^2 - 2s^2)$$

und hat offenbar die geforderte Eigenschaft. Dagegen ist der Differentialausdruck

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^2 u = \Delta\Delta u - \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$$

zwar nicht elliptisch und nicht parabolisch, aber auch nicht total hyperbolisch, denn die Form

$$C = (\sum y_i^2)^2 - s^4$$

hat bei fest gewählten Werten der Variablen $y_1, \ldots, y_n$ nur zwei aber nicht vier reelle Wurzeln s.

2. Typeneinteilung bei Systemen von Differentialgleichungen. Viele Probleme der mathematischen Physik beziehen sich auf ein System von Differentialgleichungen und zwar auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung. Es ist daher bemerkenswert, daß man in einfacher Weise eine analoge Typeneinteilung von Differentialgleichungen in elliptische, parabolische und sonstige, insbesondere hyperbolische Typen auch für Systeme vornehmen kann.

$u_1, \ldots, u_m$ seien m gesuchte Funktionen der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, zusammengefaßt zu einem „Funktionenvektor" u. Die m^2 Ausdrücke

$$L_{ik} = \sum_{r=1}^{n} a_{ik}^r \frac{\partial}{\partial x_r} \tag{7}$$

seien lineare homogene Differentialausdrücke erster Ordnung, wobei die $n\,m^2$-Koeffizienten a_{ik}^r gegebene Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind. $g_1, \ldots, g_m$, zusammengefaßt als Funktionsvektor g, seien gegebene Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ und der Größen $u_1, \ldots, u_m$, die wir in diesen letzten Größen nicht notwendig als linear vorauszusetzen brauchen. Wir betrachten dann das Differentialgleichungssystem

$$\sum_{k=1} L_{ik}[u_k] = g_i, \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

welches wir übrigens auch, indem wir die Matrizen $(a_{ik}^r) = A^r$ betrachten, in der abgekürzten Schreibweise

$$\sum A^r \frac{\partial u}{\partial x_r} = g \tag{9}$$

ausdrücken können.

Einem solchen Differentialgleichungssystem ordnen wir für eine feste Stelle $x_1, \ldots, x_n$ die in den Veränderlichen $y_1, \ldots, y_n$ vom Grade m homogene „*charakteristische*" *Form*

$$C(y) = \begin{vmatrix} \sum a^r_{11}\, y_r & \sum a^r_{12}\, y_r & \ldots & \sum a^r_{1m}\, y_r \\ \sum a^r_{21}\, y_r & \sum a^r_{22}\, y_r & \ldots & \sum a^r_{2m}\, y_r \\ & & & \\ \sum a^r_{m1}\, y_r & \sum a^r_{m2}\, y_r & & \sum a^r_{mm}\, y_r \end{vmatrix} \tag{10}$$

zu. Man stellt leicht folgende Tatsachen fest: Bei einer Transformation der unabhängigen Veränderlichen in der Differentialgleichung entsteht ein neues Differentialgleichungssystem, deren zugehörige charakteristische Form mit C identisch ist, wenn gleichzeitig die Veränderlichen y_i der affinen Transformation (5) unterworfen werden. Ferner: ersetzt man unser Differentialgleichungssystem durch ein äquivalentes, indem man m voneinander unabhängige lineare Kombinationen der Differentialgleichungen betrachtet, so multipliziert sich C lediglich mit der Determinante der Koeffizientenmatrix dieser linearen Kombination. Endlich, ersetzt man die unbekannten Funktionen u_i durch irgendwelche linearen Kombinationen, so bleibt ebenfalls C unverändert bis auf einen Faktor, welcher gleich der Determinante der Koeffizientenmatrix dieser linearen Kombination ist. Wir erkennen also: *Das algebraische Gebilde $C = 0$ ist dem Differentialgleichungssystem insofern invariant zugeordnet, als es bei Transformation der unabhängigen Variablen in der Differentialgleichung und entsprechend affiner Transformation der Größen y_i unverändert bleibt und im übrigen sich ebenfalls nicht ändert, wenn wir von gegebenen Differentialgleichungssystemen durch Einführung neuer linearer Kombinationen der Differentialgleichungen und der gesuchten Funktionen zu einem äquivalenten übergehen.*

Hiermit sind die folgenden Typenunterscheidungen motiviert, die im übrigen sich stets auf eine bestimmte Stelle $x_1, \ldots, x_n$ beziehen:

Wenn durch geeignete Variablentransformation (5) die Form C sich auf eine Form von weniger als n Veränderlichen transformieren läßt, so heißt das Differentialgleichungssystem *parabolisch ausgeartet.*

Im nicht ausgearteten Falle nennen wir das Differentialgleichungssystem *elliptisch*, wenn der algebraische Kegel $C = 0$ keine reellen Punkte außer der Spitze besitzt.

Das Differentialgleichungssystem heißt *hyperbolisch* oder besser *total hyperbolisch*, wenn — nötigenfalls nach Vornahme einer geeigneten (linearen) Transformation der Veränderlichen x_i bzw. y_i — folgende Bedingung erfüllt ist: Bei Wahl willkürlicher Werte von $y_1, \ldots, y_{n-1}$ soll die für y_n sich ergebende algebraische Gleichung m^{ter} Ordnung $C = 0$ m reelle nicht notwendig verschiedene Wurzeln besitzen.

Dieser total hyperbolische Fall tritt insbesondere dann ein, wenn die „*hyperbolische Normalform*" vorliegt. Darunter verstehen wir, daß

die Matrizen A^r symmetrisch sind und daß eine der Matrizen, etwa $A = A^{n+1}$ — wir betrachten hier wieder $n+1$ statt n Veränderliche und setzen $x_{n+1} = t$ — positiv definit ist. In diesem Falle nämlich können wir durch eine geeignete orthogonale Transformation, welche die Symmetrie aufrecht erhält, erreichen, daß die letzte Matrix in eine positiv definite Diagonalmatrix übergeht; dann aber folgt aus bekannten Sätzen (Realität der Wurzeln der Säkulargleichung), daß der hyperbolische Fall eintritt.

Das einfachste Beispiel eines elliptischen Systems liefern die Cauchy-Riemannschen bzw. allgemeiner die Beltramischen Differentialgleichungen (vgl. S. 127)

$$W u_x - b v_x - c v_y = 0$$
$$W u_y + a v_x + b v_y = 0,$$

wobei die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

als positiv definit vorausgesetzt sei.

Hier hat die Operatorenmatrix (L_{ik}) die Gestalt

$$(L_{ik}) = \begin{pmatrix} -W\frac{\partial}{\partial x} & b\frac{\partial}{\partial x} + c\frac{\partial}{\partial y} \\ W\frac{\partial}{\partial y} & a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix},$$

und die zugehörige charakteristische Form lautet

$$C(y) = \begin{vmatrix} -W y_1 & b y_1 + c y_2 \\ W y_2 & a y_1 + b y_2 \end{vmatrix} = -W(a y_1^2 + 2 b y_1 y_2 + c y_2^2),$$

speziell im Cauchy-Riemannschen Falle $W = 1$, $a = c = 1$, $b = 0$

$$C(y) = y_1^2 + y_2^2.$$

Der hyperbolische Fall liegt vor bei dem Differentialgleichungssystem der Maxwellschen Gleichungen, die im einfachsten Falle, für den Äther, bei der Annahme der Lichtgeschwindigkeit als Einheit lauten

$$\mathfrak{E}_t - \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0, \qquad \mathfrak{H}_t + \operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0.$$

Es ist dabei $\mathfrak{E} = (u_1, u_2, u_3)$ der elektrische Vektor, $\mathfrak{H} = (u_4, u_5, u_6)$ der magnetische Vektor; statt der vierten Variablen x_4, der Zeit, schreiben wir t. Indem wir unser Differentialgleichungssystem ausschreiben:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_5}{\partial z} - \frac{\partial u_6}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial u_4}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_6}{\partial x} - \frac{\partial u_4}{\partial z}, \qquad -\frac{\partial u_5}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z}$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial u_4}{\partial y} - \frac{\partial u_5}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial u_6}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

erhalten wir als Operatorenmatrix

$$(L_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}$$

und daher die charakteristische Gleichung in den Variablen $y_1, y_2, y_3, y_4 = s$ zunächst als Determinantenrelation

$$C_{(y)} = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 & -y_3 & y_2 \\ 0 & s & 0 & y_3 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & s & -y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & y_3 & -y_2 & s & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & y_1 & 0 & s & 0 \\ y_2 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix} = 0$$

und nach kurzer Rechnung in der Gestalt

$$C = s^2 (s^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2)^2 = 0 .$$

Auch die „*Wellengleichung*" $u_{tt} - \Delta u = 0$, der jede der Komponenten $u_1, \ldots, u_6$ genügt, besitzt die charakteristische Relation $s^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0$. Dieser Zusammenhang beruht auf der folgenden Tatsache, deren Beweis als Aufgabe gestellt sei: Wenn durch Elimination aus einem Differentialgleichungssystem eine einzelne Differentialgleichung entsteht, so ist das charakteristische Gebilde $C = 0$ der letzteren stets in dem des ersteren enthalten[1].

Ähnliches wie für die Maxwellschen Gleichungen gilt für die Differentialgleichung von Dirac. Sie beziehen sich auf ein System von vier komplexwertigen Funktionen $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ von vier Variabeln $x_1, x_2, x_3, x_4 = ct$. Zu ihrer Formulierung führt man die folgenden Matricen ein

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Man kann diesen Zusammenhang noch verallgemeinern, indem man auch charakteristische Formen für Differentialgleichungssysteme höherer Ordnung aufstellt.

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann haben die Gleichungen folgende Gestalt:

$$\sum_{\varkappa=1}^{4} \alpha_\varkappa \left(\frac{\partial}{\partial x_\varkappa} - a_\varkappa \right) u - \beta\, b\, u = 0.$$

Dabei ist der Vektor (a_1, a_2, a_3) dem magnetischen, $-a_4$ dem elektrischen Potential, und b der Ruheenergie proportional. Nach unseren Regeln wird die charakteristische Determinante die folgende Form vierten Grades in den Variablen y_1, y_2, y_3, y_4:

$$C(y) = \left| \sum_{\varkappa=1}^{4} \alpha_\varkappa y_\varkappa \right| = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2)^2.$$

Somit sind die charakteristischen Mannigfaltigkeiten wiederum dieselben wie bei der Wellengleichung.

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß man auch die Ergebnisse des vorigen Paragraphen und der Nr. 1 dieses Paragraphen von dem jetzigen Standpunkt aus wieder gewinnen kann. Ersetzt man z. B. die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\sum a_{ik} u_{x_i x_k} + \cdots = 0$$

durch das folgende Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{\partial p_l}{\partial x_n} = \frac{\partial p_n}{\partial x_l} \qquad (l = 1, \ldots, n-1)$$

$$\sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \cdots = 0,$$

so ergibt sich für das letztere die Charakteristikenbedingung

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1} a_{1k} y_k & \sum_{k=1} a_{2k} y_k & \cdots & \sum_{k=1} a_{nk} y_k \\ y_n & 0 & \cdots & -y_1 \\ 0 & y_n & \cdots & -y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & y_n & -y_{n-1} \end{vmatrix} = 0,$$

welche nach Ausrechnung der Determinante in

$$(-1)^{n-1} y_n^{n-2} \sum a_{ik} y_i y_k = 0$$

übergeht, in Übereinstimmung mit unserem früheren Resultat.

3. Bemerkungen über nichtlineare Probleme. Ebenso wie bei $n = 2$ ist auch bei beliebigem n die Verallgemeinerung unserer Typeneinteilung für nichtlineare Differentialausdrücke möglich, wobei wir allerdings auf die allgemeine Herstellung einfacher Normalformen verzichten müssen. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit einem Hinweis auf den Fall eines quasilinearen Differentialausdruckes zweiter Ordnung

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(p_l, u, x_l)\, u_{x_i x_k} + \cdots .$$

Hier erfolgt die Typeneinteilung an einer Stelle x_i, p_i, u des $2n+1$-dimensionalen x, p, u-Raumes wiederum gemäß dem Trägheitscharakter der dort definierten quadratischen Form

$$\sum a_{ik} y_i y_k$$

in den Unbestimmten y_i.

Entsprechendes gilt für Systeme erster Ordnung und andere quasilineare Probleme höherer Ordnung. Wir werden auf diese Dinge später in Kap. VI im Rahmen der allgemeinen Charakteristikentheorie zurückkommen.

§ 5. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

1. Allgemeines. In § 3 haben wir lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf einfache Normalformen transformiert. Nunmehr wollen wir die Struktur der Lösungen selbst untersuchen. Dabei wird der Begriff der Welle entscheidend sein; insbesondere werden wir die Lösungen als Superposition von solchen Wellen auffassen können. Während nun die allgemeine Transformierbarkeit auf Normalformen wesentlich auf der Ordnung zwei der Differentialgleichung beruht, gelten die folgenden den Aufbau der Lösungen aus Wellen betreffenden Überlegungen auch für lineare Differentialgleichungsprobleme höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wir werden dabei $n+1$ unabhängige Veränderliche $x_1, \ldots, x_{n+1}$ betrachten und uns vorbehalten $x_{n+1} = t$ zu schreiben, indem wir nach Bedarf diese letzte Variable als Zeitkoordinate auszeichnen.

Die allgemeine lineare Differentialgleichung k^{ter} Ordnung lautete dann

$$L[u] = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{n+1}=k} a_{i_1,\ldots,i_{n+1}} \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_{n+1}^{i_{n+1}}} + \cdots, \tag{1}$$

wobei wieder die Punkte einen Differentialausdruck niedriger als k^{ter} Ordnung bedeuten. Die oben ausgeschriebene Summe ist der *Hauptteil* der Differentialgleichung. Der charakteristische Kegel

$$C(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \sum a_{i_1, \ldots, i_{n+1}} y_1^{i_1}, \ldots, y_{n+1}^{i_{n+1}} = 0$$

ist hier unabhängig von der Stelle $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des $n+1$-dimensionalen x, t-Raumes, den wir als $\mathfrak{R}_{n+1}$ bezeichnen.

Symbolisch können wir die Differentialgleichung in folgender Form schreiben

$$\left(P_k\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + P_{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \cdots + P_0\right) u + g = 0, \tag{2}$$

wobei $P_\varkappa$ ein homogenes Polynom vom Grade $\varkappa$ in den Symbolen $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ist und g eine gegebene Funktion der unabhängigen Veränderlichen bedeutet. Vorzugsweise werden wir den Fall der homogenen Gleichung, d. h. den Fall $g = 0$ betrachten.

Infolge der Konstanz der Koeffizienten sind stets zugleich mit $u(x_1, x_2, \ldots)$ auch $u(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \ldots)$ bei beliebigen Werten ξ_i, sowie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ Lösungen der homogenen Gleichung.

2. Ebene Wellen. Verzerrungsfreiheit. Dispersion. Im Zusammenhang mit der Eigenwerttheorie haben wir früher in Band I, Kap. V *stehende Wellen* betrachtet. Sie sind definiert als solche Lösungen der linearen Differentialgleichung, welche sich als Produkt eines nur von der Zeit t abhängigen Faktors $p(t)$ mit einer nur von den Ortsvariablen x_i, zusammengefaßt als Vektor x, abhängigen Funktion $f(x)$ darstellen lassen

$$u(x, t) = p(t) f(x).$$

Die Funktion $f(x)$ gibt dann die Gestalt der stehenden Welle an.

Für uns werden aber hier nicht die stehenden, sondern die *fortschreitenden Wellen*, und zwar speziell *ebene Wellen*, den Ausgangspunkt bilden. Unter einer *fortschreitenden ebenen Welle* zu einer homogenen linearen Differentialgleichung $L[u] = 0$ verstehen wir eine Lösung der Form

$$u = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - b t\right) = f(A - b t) = f(a x - b t) = f(B), \tag{3}$$

wobei zur Abkürzung

$$A = \sum_{i=1} a_i x_i = (a, x) \qquad B = A - b t$$

gesetzt ist[1].

[1] Später in Kap. VI, § 10 werden wir den Begriff der fortschreitenden Welle wesentlich allgemeiner fassen.

Solche ebene Wellen u haben auf jeder Ebene der Schar

$$\sum_{n=1}^{n} a_i x_i - b t = \text{konst}.$$

im $n+1$-dimensionalen x, t-Raume konstante Werte.

Zur Motivierung der Bezeichnung „fortschreitende Welle" b betrachten wir statt des $n+1$-dimensionalen Raumes den n-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}_n$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und die Größe u als eine „Zustandsgröße" dieses Raumes $\mathfrak{R}_n$, welche sich mit der Zeit t verändert. Dann stellt eine Lösung der obigen Form (3) einen Zustand dar, welcher jeweils längs einer ganzen Ebene einer gewissen parallelen Ebenenschar derselbe ist *(Ebene gleicher Phase)*, wobei sich dann diese einem gegebenen Zustandswert entsprechende Phasenebene mit gleichmäßiger Geschwindigkeit parallel zu sich selbst durch diesen Raum $\mathfrak{R}_n$ bewegt.

Indem wir für unsere ebenen Wellen setzen

$$a_l = a\,\alpha_l, \qquad \sum \alpha_l^2 = 1, \qquad a^2 = \sum a_l^2, \qquad b = a\beta$$

$$A - b\,t = a(\sum \alpha_i x_i - \beta\, t) = a\,(Q - \beta\, t),$$

und somit

$$u = f(A - b\,t) = \varphi(Q - \beta\, t)$$

schreiben, gelangen wir zu einer Darstellung, wobei die Größen α_l die Richtungskosinus der Wellennormale sind, und β ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet. Der Ausdruck $Q - \beta\, t$ heißt die *Phase der Welle*, die Funktion φ bzw. f die *Wellenform*.

Z. B. besitzt die einfachste Wellengleichung zweiter Ordnung

$$\Delta u - u_{tt} = 0$$

ebene Wellen der Form

$$u = \varphi\left(\sum_{l=1} \alpha_l x_l - t\right),$$

wobei die Koeffizienten α_l beliebige der Gleichung $\sum \alpha_l^2 = 1$ genügende Größen sein dürfen und wobei die Wellenform φ eine beliebige Funktion sein kann.

Mit anderen Worten: *Die Wellengleichung $\Delta u - u_{tt} = 0$ besitzt ebene Wellen beliebiger Richtung und beliebig vorgegebener Form, welche alle mit der Geschwindigkeit 1 fortschreiten.*

Dagegen liegen die Verhältnisse völlig anders bei der Differentialgleichung

$$\Delta u - u_{tt} + c\,u = 0 \tag{4}$$

mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten c. Ist $f(B)$ eine zugehörige ebene Welle, so ergibt sich für die Wellenform $f(B)$ mit $B = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - bt$ sofort die Bedingungsgleichung

$$f''(B)\,(a^2 - b^2) + f(B)\,c = 0, \tag{5}$$

also eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung für $f(B)$ mit konstanten Koeffizienten. Zur Geschwindigkeit $\beta = 1$, d. h. $b^2 = a^2$, gibt es nunmehr offenbar keine fortschreitenden Wellen mehr; jedoch für jede andere Geschwindigkeit und jede beliebige Richtung bestimmen sich aus (5) die möglichen Wellenformen als Exponentialfunktionen. Also: *Im Falle der Differentialgleichung* (4) *ist Wellenrichtung und Wellengeschwindigkeit* (abgesehen vom Ausnahmewert 1) *der zur Differentialgleichung gehörigen Welle beliebig vorschreibbar; jedoch sind nur spezielle Wellenformen für fortschreitende Wellen möglich.*

Wir nennen den ersten Fall der Differentialgleichung zweiter Ordnung $\Delta u - u_{tt} = 0$ den Fall der *Verzerrungsfreiheit* oder *Dispersionsfreiheit*, weil sich dann in jeder Richtung *willkürlich* gegebene Wellenformen unverzerrt fortpflanzen, und zwar mit bestimmter Geschwindigkeit; der zweite Fall der Differentialgleichung (4) heißt der *Fall der Dispersion* aus folgendem Grunde: Ist die betrachtete Lösung u eine Superposition von fortschreitenden Wellen der durch (5) eingeschränkten Form mit derselben Richtung, so werden sich die verschiedenen Komponenten mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen; somit wird die für $t = 0$ bestehende Wellenform mit verändertem t ihre Gestalt ändern.

Genau die entsprechenden Verhältnisse und dieselbe Alternative liegen nun bei beliebigen linearen Differentialgleichungen k^{ter} Ordnung der Form (2) vor. Wir finden die möglichen ebenen Wellen, indem wir in die Differentialgleichung (2) $u = f(A - bt)$ einsetzen; wir schreiben, um eine übersichtliche Relation zu gewinnen: $-b = a_{n+1}$, also $A - bt = B = \sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu x_\nu$ und erhalten:

$$(6)\quad \begin{cases} f^{(k)}(B)\, P_k(a_1, \ldots, a_{n+1}) + f^{(k-1)}(B)\, P_{k-1}(a_1, \ldots, a_{n+1}) + \cdots \\ \qquad + f(B)\, P_0 = 0. \end{cases}$$

Es besteht nun die folgende entscheidende *Alternative:* Entweder die ursprüngliche Differentialgleichung (2) besteht nur aus ihrem Hauptteil, d. h. die Polynome $P_\varkappa$ sind identisch Null für $\varkappa < k$. Oder in der Differentialgleichung treten Ableitungen niederer als k^{ter} Ordnung auf.

Im ersten Fall kann die Wellenform $f(B)$ der fortschreitenden Welle willkürlich gewählt werden; sofern nur die Koeffizienten a_i der charakteristischen Relation

$$(7)\qquad C(a_1, \ldots, a_{n+1}) = P_k(a_i) = 0$$

unterworfen werden, ist $u = f(B)$ eine Lösung der Gleichung (1)[1]. Die Gleichung (7) ist eine homogene Gleichung k^{ten} Grades für die Größen a_i bzw. eine nicht homogene Gleichung k^{ten} Grades zwischen den Verhältnissen $a_i : a_{n+1} = -a_i : b$. Zu gegebenen Werten $a_1, \ldots, a_n$ oder

[1] Die mögliche Lösung f gleich einem beliebigen Polynom k-1$^{\text{ten}}$ Grades bei willkürlichen Koeffizienten a_i ist uninteressant, weil sie im Unendlichen in keiner Weise beschränkt bleibt.

zu beliebig gegebenem $a = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$ und beliebiger Richtung $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gibt es somit endlich viele, nicht mehr als k, Geschwindigkeiten β für die Welle. In unserem Falle pflanzt sich die für $t = 0$ vorliegende anfängliche beliebige ebene Wellenform $u = f\left(\sum_1 a_i x_i\right)$ in jeder beliebig wählbaren zugehörigen Richtung absolut unverzerrt fort, wobei in jeder Richtung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur eine endliche Anzahl von k oder weniger Werten in Frage kommen. Zwischen den Richtungsgrößen und der Geschwindigkeit der fortschreitenden Welle besteht unabhängig von der Wellenform die algebraische Beziehung (7) als notwendige und hinreichende Bedingung.

Der zweite Fall unserer Alternative tritt ein, wenn die Gleichung (4) mehrere Glieder enthält. Dann hat die Gleichung (7) bei gegebenen Werten a_i die Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Wellenform $f(B)$, es sei denn für solche singuläre Wertsysteme $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, für welche (6) ausartet, indem alle Ausdrücke $P_\varkappa$ höchstens mit Ausnahme des Koeffizienten P_0 verschwinden. Wenn wir von diesen Ausnahmewerten absehen, gilt: Es gibt zu jeder willkürlichen Richtung und Geschwindigkeit fortschreitende Wellen, jedoch nur solche, welche in ihrer Form durch die gewöhnliche Differentialgleichung (6) eingeschränkt sind, somit sich als Superposition von höchstens k Exponentialausdrücken $f = e^B$ darstellen lassen.

Die Differentialgleichung $L[u] = 0$ wird somit gelöst durch Funktionen

$$u = e^{a\left(\sum_1^n \alpha_i x_i - \beta t\right)} = e^{\sum_1^n a_i x_i - bt} = e^{\sum_1^{n+1} a_i x_i},$$

wobei die Koeffizienten nunmehr lediglich der Bedingungsgleichung

$$\sum_{\varkappa=0}^{k} P_\varkappa(a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0 \tag{8}$$

unterworfen sind und umgekehrt. Diese Gleichung (8) stellt nunmehr bei beliebigem α_i und β eine Gleichung k^{ter} Ordnung für die Größe a dar.

Zusammenfassend können wir folgendes allgemeine Resultat aussprechen: *Entweder die Differentialgleichung enthält nur Ableitungen der höchsten auftretenden Ordnung. Dann gibt es unverzerrte fortschreitende ebene Wellen beliebig vorgeschriebener Form, wenn lediglich eine algebraische Relation* (7) *zwischen der Richtung und Geschwindigkeit erfüllt ist, welche zu gegebener Richtung die Geschwindigkeit höchstens k-deutig bestimmt (dispersionsfreier Fall). Oder es treten in der Differentialgleichung Ableitungen verschiedener Ordnung auf. Dann kann man Richtung und Geschwindigkeit von fortschreitenden Wellen willkürlich vorschreiben; jedoch ist für jedes solche System von Richtungsgrößen und Geschwindigkeit die*

Form der Welle durch die gewöhnliche Differentialgleichung (6) *eingeschränkt, abgesehen von dem Ausnahmefall, wo für spezielle Wertsysteme von Richtung und Geschwindigkeit* $P_\varkappa(a_i) = 0$ *für* $\varkappa > 0$ *gilt und entweder überhaupt keine oder beliebige Wellenformen möglich sind (Dispersionsfall).*

In dem obigen Beispiel (4) für den Dispersionsfall liefert jede beliebige Richtung mit der Geschwindigkeit 1 eine solche Ausnahme, wo überhaupt keine fortschreitende Welle möglich ist. Das Beispiel der Differentialgleichung

$$\Delta u - u_{tt} + \sum_{l=1}^{n} u\, x_l - u_t = 0$$

illustriert ebenfalls den Dispersionsfall. Ausnahmewerte für Richtung und Geschwindigkeit sind gegeben durch die Bedingungen

$$\sum_{e=1}^{n} a_e^2 - b^2 = 0 \qquad \sum_{e=1}^{n} a_e - b = 0.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gibt es fortschreitende Wellen beliebiger Gestalt. Sie alle haben die Geschwindigkeit 1 und sind überdies gekennzeichnet dadurch, daß ihre Richtungen dem durch $\sum_{i \neq k} a_i a_k = 0$ gegebenen Kegel angehören müssen.

Im Dispersionsfalle schränkt man den Wellenbegriff noch durch die Zusatzforderung ein, daß die Welle u für alle Zeiten t und den ganzen n-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}_n$ beschränkt bleibt. Dann folgt, daß die Lösung bei reellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und β die Gestalt

$$e^{i\omega(\sum \alpha_l x_l - \beta t)} \tag{9}$$

haben muß, d. h. daß die Größe $a = i\omega$ rein imaginär ist. Diese *ebenen Wellen im Dispersionsfalle sind also zeitlich und räumlich periodische Vorgänge.* Lösungen, welche dieser Zusatzbedingung durchgehender Beschränktheit genügen, d. h. nur Lösungen der Form (9), heißen im Dispersionsfalle ebene Wellen im eigentlichen Sinne. Für sie sind die folgenden Bezeichnungen üblich: β heißt die *Phasengeschwindigkeit*, ω die Frequenz, $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$ die *Wellenlänge*.

Neben diesen eigentlichen Wellen treten häufig noch *uneigentliche oder gedämpfte Wellen* auf, welche zwar auch noch im ganzen n-dimensionalen Raum $\mathfrak{R}_n$ bei festem t beschränkt sind und etwa für $t \geqq 0$ beschränkt bleiben, aber der Beschränktheitsbedingung bei negativem t nicht mehr genügen. Es sind dies Wellen, bei welchen $b = \left(p - i\frac{q}{\omega}\right) i\omega = p\, i\omega + q$ eine komplexe Größe mit $p \neq 0$ ist, d. h. Wellen der Form

$$e^{-qt} e^{i\omega(\sum \alpha_l x_l - pt)}.$$

Die Größe q heißt der *Dämpfungsfaktor*. Positives q entspricht einem gedämpften Vorgang, $q < 0$ einem mit der Zeit exponentiell anwachsenden, „*angefachten*" Vorgang. Solche uneigentlichen Wellen sind, wie man sieht, zeitlich nicht mehr rein periodisch.

3. Beispiele: Telegraphengleichung, Verzerrungsfreiheit bei Kabeln. Die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} = \Delta u$$

gehört zum dispersionsfreien Fall. Fortschreitende ebene Wellen mit der Geschwindigkeit c und der beliebigen Form $\varphi\,(\sum \alpha_i x_i - c\,t)$, $\sum \alpha_i^2 = 1$ in jeder Richtung sind möglich.

Ein allgemeineres besonders wichtiges Beispiel für unsere Begriffsbildungen liefert die Telegraphengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + (\alpha + \beta)\, u_t + \alpha \beta u = 0\,, \tag{10}$$

welcher die Spannung oder der Strom u als Funktion der Zeit t und des Ortes x längs eines Doppelkabels genügt, wobei x die von einem Anfangspunkte aus gewählte Kabellänge bedeutet[1].

Diese Gleichung gehört an sich außer für $\alpha = \beta = 0$ zum Dispersionsfall. Wir können sie aber durch den Ansatz

$$v = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} u$$

gemäß dem allgemeinen Prinzip aus §3, Nr. 2 auf die einfachere Gleichung für die Funktion v

$$v_{tt} - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 v - c^2 v_{xx} = 0$$

reduzieren. Für diese neue Gleichung besteht der Fall der Dispersionsfreiheit nach unserem früheren Ergebnis dann und nur dann, wenn

$$\alpha = \beta \tag{11}$$

ist. In diesem Falle besitzt die ursprüngliche Telegraphengleichung zwar keine absolut verzerrungsfreien Wellenlösungen von willkürlich vorgeschriebener Gestalt. Unser Resultat läßt sich jedoch in der folgenden

[1] Diese Differentialgleichung entsteht aus dem folgenden System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für den Strom i und die Spannung u als Funktionen von x und t

$$C u_t + G u + i_x = 0$$
$$L i_t + R i + u_x = 0$$

durch Elimination einer der unbekannten Funktionen. Dabei ist L die Induktivität des Kabels, R dessen Widerstand, C die Kapazität und endlich G die Ableitung (Stromverlust dividiert durch Spannung) des Kabels. Die Konstanten der Gleichung (10), die bei der Elimination entstehen, haben daher die Bedeutung

$$\frac{1}{c^2} = LC$$
$$\alpha = \frac{G}{C}\,, \qquad \beta = \frac{R}{L}\,.$$

Dabei ist c die Geschwindigkeit des Lichtes, α heißt der kapazitive, β der induktive Dämpfungsfaktor.

Form aussprechen: *Unter der Bedingung* (11) *besitzt die Telegraphengleichung gedämpfte, d. h. „relativ" verzerrungsfreie fortschreitende Wellenlösungen der Form*

$$u = e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t} f(x \pm c\,t)$$

mit willkürlichem f nach beiden Richtungen des Kabels.

Auf diesem für die Kabeltelegraphie außerordentlich wichtigen Resultat beruht es, daß bei geeigneten Dimensionierungen von Kapazität und Selbstinduktion eines Kabels Signale — wenn auch mit einem zeitlichen Dämpfungsfaktor — in proportional unverzerrter Form übermittelt werden können (vgl. auch Anhang).

4. Zylinder- und Kugelwellen. Mit Hilfe des Superpositionsprinzips wollen wir an weiteren Beispielen zeigen, wie sich aus den ebenen Wellen andere wichtige Lösungsformen unserer Differentialgleichungen ergeben, und zwar die sog. *Zylinder- und Kugelwellen.*

a) Zylinderwellen. Die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0 \tag{13}$$

wird bei beliebigem ϑ gelöst durch $e^{i\omega(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)}\,e^{i\omega t}$, wobei ω eine willkürlich wählbare Zahl ist. Integrieren wir diese „ebene Welle" nach dem Richtungswinkel ϑ, so gewinnen wir die neue Lösung

$$u(x, y, t) = e^{i\omega t}\int_0^{2\pi} e^{i\omega r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta = 2\pi\,e^{i\omega t}\,J_0(\omega r)\,,$$

wenn wir die Polarkoordinate r durch $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ einführen. Diese Lösung hat die Form einer *stehenden Welle.*

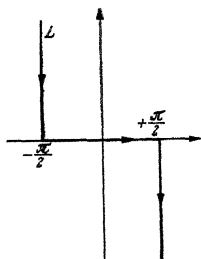
Abb. 4.

Durch die *Besselsche Funktion J_0 wird also eine rotationssymmetrische Lösung der Wellengleichung* (13) *gegeben,* eine sog. *Zylinderwelle.* Diese Lösung ist im Nullpunkt $r = 0$ regulär. Wir können jedoch durch Superposition ebener Wellen auch ebenso eine im Nullpunkt singuläre Lösung erhalten, welche dann einem *Ausstrahlungsvorgang* (vgl. § 6) *mit Quelle im Nullpunkt* entspricht.

Hierzu ist jedoch die Superposition auch in uneigentlichen Wellen erforderlich. In der Tat erhalten wir, wenn L (vgl. Bd. I, Kap. VII) den in der Abb. 4 angedeuteten komplexen Integrationsweg in der ϑ-Ebene bedeutet, als Lösung der Wellengleichung den Ausdruck

$$u = e^{i\omega t}\int_L e^{i\omega r\cos\vartheta}\,d\vartheta = \pi\,e^{i\omega t}\,H_0^1(\omega r)\,,$$

wobei H_0^1 die Hankelsche Funktion bedeutet.

Beide Zylinderwellen sind in t naturgemäß periodisch, in der Raumvariablen r zwar oszillierend, jedoch nicht periodisch.

b) Kugelwellen. In drei Raumdimensionen liegen die Verhältnisse ein wenig verschieden. Aus der Lösung $e^{i\omega t}\, e^{i\omega(\alpha x+\beta y+\gamma z)} = e^{i\omega t}\, w$ erhalten wir durch Integration von w über die Einheitskugel des α, β, γ-Raumes die neue Funktion

$$v = \iint e^{i\omega(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\Omega,$$

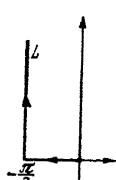
wobei $d\Omega$ das Oberflächenelement der Einheitskugel bedeutet. Da diese Funktion offenbar gegen Drehungen des Koordinatensystems invariant ist, so dürfen wir zur Berechnung $x = y = 0$, $z = r$ setzen und erhalten, wenn wir im α, β, γ-Raume in der üblichen Weise Polarkoordinaten ϑ, φ einführen,

$$v = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{i\omega r\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta \qquad \text{oder} \qquad v = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{\sin\omega r}{r}.$$

Abb. 5.

Somit ist $\frac{\sin\omega r}{r} e^{i\omega t}$ eine rotationssymmetrische, übrigens im Nullpunkt reguläre stehende Kugelwelle, entstanden durch Superposition von regulären fortschreitenden ebenen Wellen.

Wiederum müssen wir, um Wellen mit Singularität im Nullpunkt zu erhalten, welche Ausstrahlungsvorgängen entsprechen, auch uneigentliche ebene Wellen superponieren. Indem wir den Integrationsweg L der Abb. 5 benutzen, gewinnen wir

$$(14) \qquad v = 2\pi \int_L e^{i\omega r\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r},$$

d. h. reell geschrieben gleichzeitig die beiden Kugelwellenformen

$$\frac{\cos\omega r}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\omega r}{r},$$

von denen die zweite die schon vorher gefundene reguläre ist.

Wir bemerken: dieselbe Kugelwellenform $2\pi \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r}$ ergibt sich durch Superposition der ebenen Wellen $e^{i\omega(\alpha x+\beta y+\gamma z)}$ bei beliebiger Lage des Punktes x, y, z mit $z > 0$. Präzis: Es ist unabhängig von der Lage des Punktes x, y, z mit $z > 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$$(15) \qquad 2\pi \frac{e^{i\omega r}}{i\omega r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_L e^{i\omega(\alpha x+\beta y+\gamma z)} \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Der Beweis folgt am einfachsten, indem man direkt zeigt, daß das Integral (15) nur von r abhängt. Man sieht sofort, daß die rechte Seite von (15) jedenfalls nur von z^2 und $\varrho^2 = x^2 + y^2$ abhängen kann: $v(\varrho, z)$. Sodann verifiziert man leicht, daß identisch $z v_\varrho - \varrho v_z = 0$ gilt, d. h., daß v nur von der Kombination $r^2 = \varrho^2 + z^2$ abhängt[1].

[1] Die Identifizierung der beiden Integrale (14) und (15) ist in gewisser Weise ein Beispiel zum Cauchyschen Integralsatz für zwei Veränderliche, da der Übergang von $\varrho = 0$ zu $\varrho \neq 0$ eine Verlagerung des Integrationsweges in der komplexen ϑ-Ebene bedeutet [vgl. H. Weyl: Ann. d. Physik Bd. 60, S. 481 ff., wo von der Formel (15) eine wichtige Anwendung auf das Problem der Wellenausbreitung bei drahtloser Telegraphie gemacht wird].

Da die Wellengleichung dem dispersionsfreien Typus zugehört, so können wir, indem wir uns wiederum auf eigentliche Wellen beschränken, allgemein mit einer beliebigen Funktion $f(\lambda)$ die rotationssymmetrische Welle

$$u = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t - \alpha x - \beta y - \gamma z) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

zusammensetzen. Wegen der Orthogonalinvarianz dieses Ausdruckes dürfen wir wieder zur Auswertung des Integrals ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x = y = 0$ annehmen und erhalten nach Einführung von Polarkoordinaten wie früher

$$u = 2\pi \int_0^{2\pi} f(t - r\cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \frac{2\pi}{r} \left(F(t + r) - F(t - r)\right),$$

wo F als Integralfunktion zu f willkürlich ist. Somit ist bei willkürlichem — zweimal differenzierbarem — F die Funktion

$$\frac{F(t + r) - F(t - r)}{r}$$

eine Lösung[1]. Aber auch die Funktionen

$$\frac{F(t + r)}{r} \quad \text{und} \quad \frac{F(t - r)}{r}$$

allein sind Lösungen, wie man leicht durch geeignete Abänderung der Funktion f bzw. F entnimmt oder einfach direkt verifiziert. Naturgemäß sind diese letzteren Funktionen im Nullpunkt singulär. Diese Lösungen können wir sinngemäß als *fortschreitende, räumlich abklingende Kugelwellen* interpretieren.

Man kann übrigens diese Lösungen charakterisieren als die einzigen räumlich nur von r abhängigen Lösungen der Wellengleichung in drei Raumdimensionen. Dies folgt, da für eine Funktion $u(r, t)$ der Ausdruck $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ in (vgl. Bd. I, S. 195): $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r} (ru)_{rr}$ und daher die Wellengleichung $\Delta u - u_{tt} = 0$ in

$$\frac{1}{r} \left[(ru)_{rr} - \qquad\qquad \right. = 0$$

übergeht, woraus sich nach Kap. I, S. 5 als allgemeine Lösung

$$ru = F(t + r) + G(t - r)$$

mit willkürlichem F und G ergibt.

---

[1] Für zwei Raumdimensionen ist die analoge Vereinfachung des Integrals $u = \int_0^{2\pi} f(t - r\cos\vartheta) d\vartheta$ nicht möglich, was von vornherein auf die später in § 6 und Kap. VI noch deutlicher hervortretende grundsätzliche Verschiedenheit der Fälle gerader und ungerader Raumdimensionszahlen hinweist.

§ 6. Anfangswertprobleme, Ausstrahlungsprobleme.

Das Superpositionsprinzip ist in vielen Fällen der Schlüssel für die Lösung fundamentaler, die Theorie der Ausbreitungsvorgänge betreffender Probleme. Bei diesen Problemen handelt es sich stets darum, solche Lösungen einer Differentialgleichung für eine Funktion der Ortsvariablen und der Zeit t für ein Raumgebiet G und $t > 0$ zu finden, welche für $t = 0$ vorgegebenen Anfangsbedingungen und eventuell am Rande des Gebietes gegebenen Randbedingungen genügen. Indem wir eine mehr systematische Diskussion solcher Probleme auf später (vgl. § 7 dieses Kapitels) verweisen, behandeln wir hier einige typische und an sich wichtige Beispiele.

1. Anfangswertprobleme der Wärmeleitung. Transformation der ϑ-Funktion. Wir betrachten zunächst für die Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} - u_t = 0 \tag{1}$$

das Anfangswertproblem: eine Lösung zu finden, welche für alle Werte der Ortsvariablen x und für $t > 0$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, für $t \geqq 0$ stetig ist und für $t = 0$ in eine vorgegebene Funktion $u(x, 0) = \varphi(x)$ übergeht. Dabei setzen wir die Funktion $\varphi(x)$ als überall stetig und beschränkt mit $\varphi(x) < M$ voraus. Unsere Behauptung lautet: Die Lösung wird geliefert durch:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\, d\xi. \tag{2}$$

Unsere Lösung entsteht also durch Superposition aus der früher (Kap. I, § 3, S. 17) gegebenen „Grundlösung" der Wärmeleitungsgleichung. Sie drückt aus, daß der Wärmeverlauf sich als Superposition einzelner Elementarvorgänge darstellt, wobei dem einzelnen Vorgang die Anfangstemperatur Null überall außer an der Stelle $x = \xi$ entspricht und an dieser Stelle eine dem Ausdruck $\varphi(\xi)$ proportionale Wärmemenge am Anfang zusammengeballt ist. Den Beweis führen wir durch Verifikation. Daß der Ausdruck (2) für $t > 0$ der Wärmeleitungsgleichung genügt, folgt unmittelbar durch Differentiation unter dem Integralzeichen. Es bleibt also lediglich noch die Anfangsbedingung zu verifizieren. Zu diesem Zweck führen wir an Stelle von ξ die neue Integrationsvariable $\sigma = \frac{\xi - x}{2\sqrt{t}}$ ein und erhalten

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x + 2\sigma\sqrt{t}\right) e^{-\sigma^2}\, d\sigma.$$

Dieses Integral zerlegen wir in drei Bestandteile

$$J_1 + J_2 + J_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{-T} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{T} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{\infty}$$

und verfügen über den Zwischenwert gemäß $T = |t|^{-\frac{1}{4}}$. Wenn t hinreichend klein ist, so gilt im Intervall $-T \leqq \sigma \leqq T$ bei beliebig klein vorgegebenem ε wegen $|\sigma|\sqrt{t} \leqq |t|^{\frac{1}{4}}$ die Beziehung $|\varphi(x + 2\sigma\sqrt{t}) - \varphi(x)| < \varepsilon$ auf Grund der vorausgesetzten Stetigkeit der Funktion φ. Wegen der Konvergenz des unendlichen Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \sqrt{\pi}$ schließt man hieraus sofort, daß sich bei hinreichend kleinem t das Integral J_2 beliebig wenig von $\varphi(x)$ unterscheidet. Für die beiden Integrale J_1 und J_3 gilt

$$|J_3| \leqq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{T}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma$$

$$|J_1| \leqq \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-T} e^{-\sigma^2} d\sigma.$$

Daher sind wegen der Konvergenz des unendlichen Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma$ bei hinreichend kleinem t diese Integrale beliebig klein. Hieraus folgt unsere Behauptung unmittelbar.

Auch bei zwei und mehr Dimensionen gilt, was lediglich eines Hinweises bedarf, eine ähnliche explizite Auflösungsformel für das Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung; es sei etwa für:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_t = 0$$

eine Lösung für $t > 0$ gesucht, welche für $t = 0$ in eine vorgeschriebene, stetige Ortsfunktion $\varphi(x, y, z)$ übergeht. Die Lösung lautet

$$(4) \quad u(x, y, z, t) = \frac{1}{8(\sqrt{\pi t})^3} \int\int\int\limits^{\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-\frac{1}{4t}((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

wie man leicht bestätigen wird.

Ein anderes, zu einer interessanten Bemerkung führendes Anfangswertproblem der Wärmeleitungsgleichung bezieht sich auf einen geschlossenen linear ausgedehnten Wärmeleiter (etwa einen Draht) von der Länge 1. Hier lautet das Anfangswertproblem der Gleichung $u_{xx} - u_t = 0$ genau wie oben. Nur tritt die Bedingung hinzu, daß die Funktion $\varphi(x)$ wie auch die Lösung $u(x, t)$ in x periodisch mit der Periode 1 sein muß. Eine solche periodische Lösung, welche die vorgeschriebenen Anfangswerte annimmt, kann als Superposition der Lösungen $e^{-4\pi^2\nu^2 t}(a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)$ (vgl. S. 16) sofort hingeschrieben werden, wenn wir voraussetzen, daß die Anfangsfunktion $\varphi(x)$ sich in eine gleichmäßig konvergente Fouriersche Reihe

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)$$

entwickeln läßt. Dann erhalten wir in

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x) e^{-4\pi^2\nu^2 t}$$

sofort die gewünschte Lösung des Anfangswertproblems. Indem wir die Fourierkoeffizienten durch Integrale ausdrücken und, was für $t > 0$ sicher erlaubt ist, Summation und Integration vertauschen, erhalten wir

$$(5)\qquad u(x,t) = \int_0^1 \varphi(\xi) \left\{ 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \cos 2\pi\nu(x-\xi)\, e^{-4\pi^2\nu^2 t} \right\} d\xi.$$

Andererseits können wir unser Anfangswertproblem noch auf ganz andere Art explizite lösen, indem wir beachten, daß

$$(6)\qquad W(x-\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi-\nu)^2}{4t}}$$

eine periodische Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit der Periode 1 ist. Dieselbe Überlegung wie oben zeigt uns dann, daß die Formel

$$(7)\qquad u(x,t) = \int_0^1 \varphi(\xi)\, W(x-\xi, t)\, d\xi$$

das Anfangswertproblem löst.

Vergleich beider Lösungen ergibt wegen der Willkürlichkeit der Funktion $\varphi(\xi)$ unter Berücksichtigung des in der Variationsrechnung[1] benutzten „Fundamentallemmas", daß die Identität

$$(8)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\nu x)\, e^{-\pi\nu^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\nu)^2}{t}}$$

bestehen muß, welche wir schon früher (Bd. I, S. 63) im Spezialfall $x = 0$ als *Transformationsformel der elliptischen ϑ-Funktion* abgeleitet haben. Diese Formel wird also hier durch die Wärmeleitungsgleichung illustriert.

Dabei ist allerdings stillschweigend vorausgesetzt worden, daß die beiden Lösungen (5) und (7) identisch sein müssen. Um den Beweis hierfür nachzuholen, haben wir zu zeigen, daß unser Anfangswertproblem nur eine einzige Lösung haben kann, oder daß die zur Anfangsfunktion Null gehörige Lösung — etwa die Differenz zweier zu denselben Anfangswerten gehörigen Lösungen — selbst identisch Null ist. In der Tat erhalten wir aus der Gleichung $u_{xx} - u_t = 0$ durch Multiplikation mit u und Integration über das Intervall bei Berücksichtigung der Periodizität sofort

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int^1 u^2\, dx + \int^1 u_x^2\, dx = 0.$$

[1] Siehe Bd. I, S. 159.

Also

$$\frac{d}{dt}\int u^2\,dx \leqq 0.$$

Wenn daher für $t=0$ identisch $u=0$ gilt, so muß u auch für $t>0$ identisch verschwinden, q.e.d.[1].

2. Anfangswertprobleme der Wellengleichung. Für die Wellengleichung in einer Raumdimension haben wir das Anfangswertproblem schon früher (vgl. Kap. I, § 7, 1) gelöst. Wir entwickeln hier die besonders wichtige Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung in drei Dimensionen

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}. \tag{9}$$

Diese Lösung ergibt sich wiederum durch Superposition, indem man von den früher gefundenen Lösungen der Wellengleichung $\frac{F(r-t)}{r}$ bei willkürlichem F ausgeht. Dabei ist mit beliebigem Parameterpunkt ξ, η, ζ:

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Es sei $F_\varepsilon(\lambda)$ eine nicht negative Funktion eines Parameters λ, welche außerhalb des Intervalls $-\varepsilon<\lambda<\varepsilon$ Null ist und für welche $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F_\varepsilon(\lambda)\,d\lambda = 1$ gilt. Sicherlich ist die als Superposition von Kugelwellen durch Integration über alle Werte ξ, η, ζ mittels willkürlichem stetig differenzierbarem $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ entstehende Funktion

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\int \varphi(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{F_\varepsilon(r-t)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

eine Lösung der Wellengleichung. Lassen wir nunmehr $\varepsilon \to 0$ streben und führen den Grenzübergang unter dem Integralzeichen aus, so gelangen wir zu dem Ausdruck

$$u(x,y,z,t) = \frac{t}{4\pi}\int\int_{\Omega} \varphi(x+t\alpha, y+t\beta, z+t\gamma)\,d\Omega = t\,M_t\{\varphi\}, \tag{10}$$

wobei M_t den Mittelwert der Funktion φ über die Kugeloberfläche vom Radius t um den Mittelpunkt x, y, z und $d\Omega$ das Oberflächenelement der Kugel Ω: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ bedeutet.

Statt den Grenzübergang zu rechtfertigen, ist es bequemer, die gewonnene Funktion u direkt als Lösung der Wellengleichung zu verifizieren. Wir übergehen diese Verifikation hier, da wir sie später ohnedies systematisch in einem allgemeineren Rahmen vornehmen werden (vgl. Kap. VI, § 5).

Man erkennt sofort, daß die Funktion u die Anfangsbedingungen

$$u(x,y,z,0) = 0, \qquad u_t(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$$

[1] Dieses Verfahren zur Führung von Eindeutigkeitsbeweisen wird später (Kap. V, § 3 und VI, § 4) in wesentlich verallgemeinerter Form eine wichtige Rolle spielen.

erfüllt. Berücksichtigen wir, daß mit u auch u_t eine Lösung der Wellengleichung ist, so erkennen wir leicht, daß *allgemein bei vorgegebenem*

$$u(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z); \qquad u_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$$

die Funktion

$$u = t\, M_t\{\varphi\} + \frac{\partial}{\partial t}\, t\, M_t\{\psi\} \tag{11}$$

Lösung des Anfangswertproblems ist.

3. Methode des Fourierschen Integrals zur Lösung von Anfangswertproblemen. Es gibt eine allgemeine Methode, durch Superposition ebener Wellen Anfangswertprobleme bei Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Zweckmäßigerweise wird man auch diese Methode, um Diskussionen über die Legitimität von Vertauschungsprozessen usw. zu vermeiden, nur zur heuristischen Gewinnung des Lösungsausdruckes verwenden und lieber nachträglich den entstehenden Ausdruck direkt als Lösung verifizieren.

Es sei

$$L[u] = 0 \tag{12}$$

eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ oder kurz $u(x, t)$ mit den Lösungen

$$e^{i(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - bt)} \quad \text{oder abgekürzt} \quad e^{i(ax)} e^{-ibt}. \tag{13}$$

Dabei nehmen wir an: es gibt zu jedem reellen Zahlensystem $a_1, \ldots, a_n$ oder kurz a genau k voneinander verschiedene reelle algebraisch von den a_i abhängenden Werte (vgl. § 5, S. 150)

$$b = b_\varkappa(a_1, \ldots, a_n), \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

für welche (13) Lösung von (12) ist. Bezeichnen dann $W_1, W_2, \ldots, W_k$ k willkürliche Funktionen von $a_1, \ldots, a_n$, so können wir durch Superposition von ebenen Wellen rein formal den Ausdruck

$$u = \sum_{\varkappa=1}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} \!\!\cdots\! \int W_\varkappa(a_1, \ldots, a_n)\, e^{i(ax)}\, e^{-it\, b_\varkappa(a_1, \ldots, a_n)} d a_1, \ldots, d a_n \tag{14}$$

bilden, welcher sicherlich wiederum eine Lösung von (12) ist, wenn alle Integrationsprozesse konvergieren und Bildung des Differentialausdruckes $L[u]$ unter dem Integralzeichen erlaubt ist.

Wir benutzen diese Bemerkung, um eine Lösung der Differentialgleichung (12) zu konstruieren, welche mit vorgegebenen Funktionen φ_ν den k Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_0(x) \\ u_t(x, 0) &= \varphi_1(x) \\ &\;\;\vdots \\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} u(x, 0) &= \varphi_{k-1}(x) \end{aligned} \tag{15}$$

genügt.

Bei Differentiation nach t unter dem Integralzeichen in (14) ergibt sich für $t=0$ aus diesen Anfangsbedingungen für die Funktionen $W_1, \ldots, W_k$ das System der Bedingungsgleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} \varphi_0 &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \sum_{\varkappa=1}^{k} W_\varkappa(a)\, e^{i(a x)}\, d a_1 \cdots d a_n \\ \varphi_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \sum_{\varkappa=1}^{k} (-i b_\varkappa)\, W_\varkappa(a)\, e^{i(a x)}\, d a_1 \cdots d a_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{k-1} &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \sum_{\varkappa=1}^{k} (-i b_\varkappa)^{k-1}\, W_\varkappa(a)\, e^{i(a x)}\, d a_1 \cdots d a_n . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen aber können nach dem Fourierschen Umkehrsatz sofort aufgelöst werden durch die Formeln

$$(17)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} (-i b_\varkappa)^l W_\varkappa(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \varphi_l(\xi)\, e^{-i(a\xi)}\, d\xi_1 \cdots d\xi_n, \qquad (l = 0, \ldots, k-1)$$

wo nun rechts bekannte Ausdrücke stehen. Somit erhalten wir für die k unbekannten Funktionen $W_1, \ldots, W_k$ ein System von linearen Gleichungen, dessen Determinante $|(-i b_\varkappa)^l|$ wegen der Voraussetzung, daß alle b_i verschieden seien, nicht verschwinden kann. Somit bestimmen sich die W_k eindeutig, und wir haben damit formal unser Anfangswertproblem gelöst.

Als Beispiel behandeln wir wiederum die Wellengleichung in drei Raumdimensionen

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= 0 \\ u_t(x, y, z, 0) &= \varphi(x, y, z) . \end{aligned}$$

Für b ergeben sich in unserem Beispiel die beiden Werte

$$(18)\qquad b = \pm\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \pm\varrho .$$

Somit liefert der Ansatz des Fourierschen Integrals, indem wir von vornherein die Anfangsbedingung $u(x, y, z, 0) = 0$ berücksichtigen, die Darstellung

$$(19)\qquad u(x, y, z, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(a_1 x + a_2 y + a_3 z)} \sin\varrho t\, d a_1\, d a_2\, d a_3 .$$

Nach Differentiation unter dem Integralzeichen erhalten wir für den Wert $t=0$:

$$u_t(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \varrho W(a_1, a_2, a_3)\, e^{i(a_1 x + a_2 y + a_3 z)}\, d a_1\, d a_2\, d a_3$$

und daher gemäß dem Umkehrtheorem für W den Ausdruck

$$(20)\qquad W(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^3\varrho}\iiint\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,e^{-i(a_1\xi+a_2\eta+a_3\zeta)}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,.$$

Wir versuchen nun, indem wir diesen Wert W in (19) eintragen, und dann in dem entstehenden sechsfachen Integral

$$u=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\frac{da_1\,da_2\,da_3}{\varrho}\iiint\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

die Integrationen nach a_1, a_2, a_3 und ξ, η, ζ vertauschen, zu einer einfacheren Form der Lösung zu gelangen. Diese Vertauschung ist allerdings nicht ohne weiteres möglich, weil dann das entstehende innere Integral

$$\iiint\frac{1}{\varrho}\,e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\,da_1\,da_2\,da_3$$

$$=\int_0^\infty\varrho\,d\varrho\iint_\Omega e^{i[a_1(x-\xi)+a_2(y-\eta)+a_3(z-\zeta)]}\,d\Omega=\frac{4\pi}{r}\int_0^\infty\sin\varrho r\,d\varrho$$

nicht konvergiert; jedoch ermöglicht ein einfacher, auch später (z. B. Anhang § 1 und § 3, sowie Kap. VI, § 5) angewandter Kunstgriff, die gewünschte Vertauschung durchzuführen. Hierzu betrachten wir nicht das Integral (19) selbst, sondern das Integral

$$(21)\qquad v(x,y,z,t)=-\iiint_{-\infty}^{\infty}W(a_1,a_2,a_3)\,e^{i(a\,x)}\,\frac{\sin\varrho t}{\varrho^2}\,da_1\,da_2\,da_3\,,$$

aus dem sich die gesuchte Funktion durch zweimalige Differentiation nach t gewinnen läßt:

$$u=v_{tt}.$$

Tragen wir den Ausdruck (20) in (21) ein, so folgt nach Vertauschung der Integrationen[1] mit sinngemäßer Bezeichnung

$$v=-\iiint\varphi(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint e^{i[a(x-\xi)]}\,\frac{\sin\varrho t}{\varrho^3}\,da_1\,da_2\,da_3,$$

und hier ist nunmehr das innere Integral J konvergent; nach einfachen Umrechnungen folgt

$$J=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint e^{i[a(x-\xi)]}\,\frac{\sin\varrho t}{\varrho^3}\,da_1\,da_2\,da_3=\frac{1}{2\pi^2 r}\int^\infty\frac{\sin\varrho r\,\sin\varrho t}{\varrho^2}\,d\varrho,$$

wobei $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ gesetzt ist.

Für das Integral rechts erhalten wir wegen

$$\sin\varrho r\sin\varrho t=\sin^2\frac{t+r}{2}\varrho-\sin^2\frac{t-r}{2}\varrho$$

[1] Wir nehmen diese Vertauschung hier wiederum unbekümmert vor, da es sich zunächst nur um eine heuristische Methode zur Gewinnung der Lösung handelt, deren Verifizierung nachträglich in Kap. VI, § 5 erfolgen soll.

sofort den Wert

(22) $$\int_0^\infty \frac{\sin\varrho r \sin\varrho t}{\varrho^2}\,d\varrho = \left\{\frac{t+r}{2} - \left|\frac{t-r}{2}\right|\right\}\int_0^\infty \frac{\sin^2\varrho}{\varrho^2}\,d\varrho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{t+r}{2} - \left|\frac{t-r}{2}\right|\right]$$

und somit endlich

(23) $$J = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\,, & \text{für} \quad r \leqq t \\ \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{t}{r}\,, & \text{für} \quad r \geqq t. \end{cases}$$

Infolgedessen entsteht für v die Darstellung

(24) $$v = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\leqq t} \varphi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta - \frac{t}{4\pi}\iiint\limits_{r\geqq t} \frac{\varphi}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Differenzieren wir ein Integral der Form

$$J_1 = \iiint\limits_{r\leqq t} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

wobei die Integration über das Innere einer Kugel vom Radius t um den Punkt x, y, z erstreckt ist, nach t, so entsteht das Integral über die Oberfläche Ω dieser Kugel, also

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = \iint f(\xi,\eta,\zeta)\,d\Omega.$$

Entsprechend besitzt das Integral

$$J_2 = \iiint\limits_{r\geqq t} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

über das Äußere jener Kugel die Ableitung

$$\frac{\partial J_2}{\partial t} = -\iint\limits_{\Omega} f(\xi,\eta,\zeta)\,d\Omega.$$

Infolgedessen folgt aus (24)

$$v_t = -\frac{1}{4\pi}\iint \varphi\,d\Omega + \frac{1}{4\pi}\iint \varphi\,d\Omega - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\geqq t} \frac{\varphi}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

also

(25) $$v_t = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{r\geqq t} \frac{\varphi}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Durch nochmalige Differentiation folgt schließlich

(26) $$v_{tt} = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{\Omega} \varphi\,d\Omega$$

oder bei Gebrauch des früher eingeführten Symbols $M_t\{\varphi\}$ in Übereinstimmung mit dem Resultat in Nummer 2

(27) $$u = v_{tt} = t\,M_t\{\varphi\}.$$

4. Lösung der unhomogenen Gleichung durch Variation der Konstanten. Retardierte Potentiale. Sobald man das Anfangswertproblem einer homogenen linearen Differentialgleichung wie der Wellengleichung beherrscht, kann man durch ein einfaches und allgemeines Verfahren zu einer völligen Beherrschung der zugehörigen unhomogenen Differentialgleichung gelangen. Dieses Verfahren entspricht der bekannten Variation der Konstanten oder dem *Stoßprinzip* bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Zunächst geben wir eine allgemeine Formulierung und wenden sie sodann wieder auf die Wellengleichung an.

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung für eine Funktion $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ oder wieder kurz $u(x, t)$, indem wir mit dem Symbol x die n Raumvariablen $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen:

$$u_{tt} - L[u] = g(x, t), \tag{28}$$

wobei L ein beliebiger linearer Differentialausdruck ist, welcher höchstens die Ableitung u_t aber keine höheren Ableitungen nach t enthält. Das zu lösende Anfangswertproblem ist, eine Lösung u dieser Differentialgleichung (28) zu finden, für welche zu Beginn $t = 0$ gilt:

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = 0.$$

Die als bekannt vorgegebene rechte Seite $g(x\,t)$ stellt in den Anwendungen die von außen auf ein System wirkende Kraft dar.

Zu dem sachgemäßen, dem Stoßprinzip entsprechenden Ansatz wird man folgendermaßen geführt: Man stellt sich zunächst vor, daß die gegebene Funktion $g = g^*$ verschwindet außer in einem kleinen Intervall $\tau - \varepsilon \leqq t \leqq \tau$, für welches $\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} g^*(x, t)\,dt = g(x, \tau)$ gilt. Dies führt, indem man die Differentialgleichung zwischen den Grenzen $\tau - \varepsilon$ und τ nach t integriert und sodann formal den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ausführt, zur Betrachtung des folgenden Anfangswertproblems für die homogene Differentialgleichung. Man suche bei gegebenem Parameterwert τ für $t \geqq \tau$ eine Lösung $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ der homogenen Differentialgleichung

$$u_{tt} - L[u] = 0, \tag{29}$$

so daß für $t = \tau$ gilt

$$u(x, \tau) = 0, \qquad u_t(x, \tau) = g(x, \tau). \tag{29'}$$

Diese Lösung, die wir für $t \leqq 0$ als identisch null fortgesetzt denken, entspricht einem zur Zeit $t = \tau$ auf ein ruhendes System wirkenden momentanen Stoß von der Stärke $g(x, \tau)$. Wir bezeichnen die noch von dem Parameter abhängige Lösung mit $\varphi(x, t; \tau)$. Sie ist unabhängig von ihrer heuristischen Motivierung als Lösung des obigen Anfangswertproblems der homogenen Differentialgleichung definiert.

Indem wir die gesuchte Lösung als eine Superposition dieser Stoßwirkungen φ ansetzen, behaupten wir nunmehr: *Die Funktion*

$$u(x,t) = \int_0^t \varphi(x,t;\tau)\,d\tau \tag{30}$$

löst das Anfangswertproblem der unhomogenen Differentialgleichung (28) *mit den Anfangsbedingungen*

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = 0.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch Verifikation. Es ist nämlich

$$u_t = \int_0^t \varphi_t(x,t;\tau)\,d\tau$$

$$u_{tt} = \varphi_t(x,t;t) + \int_0^t \varphi_{tt}(x,t;\tau)\,d\tau$$

$$L[u] = \int_0^t L[\varphi]\,d\tau,$$

woraus wegen $\varphi_t(x,t;t) = g(x,t)$ das Bestehen der Differentialgleichung ebenso wie der Anfangsbedingungen folgt.

Dieses allgemeine Ergebnis, wenden wir nunmehr auf die Wellengleichung in drei Dimensionen an. Nach dem Ergebnis der Nr. 2 ist hier

$$\varphi(x,y,z,t;\tau) = (t-\tau)\,M_{t-\tau}\{g(x,y,z,\tau)\}.$$

Es ergibt sich also sofort als Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = g(x,y,z,t)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,y,z,0) = 0 \qquad u_t(x,y,z,0) = 0$$

die Funktion

$$u(x,y,z,t) = \int_0^t (t-\tau)\,M_{t-\tau}\{g(x,y,z,\tau)\}\,d\tau = \int_0^t \tau M_\tau\{g(x,y,z,t-\tau)\}\,d\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \tau\,d\tau \int_\Omega g(x+\tau\alpha, y+\tau\beta, z+\tau\gamma, t-\tau)\,d\Omega$$

oder, indem wir wieder rechtwinklige Koordinaten $\xi = \tau\alpha$, $\eta = \tau\beta$, $\zeta = \tau\gamma$ statt der Polarkoordinaten einführen,

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{r \leqq t} \frac{g(\xi,\eta,\zeta;t-r)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \tag{31}$$

wobei

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

ist. Man nennt diesen Ausdruck u ein *retardiertes Potential*. Er ist nämlich so gebildet wie das Potential einer räumlichen Massenbelegung mit der

Dichte g um den betreffenden Punkt (vgl. Kap. IV, § 1). Jedoch ist diese Dichte nicht in dem betrachteten Zeitmoment zu nehmen, sondern in einen Zeitmoment, der so lange zurückliegt wie eine mit der Geschwindigkeit 1 laufende Wirkung zum Wege zwischen dem Mittelpunkt der Kugel und dem Träger der Massenbelegung brauchen würde.

5. Das Anfangswertproblem für die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen. Absteigemethode. Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung in zwei Dimensionen

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{tt} \tag{32}$$

läßt sich unmittelbar aus der für drei Dimensionen gewinnen durch das folgende einfache, aber doch weittragende Verfahren, welches von HADAMARD als *Absteigemethode* bezeichnet wurde. Man fasse die Wellengleichung (32) als Spezialfall der Gleichung für drei Dimensionen auf, wobei die Anfangsdaten und mit ihnen die Lösung selbst als unabhängig von der dritten Variablen z vorausgesetzt werden. Man steigt also gewissermaßen von drei zu zwei Dimensionen herab. Dieser Gedanke liefert uns die gesuchte Lösung sofort, indem wir in der Formel (10) aus Nr. 2 die Voraussetzung einführen, daß $\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y) = u_t(x, y, z, 0)$ nicht von z abhängt. Wir können mit der Bezeichnung $\xi = t\,\alpha$, $\eta = t\,\beta$, $\zeta = t\,\gamma$ dann in dem so entstehenden Integral

$$u(x, y, t) = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1} \varphi(x+\xi, y+\eta)\, d\Omega = \frac{1}{4\pi t} \iint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1} \varphi(x+\xi, y+\eta)\, dO$$

als unabhängige Veränderliche die Größen ξ, η einführen und das Integral über die Oberfläche O der Kugel vom Radius t mit Hilfe der Formeln

$$\zeta = \sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}; \qquad dO = \frac{t}{\zeta}\, d\xi\, d\eta = \frac{t}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\, d\xi\, d\eta$$

sofort in folgender Form schreiben:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2} \leqq t} \frac{\varphi(x+\xi, y+\eta)}{\sqrt{t^2-\xi^2-\eta^2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{33}$$

Dieser Ausdruck stellt also die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung in zwei Dimensionen dar, wobei als Anfangsbedingungen $u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = \varphi(x, y)$ gesetzt sind.

Ein sehr bemerkenswerter Unterschied zwischen zwei und drei Raumdimensionen fällt beim Vergleich mit Formel (10) ins Auge. Während bei drei Raumdimensionen die Lösung in einem Punkte nur von den Anfangswerten längs der Oberfläche der um diesen Punkt mit dem Radius t geschlagenen dreidimensionalen Kugel abhängt, besteht das entsprechende Abhängigkeitsgebiet bei zwei Raumdimensionen aus dem Rand und dem Innern der entsprechenden zweidimensionalen Kugel oder des Kreises mit dem Radius t. Wir kommen auf die tiefere Bedeutung dieser Tatsache noch zurück (vgl. § 7 und Kap. VI, § 5, 3).

Im übrigen ergibt das allgemeine Prinzip aus Nr. 4 als Lösung der unhomogenen Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = g(x, y, t) \tag{34}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, y, 0) = 0, \qquad u_t(x, y, 0) = 0 \tag{34'}$$

den Ausdruck

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint \frac{g(\xi, \eta, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} \, d\xi \, d\eta,$$

welchen wir auch folgendermaßen schreiben können

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iiint_K \frac{g(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} \, d\xi \, d\eta \, d\tau, \tag{35}$$

wobei K das durch die Ungleichungen

$$\tau \leqq t; \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \leqq (t-\tau)^2$$

definierte Gebiet des ξ, η, τ-Raumes ist.

6. Das Ausstrahlungsproblem. Vom Standpunkt der Physik aus sind im Grunde noch wichtiger als Anfangswertprobleme sog. Ausstrahlungsprobleme, welche übrigens als Grenzfälle von Anfangswertproblemen aufgefaßt werden können und für welche ein Ansatz zu einer von einem solchen Grenzübergang unabhängigen Formulierung erst im Kap. VI, § 10 gegeben werden soll. In diesen Ausstrahlungsproblemen haben zu Beginn für $t = 0$ die Funktion u und ihre Ableitung nach der Zeit t die Werte Null (physikalisch gesprochen herrscht der Ruhezustand), jedoch ist in einem bestimmten Raumpunkt, etwa dem Nullpunkt $r = 0$, für die Funktion u eine charakteristische Singularität als Funktion der Zeit vorgeschrieben.

Im dreidimensionalen Raum sind uns Lösungen der Wellengleichung mit Singularität in einem festen Raumpunkt schon bekannt. Die Funktionen

$$\frac{F(t-r)}{r} \qquad \frac{G(t+r)}{r}$$

liefern derartige Ausstrahlungswellen, wenn wir von den noch zu erfüllenden Anfangsbedingungen absehen. Begrifflich gelangt man zu der Ausstrahlungslösung durch folgenden Grenzprozeß: Man betrachtet die unhomogene Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, y, z, t), \tag{36}$$

wobei f die „Dichte der äußeren Kraft" ist. Das entsprechende Anfangswertproblem für $t > 0$ mit der Ruhe als Anfangszustand war gelöst [vgl. (31)] durch

$$u = \frac{1}{4\pi} \iiint_{r \leqq t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta; t-r)}{r} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta$$

mit
$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 .$$

Nunmehr nehmen wir bei einem gegebenen kleinen Parameter ε an, daß $f = 0$ für $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geqq \varepsilon^2$ gilt und setzen
$$\iiint\limits_{\varrho \leqq \varepsilon} f(\xi, \eta, \zeta, t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 4\pi g(t) .$$

Dann wird, wenn wir $g(t) = 0$ für $t < 0$ setzen, und nachträglich den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ausführen, unsere Lösung übergehen in

$$u = \frac{g(t-r)}{r} \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 . \tag{37}$$

In dieser Ausstrahlungslösung stellt also die Funktion $4\pi g(t)$ die im Nullpunkt zur Zeit t konzentrierte erregende Kraft dar. Es ist interessant zu bemerken, daß diese Ausstrahlungslösung u an einer Stelle zur Zeit t nur von einem einzigen Impuls zur Zeit $t-r$ abhängt, welcher sich mit der Geschwindigkeit 1 im Moment t gerade vom Nullpunkt her bis zur Stelle x, y, z ausgebreitet hat.

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei der Ausstrahlungslösung im zweidimensionalen Raum. Wiederum betrachten wir die Differentialgleichung

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = f(x, y, t), \tag{38}$$

setzen $f = 0$ für $r^2 = x^2 + y^2 \geqq \varepsilon^2$ und schreiben
$$\iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2} \leqq \varepsilon} f(\xi, \eta, t)\, d\xi\, d\eta = 2\pi g(t) .$$

Mit Hilfe des Resultates aus Nr. 5 erhalten wir durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Ausstrahlungslösung

$$u(x, y, t) \begin{cases} = \displaystyle\int_0^{t-r} \frac{g(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}}\, d\tau, & \text{für} \quad r \leqq t \\ = 0 \qquad , & \text{für} \quad r > t. \end{cases} \tag{39}$$

Im Gegensatz zu drei Raumdimensionen hängt also hier die Ausstrahlungslösung an einer Stelle x, y zur Zeit t nicht nur von einem einzigen vorangegangenen Impuls, sondern von der ganzen Vorgeschichte des Ausstrahlungsprozesses bis zur Zeit $t-r$ ab.

Im übrigen ist es interessant, den Charakter der Singularität unserer Lösung für $r = 0$ auch im zweidimensionalen Falle zu untersuchen. Produktintegration ergibt wegen
$$\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}} = -\frac{d}{d\tau} \log \left| t - \tau + \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2} \right|$$

vermittels Entwicklung nach r die folgende Darstellung für die Singularität

$$u(x, y, t) = -g(t-r)\log r + g(0)\log 2t + \int^{t} g'(\tau)\log 2(t-\tau)\,d\tau + \varepsilon(t, r),$$

wobei gilt

$$\varepsilon(t, r) \to 0, \qquad \text{wenn} \qquad r \to 0$$

strebt. Man sieht jedenfalls hieraus, daß im Falle von zwei Raumdimensionen die Ausstrahlungslösung eine kompliziertere Singularität aufweist als im Falle von drei Raumdimensionen.

7. Ausbreitungsvorgänge und Huyghenssches Prinzip. Indem wir hinsichtlich einer ausführlicheren und mehr prinzipiellen Diskussion auf später, Kap. VI, verweisen, wollen wir hier an Hand der für die Wellengleichung gefundenen Resultate den Charakter dieser Ausbreitungsvorgänge ein wenig näher studieren. Wir betrachten zunächst die dreidimensionale homogene Wellengleichung und deren Anfangswertproblem. Stellen wir uns vor, daß zur Zeit $t = 0$ der Anfangszustand nur in der Umgebung G einer Stelle, etwa des Nullpunktes, von Null verschieden ist. Um den Zustand u an einer Stelle x, y, z zur Zeit t zu berechnen, haben wir um diesen Punkt x, y, z die Kugel mit dem Radius t zu schlagen und gewisse Integrale der Anfangswerte über diese Kugel zu bilden. Es wird also $u(x, y, z, t)$ nur dann von Null verschieden sein, wenn diese Kugeloberfläche das Anfangsgebiet G trifft, somit nur in einem Zeitintervall $t_1 < t < t_2$, dessen Länge gleich der Differenz des größten und kleinsten Abstandes vom Anfangsgebiet G ist. Dieses Faktum drückt den Charakter unserer Differentialgleichung als Gleichung für einen Ausbreitungsvorgang mit der Geschwindigkeit 1 aus. Der Anfangszustand im Gebiet G macht sich in einem anderen Punkte x, y, z nicht bemerkbar bis zum Zeitpunkt $t = t_1$, welcher gleich der kürzesten Entfernung zwischen dem Gebiet G und dem Punkte x, y, z ist. Nach einem Zeitpunkt t_2, welcher ebenso der größten derartigen Entfernung entspricht, ist der Effekt des Anfangszustandes beendigt. Dieses letztere Phänomen wird als *Prinzip von* HUYGHENS für die Wellengleichung bezeichnet. Es besagt, daß ein scharf lokalisierter Anfangszustand sich an einer anderen Stelle später als ein zeitlich ebenso scharf begrenzter Effekt kund gibt. Für den Grenzfall eines auf einen Punkt konzentrierten Anfangszustandes konzentriert sich sein Effekt auf einen anderen Punkt in einem bestimmten der Entfernung entsprechenden Zeitmoment.

Im Falle von zwei Raumdimensionen liegen die Verhältnisse jedoch völlig anders. Wir betrachten wiederum ein Gebiet G um den Nullpunkt und nehmen an, daß nur in diesem Gebiete die Anfangswerte von u und u_t von Null verschieden sind. In einem Punkte P mit den Koordinaten

x, y, der zu dem Gebiete G den kürzesten Abstand t_1 hat, wird dann sicherlich $u = 0$ sein für $t < t_1$. Für $t > t_1$ wird gemäß der Formel (33) aus Nr. 5 die Größe u nicht mehr identisch Null sein und, falls z. B. die Anfangsfunktion φ nicht negativ ist, immer von Null verschieden bleiben. Mit anderen Worten, der Charakter als Ausbreitungsvorgang bleibt auch für die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen bestehen. Ein lokalisierter Anfangszustand braucht eine gewisse Zeit, um einen Punkt im Raum zu erreichen. Jedoch besteht hier der Huyghenssche Charakter der Bewegung nicht mehr. Der Effekt des Anfangszustandes bleibt zeitlich nicht scharf begrenzt: er hallt vielmehr, nachdem er einmal eingetreten ist, ständig nach.

Wir bezeichnen bei Ausbreitungsvorgängen dasjenige Gebiet, welches durch die dort gegebenen Anfangswerte den Zustand in einem Punkte x, y, z zur Zeit t beeinflußt, als das zu x, y, z, t gehörige *Abhängigkeitsgebiet*. Im Falle der Wellengleichung in drei Raumdimensionen ist also dieses Abhängigkeitsgebiet die Kugeloberfläche vom Radius t um den Punkt x, y, z. Die Erregung in diesem Punkte zur Zeit t hängt in keiner Weise ab von den außerhalb jener Kugelfläche bestehenden Anfangsdaten.

Das Abhängigkeitsgebiet ist jedoch im Falle von zwei Raumdimensionen das ganze Innere und die Peripherie des Kreises vom Radius t um den Punkt x, y.

Vielleicht noch klarer wird der physikalische Unterschied an Hand der Ausstrahlungslösungen aus Nr. 7. Im Falle von drei Raumdimensionen wird ein vom Nullpunkt ausgestrahlter Vorgang an einer Stelle $P(x, y, z)$ zur Zeit t so wahrgenommen, daß an dieser Stelle zur Zeit t nur der Zustand merkbar ist, der vom Nullpunkte zum Zeitmoment $t - r$ ausstrahlt. Im Falle von zwei Raumdimensionen hängt der an der Stelle P zur Zeit t wahrgenommene Eindruck von dem gesamten Ausstrahlungsvorgang ab, welcher sich bis zur Zeit $t - r$ abgespielt hat.

Wenn also Wahrnehmungen auf Grund von physikalischen Vorgängen vor sich gehen, welche der Wellengleichung unterworfen sind, so gibt eine räumlich dreidimensionale Welt die Möglichkeit, durch Strahlung übermittelte Vorgänge scharf in einem wahrnehmenden Instrument abzubilden. In einer zweidimensionalen Welt wäre ein solches Bild verwischt.

Wir werden später in Kap. VI sehen, daß Betrachtungsweisen dieser Art weder auf die Wellengleichung noch auf zwei oder drei Raumdimensionen beschränkt sind.

In der Tat wird man erkennen, daß das Huyghenssches Prinzip der hier beschriebenen Art außer im Falle $n = 1$ für jede ungerade Raumdimensionszahl n bei der Wellengleichung gilt, jedoch nicht gilt für gerade Raumdimensionszahl.

§ 7. Die typischen Differentialgleichungsprobleme der mathematischen Physik[1].

1. Vorbemerkungen. Beispiele typischer Problemstellungen. Probleme der partiellen Differentialgleichungen treten fast niemals in der Form auf, daß die „allgemeine Lösung", d. h. die Gesamtheit *aller* Lösungen einer partiellen Differentialgleichung gesucht wird; auch die Aufsuchung spezieller Klassen von Lösungen, wie z. B. ebener Wellen, ist kaum je das Ziel einer Problemstellung; vielmehr handelt es sich stets darum, aus der Mannigfaltigkeit aller Lösungen auf Grund weiterer zur Differentialgleichung hinzutretender Bedingungen eine ganz spezielle individuelle Lösung herauszuheben. Wenn n Veränderliche gegeben sind, so beziehen sich diese Zusatzbedingungen meist auf $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeiten, welche als Ränder oder gelegentlich auch als Unstetigkeitsflächen bei Gebieten auftreten, innerhalb deren die Lösungen gesucht werden („Rand-, Anfangs- oder Sprungbedingungen"). Im § 6 haben wir solche Probleme diskutiert, und zwar *Anfangswertprobleme*; bei ihnen war eine Variable $x_{n+1} = t$ ausgezeichnet und ein durch eine Lösung u repräsentierter Vorgang für $t \geqq 0$ gesucht, wenn für $t = 0$ der „Anfangszustand", d. h. die Funktion u und gegebenenfalls Ableitungen von u nach der Zeit t als Funktionen der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ vorgeschrieben sind. Solche Lösungen von Anfangswertproblemen können übrigens auch gelegentlich für $t < 0$ fortgesetzt werden, so daß dann die Mannigfaltigkeit $t = 0$ im Innern des Definitionsgebietes der Lösung liegt. Bei Differentialgleichungen erster Ordnung, wo wir in Kap. II das Anfangswertproblem als das zentrale Problem behandelt haben, ist eine solche Fortsetzung in der Tat ganz von selbst geleistet. Für Probleme höherer Ordnung ist in Kap. I ähnliches im Falle analytischer Differentialgleichungen und analytischer Anfangsbedingungen in § 7 ebenfalls durchgeführt. Jedoch ist weder der analytische Charakter der Differentialgleichung und der Anfangsbedingungen eine naturgemäße Voraussetzung, noch ist a priori auch für analytische Differentialgleichungen der analytische Charakter der Lösungen evident. Es erscheint daher für das Folgende durchaus naturgemäß, wenn wir uns bei den Zusatzbedingungen tatsächlich auf Bedingungen längs Anfangs- oder Randmannigfaltigkeiten beschränken, über die hinaus eine Fortsetzung der Lösungen nicht in Betracht gezogen wird.

Abgesehen von den im vorigen Paragraphen behandelten Anfangswertproblemen haben wir typische *Randwertprobleme* schon früher, z. B. im Falle der Potentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

---

[1] Vergleiche zum Folgenden die entsprechenden Ausführungen bei HADAMARD: Lectures on Cauchy's Problem, New Haven 1923, insbesondere Kap. I, sowie einen zusammenfassenden Bericht von HADAMARD in L'Enseignement Mathématique, 1936, in welchem auch noch andere Problemtypen diskutiert werden.

diskutiert. Dieses Randwertproblem — welches eins der zentralen Probleme der Analysis darstellt — verlangt die Auffindung einer Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u = 0,$$

welche im Innern eines vorgegebenen Gebietes regulär, d. h. mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig ist und welche am Rande des Gebietes vorgeschriebene stetige Randwerte annimmt. Im Falle $n = 2$ und $n = 3$ haben wir dieses Randwertproblem für kreisförmige bzw. kugelförmige Gebiete durch das Poissonsche Integral explizite gelöst (vgl. Kap. I, § 3, 2 und Bd. I, Kap. VII, S. 445). Wir werden später in Kap. IV und VII die Lösung für beliebige Gebiete konstruieren und diskutieren.

Auch andere lineare Randwertprobleme für die Potentialgleichung treten auf, z. B. solche, bei denen am Rande nicht die Funktion selbst sondern irgendeine lineare Kombination zwischen ihr und der normalen Ableitung vorgegeben ist. Problemstellungen dieser Art sind im ersten Bande insbesondere unter den Gesichtspunkten der Variationsrechnung weitgehend diskutiert worden und werden in Kap. VII vollständig gelöst werden.

Das Randwertproblem der Potentialtheorie zeigt in besonders deutlicher Weise wie wenig die Auffindung der „allgemeinen“ Lösung für die Lösung des tieferen Randwertproblems nützt. Die allgemeine Lösung der Potentialgleichung für $n = 2$ ist ja bekanntlich in der Form gegeben

$$u = f(x + iy) + g\,(x - iy),$$

wobei f und g willkürliche analytische Funktionen einer Veränderlichen sind. In der Tat jedoch ist diese Form der Lösung relativ wertlos für die Behandlung der Randwertaufgabe.

Endlich sei hier noch auf das einfachste nicht lineare Randwertproblem einer partiellen Differentialgleichung hingewiesen, nämlich das *Randwertproblem der Minimalflächengleichung*

$$(1 + u_y^2)\, u_{xx} - 2\, u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)\, u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Wenn wir eine über ein Gebiet G der x, y-Ebene ausgebreitete Minimalfläche suchen, welche sich analytisch durch eine Funktion $u = u(x, y)$ darstellen läßt und von einer gegebenen Raumkurve Γ begrenzt wird, so läuft dies auf das folgende Randwertproblem hinaus: Es ist eine Lösung der Differentialgleichung (1) zu finden, welche in einem von der Projektion C der Kurve Γ begrenzten Gebiet G mit ihren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig ist und am Rande C vorgeschriebene Randwerte annimmt *(Randwertproblem von* PLATEAU *in der unsymmetrischen Form)*.

Einen anderen äußerst wichtigen Typus von Differentialgleichungsproblemen bilden die sog. *gemischten Probleme.* Wir betrachten ein

festes Gebiet G der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit dem Rande Γ, über den wir grundsätzlich alle bequem erscheinenden Stetigkeitsvoraussetzungen machen. Gesucht ist dann eine Funktion $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ oder, indem wir wieder den Buchstaben x statt des Systems $x_1, \ldots, x_n$ gebrauchen, kurz $u = u(x, t)$, welche im Gebiete G für $t \geqq 0$ definiert ist, und welche im Gebiete G für $t > 0$ einer gegebenen Differentialgleichung $L[u] = 0$ genügt, welche ferner am Rande Γ vorgeschriebene — gegebenenfalls noch von t abhängige — Randbedingungen und im Gebiete G für $t = 0$ vorgeschriebene Anfangsbedingungen erfüllt.

Ein Beispiel ist das Problem der eingespannten Saite. Wenn die Saite in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ eingespannt ist, so wird G das Intervall zwischen 0 und 1. Die Randbedingungen lauten $u(0, t) = u(1, t) = 0$ und als Anfangsbedingungen können vorgeschriebene Werte von u und u_t für $t = 0$ als Funktionen von x im ganzen Intervall G gewählt werden. Es könnten im übrigen ebensogut auch andere Randbedingungen an den Endpunkten gestellt werden, oder die unhomogene Differentialgleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t)$$

mit gegebener rechter Seite als Ausgangspunkt dienen.

Alle diese gemischten Probleme lassen sich, wenn der Differentialausdruck $L[u]$ linear und homogen ist, zerspalten in solche von zwei Typen:

1. Beim ersten Typus sind die Randbedingungen homogen, wie z. B. Verschwinden der Funktion u. Solche Bedingungen treten für *Schwingungsprobleme eines begrenzten im Gebiet G* ausgebreiteten *Systems* auf, wobei das schwingende System seine Bewegung *mit einem gegebenen Anfangszustand* bei $t = 0$ beginnt. Diese Schwingungsprobleme haben wir schon im ersten Band ausführlich insbesondere auf Grund der Theorie der Eigenfunktionen diskutiert.

2. Beim zweiten Typ sind die Anfangsbedingungen homogen, d. h. die Funktion u und ihre in Frage kommenden Ableitungen verschwinden bei $t = 0$. Jedoch sind nunmehr die Randbedingungen unhomogen. Probleme dieser Art spielen eine äußerst wichtige Rolle in zahlreichen technischen Fragen als *Ausgleichsprobleme*. Grundsätzlich lassen sich Ausgleichsprobleme auf Probleme des vorangehenden Typus zurückführen. Wir brauchen nämlich nur von der gesuchten Funktion eine willkürlich wählbare, als bekannt anzusehende Funktion abzuziehen, welche die vorgeschriebenen Anfangs- und Randbedingungen befriedigt. Für die Differenz erhalten wir dann ein Problem vom Schwingungstypus mit unhomogener Differentialgleichung, also jedenfalls ein Problem, das der Methode der Eigenfunktionen gemäß Bd. I, Kap. V unmittelbar zugänglich ist. Trotz dieser Reduktion der Ausgleichsprobleme auf die Probleme vom Schwingungstypus ist eine Sonderbehandlung sowohl vom theoretischen als auch vom praktischen Standpunkt aus gerechtfertigt. In der Tat sind für die Behandlung der Ausgleichsprobleme

weitgehende und für die Anwendungen besonders zweckmäßige Methoden ausgearbeitet worden, deren Grundideen wir im Anhang dieses Kapitels diskutieren werden.

Unter die Rubrik der gemischten Probleme gehören auch die im vorigen Paragraphen erwähnten Ausstrahlungsprobleme, welche wir im § 6 als Grenzfälle unhomogener Differentialgleichungsprobleme aufgefaßt haben, und welche im übrigen auch als Grenzfälle von Ausgleichsproblemen angesehen werden können.

Schließlich seien noch einige Beispiele für andere typische Möglichkeiten erwähnt. Das *Riemannsche Abbildungsproblem* verlangt geometrisch ein vorgegebenes Gebiet G der x, y-Ebene auf den Einheitskreis $u^2 + v^2 < 1$ konform abzubilden. Analytisch handelt es sich um das folgende Randwertproblem: Gesucht ist ein im Gebiet G definiertes und in ihm mit den ersten Ableitungen stetiges Lösungssystem, des Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungsproblems

$$u_x = v_y; \qquad u_y = -v_x,$$

so daß die Funktionen u und v stetige Randwerte besitzen, welche der Randbedingung $u^2 + v^2 = 1$ genügen.

Man erkennt unmittelbar, daß es sich bei dieser Formulierung nicht mehr um ein einfaches Randwertproblem der Potentialtheorie handelt, wenn auch die Lösung dieses Problems auf ein gewöhnliches Randwertproblem zurückgeführt werden kann, wie wir schon in Bd. I, S. 327 gesehen haben und im nächsten Kapitel noch von anderen Gesichtspunkten aus erneut sehen werden.

Allgemeiner und keineswegs mehr so einfach mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln zu behandeln ist das *Problem von* PLATEAU in der allgemeinen Parameterform, welches verlangt, eine von einer gegebenen Raumkurve Γ begrenzte Minimalfläche zu konstruieren. Dieses Problem kann nach § 2, Nr. 2 als Differentialgleichungsproblem folgendermaßen formuliert werden: Gesucht sind im Einheitskreise $u^2 + v^2 < 1$ drei Funktionen x, y, z von u, v, welche die Differentialgleichungen

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \tag{2}$$

mit den Zusatzbedingungen

$$\begin{cases} x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \\ x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0 \end{cases} \tag{3}$$

genügen, welche stetige von der Bogenlänge s auf dem Einheitskreis abhängige Randwerte $x(s), y(s), z(s)$ besitzen und für welche diese Randwerte eine Parameterdarstellung der gegebenen Raumkurve Γ bilden. Während das Plateausche Problem in der oben gegebenen unsymmetrischen Form durchaus nicht stets eine Lösung besitzt, läßt sich das Problem in der hier gegebenen Form stets lösen[1].

[1] Vgl. Kap. VII, § 10.

Als ein letztes Beispiel, welches sich auf die Potentialgleichung bezieht, jedoch von dem Typus des klassischen Randwertproblems wesentlich abweicht, sei das *Strahlproblem der ebenen Hydrodynamik* genannt.

Ein unendliches Gebiet G der x, y-Ebene sei begrenzt von der x-Achse, von einem „Düsenrand" D, welcher von einem Punkte A aus nach abnehmenden Werten von x sich bis ins Unendliche erstreckt und eine Gerade $y = b$ asymptotisch approximiert, sowie von einem „Strahlrand" S, welcher von A aus sich nach positiven Werten von x hin erstreckt und für $x \to \infty$ die Gerade $y = 1$ asymptotisch approximiert (Abb. 6). In dem Gebiet G, welches von diesem Linienzug $D + S$ einerseits und der x-Achse andererseits begrenzt ist, wird eine Stromfunktion $\psi(x, y)$ gesucht, für welche die Differentialgleichung $\Delta\psi = 0$ in G erfüllt ist, für welche sodann die Randbedingungen $\psi = 0$ auf $y = 0$, $\psi = 1$ auf $D + S$ erfüllt sind und für welche ferner längs S die nach außen weisende normale Ableitung $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$ den vorgeschriebenen konstanten Wert 1 hat. Es wird weiter verlangt, daß $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ gegen 1 strebt, wenn x in G gegen positive unendlich große Werte strebt, während der Grenzwert gleich $\frac{1}{b}$ ist, wenn diese Annäherung gegen negative unendlich große Werte von x erfolgt. Es handelt sich hier um die Formulierung des Randwertproblems der „freien Strahlbildung". Von dem Rand des Gebietes G ist nämlich der Strahlbestandteil S nicht von vornherein vorgegeben, sondern S ist ein „freier" Rand, welcher durch das Problem selbst mitbestimmt werden soll. Dafür haben wir hier auch eine Bedingung mehr auf S vorgeschrieben als beim gewöhnlichen Randwertproblem zulässig wäre, wo lediglich die Randwerte der Funktion aber nicht noch die der Ableitungen vorgeschrieben werden dürfen[1].

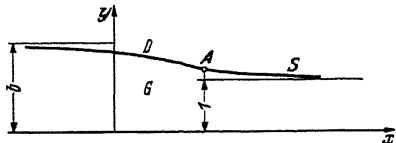



Abb. 6.

2. Grundsätzliche Betrachtungen. Die verschiedenen oben genannten Typen von Differentialgleichungen werden von der Geometrie oder der mathematischen Physik oder von technischen Anwendungen her in naturgemäßer Weise präsentiert. Jedoch können und müssen diese Problemstellungen auch in sich rein mathematisch motiviert und gerechtfertigt werden. Das wichtigste Ergebnis dabei ist folgendes: *Randwertprobleme gehören naturgemäß zu elliptischen Differentialgleichungen.*

[1] Das Problem der freien Strahlbildung ist zuerst von HELMHOLTZ angegriffen und von ihm und seinen Nachfolgern mit Hilfe funktionentheoretischer Methoden für viele spezielle Düsenformen gelöst worden. Vgl. die zusammenfassenden Berichte von JAFFÉ: Z. angew. Math. Mech. 1922, und von A. WEINSTEIN: L'enseignement mathematique 1936.

Anfangswertprobleme sowie gemischte Probleme und Ausstrahlungsprobleme zu hyperbolischen und parabolischen Differentialgleichungen.

Ohne uns in eine detaillierte Systematik zu verlieren, wollen wir diese These durch Diskussion typischer Beispiele und Hinweise auf spätere allgemeine Ausführungen rechtfertigen.

Wir gehen von folgendem allgemeinen Gesichtspunkt aus: Bei der Stellung eines Problems der mathematischen Physik, wobei eine gewisse Lösung aus vorgegebenen Daten bestimmt werden soll, sind drei Forderungen naturgemäß.

1. *Die Lösung muß existieren.*
2. *Die Lösung soll eindeutig bestimmt sein.*
3. *Die Lösung soll von den Daten stetig abhängen.*

Die erste Forderung ist mathematisch selbstverständlich; es dürfen nicht „zu viel", d. h. sich widersprechende Eigenschaften von der Lösung verlangt werden.

Die zweite Forderung drückt aus, daß das Problem in einer *vollständigen* Weise gestellt werden muß; die Problemstellung darf für die Lösung keinen unzulässigen Spielraum mehr lassen.

Die dritte Forderung ist vom Standpunkt der grundsätzlichen Anwendbarkeit unseres analytischen Problems auf Naturvorgänge gerechtfertigt und bildet einen besonders einschneidenden, nicht mehr trivialen Gesichtspunkt. In den Anwendungen haben wir uns stets die gegebenen Daten als nicht scharf fixiert vorzustellen. Z. B. sind in den Anwendungen vorgegebene Längen, vorgegebene Zeitmomente stets mit gewissen kleinen Fehlergrenzen behaftet. Ein mathematisches Problem kann nur dann als adäquat für eine Beschreibung realer Phänomene angesehen werden, wenn einer Veränderung der vorgegebenen Daten in hinreichend kleinem Spielraum ebenfalls eine kleine, d. h. auf einen vorgeschriebenen Spielraum beschränkte Änderung der Lösung entspricht. Dies ist unsere dritte Forderung. Sie drückt die *physikalische* Determiniertheit unseres Problems aus.

Ein Differentialgleichungsproblem, welches unseren Forderungen genügt, wollen wir ein *sachgemäßes Problem* nennen.

Ein weiterer Gesichtspunkt bzw. eine weitere Frage stellt sich bei Anfangswert- und Strahlungsproblemen an Hand von Beispielen ein. Es zeigt sich, daß die Lösungen vielfach nicht von der Gesamtheit der vorgegebenen Daten abhängen. Es entsteht so die Frage nach dem *Einfluß- bzw. dem Abhängigkeitsgebiet der Lösung.*

Um unsere allgemeine oben gestellte These zu rechtfertigen, orientieren wir uns an einigen Beispielen, hauptsächlich im Hinblick auf unsere dritte Forderung. Wir betrachten zunächst die elliptische Differentialgleichung des Potentials $\Delta u = 0$ in einem Gebiet G mit dem Rande Γ. Die Forderung der Existenz der Lösung ist schon durch unsere früheren

Betrachtungen (vgl. Bd. I, Kap. V) wenigstens in Spezialfällen wie Kreis, Kugel, Rechteck gesichert und wird später allgemein bewiesen werden. Hier genügt das Randwertproblem für beliebige stückweise glatte Berandung der obigen Eindeutigkeitsforderung. Diese Eindeutigkeit folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß jede in einem Gebiet reguläre Potentialfunktion ihr Maximum und Minimum am Rande annimmt, also identisch verschwindet, wenn ihre Randwerte Null sind. Daher würde die Differenz zweier zu denselben Randwerten gehörigen Lösungen eine Potentialfunktion mit den Randwerten Null darstellen, d.h. identisch verschwinden.

Die Forderung der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von den Randwerten ist ebenfalls erfüllt, wie man aus dem Satze von der Annahme der Extremwerte am Rand (vgl. IV, § 3) erkennt. Wenn zwei verschiedene vorgegebene Randwerte sich überall um weniger als ε unterscheiden, so können die zugehörigen Potentialfunktionen im ganzen Bereich um nicht mehr als ε verschieden sein.

Das Randwertproblem der Potentialgleichung ist also gemäß unseren obigen Forderungen ein sachgemäßes Problem.

Weiterhin erkennen wir, daß für jeden Punkt im Innern des Bereiches das Abhängigkeitsgebiet in bezug auf die Randwerte der gesamte Rand ist, d. h. der Wert der Lösung u in irgendeinem inneren Punkt x, y hängt von den Randwerten auf jedem Teil des Randes ab. Würde nämlich ein Teil C des Randes ohne Einfluß auf den Wert von u in einem gewissen Teilgebiete des Bereiches sein, so würden wir in diesem Gebiete dieselbe Lösung u erhalten, wenn wir die Randwerte nur auf C abändern. Nun gehört zu den Randwerten identisch 1 die Lösung $u = 1$, während zu Randwerten, welche auf C nicht gleich 1, sonst aber überall gleich 1 sind, eine andere Lösung u gehört. Dies aber ergibt einen Widerspruch, und daher ist der gesamte Rand Abhängigkeitsgebiet.

Das Anfangswertproblem bei der Potentialgleichung wäre im Gegensatz zum Randwertproblem unsachgemäß. Zunächst: Es ist im allgemeinen überhaupt nicht lösbar. Schreiben wir z. B. $u(x, 0) = 0$ $u_y(x, 0) = g(x)$ und verlangen eine Lösung der Differentialgleichung $u = 0$ mit diesen Anfangswerten für die obere Halbebene $y > 0$, so müßte diese Lösung nach dem Spiegelungsprinzip durch Spiegelung in die untere Halbebene fortsetzbar, also auch auf der x-Achse analytisch sein. Es muß also auch $g(x)$ eine analytische Funktion von x sein und kann daher nicht willkürlich als eine z. B. lediglich zweimal stetig differenzierbare Funktion vorgegeben werden. (Im Falle analytischer Anfangswerte ist die Lösung in Kap. I, § 7 konstruiert.)

Ferner: Die Lösung eines solchen Anfangswertproblems ist nicht stetig von den Daten abhängig, wie das folgende von HADAMARD hervorgehobene Beispiel zeigt: Betrachten wir das obige Anfangswertproblem

mit einer Folge von analytischen Anfangswerten $g_n(x) = \frac{\sin n x}{n}$, so strebt $g_n(x)$ mit wachsendem n gleichmäßig gegen die Funktion $g(x) = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems für g_n lautet

$$u(x, y) = \frac{\mathfrak{Sin}\, n y \sin n x}{n^2}.$$

Sie strebt mit wachsendem n nicht gegen die zu den Anfangswerten $g(x) = 0$ gehörige Lösung $u = 0$. Auch diese Bemerkung weist auf die Unsachgemäßheit des Anfangswertproblems hin.

Im Gegensatz hierzu erfüllt z. B. das Anfangswertproblem für die einfachste hyperbolische Gleichung, nämlich die Wellengleichung, alle unsere Forderungen. Bei der Wellengleichung $u_{xx} - u_{tt} = 0$ für eine Funktion $u(x, t)$ lautete die Lösung des Anfangswertproblems mit

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x):$$

$$2u(x, t) = \varphi(x + t) + \varphi(x - t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\, d\tau.$$

Die Lösung dieses hyperbolischen Problems existiert, ist eindeutig bestimmt und hängt offenbar stetig von den vorgegebenen Daten $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ab. Auch der Abhängigkeitsbereich für die Lösung ist leicht festzustellen: $u(x, t)$ hängt nur von den Werten $\varphi(\xi)$ und $\psi(\xi)$ ab, für welche $x - t \leqq \xi \leqq x + t$ gilt.

Dagegen würde ein Randwertproblem im Falle unserer hyperbolischen Differentialgleichung sinnlos sein. Ersetzen wir z. B. unsere Differentialgleichung durch die äquivalente Gleichung $u_{xy} = 0$ für eine Funktion $u(x, y)$, so können wir beispielsweise für ein achsenparalleles Rechteck die Randwerte nicht mehr willkürlich vorschreiben, da die Ableitung u_y in entsprechenden gegenüber liegenden Punkten der Rechtecksseiten $x =$ konst. übereinstimmen müssen und Entsprechendes für u_x gilt. Es kann also u nur auf zwei anstoßenden Rechtecksseiten willkürlich vorgegeben werden, und ein Randwertproblem ist damit ausgeschlossen.

Ganz ähnliches wie für die hyperbolischen Differentialgleichungen gilt für die parabolischen, worüber man sich an Hand der Wärmeleitungsgleichung orientieren kann.

Im übrigen wird in der weiteren Ausführung des Werkes die allgemeine hier aufgestellte und an Beispielen erläuterte These über die Sachgemäßheit von Differentialgleichungsproblemen immer wieder bestätigt und vertieft werden.

3. Allgemeine Bemerkungen über lineare Probleme. Schon in Bd. I, Kap. V, § 1 ist auf die Analogie zwischen Problemen linearer Differentialgleichungen und linearer Gleichungssysteme von endlich vielen linearen Gleichungen für ebenso viele Unbekannte hingewiesen worden, z. B. bei Ersetzung von Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen.

Dieser Gedanke, dessen strenge Durchführung einen Grenzübergang verlangt, kann hier nicht im einzelnen verfolgt werden[1]. Hier begnügen wir uns mit der Bemerkung, daß bei N linearen Gleichungen mit N Unbekannten die *Alternative* gilt: *Entweder das zugehörige homogene Problem besitzt eine nicht triviale Lösung oder das allgemeine unhomogene Problem besitzt bei beliebig vorgegebenen Daten eine eindeutige Lösung.* Da eine Mehrdeutigkeit bei der Lösung des allgemeinen unhomogenen Problems zu einer nicht trivialen Lösung des homogenen Problems führt, so kann man die Alternative auch folgendermaßen formulieren: Existenz der Lösung des allgemeinen unhomogenen Problems und Eindeutigkeit derselben sind bei N linearen Gleichungen mit N Unbekannten äquivalente Tatsachen.

Wir können erwarten, daß „sachgemäße" lineare Probleme der mathematischen Physik sich so verhalten, wie ein System N linearer Gleichungen mit N Unbekannten, und gelangen so zu den folgenden heuristischen Prinzip: Wenn es sich erweist, daß bei einem sachgemäßen linearen Differentialgleichungssystem das zugehörige homogene Problem lediglich die „triviale Lösung" Null besitzt, so dürfen wir die Existenz der (dann eindeutig bestimmten) Lösung des allgemeinen unhomogenen Problems erwarten. Ist jedoch das homogene Problem lösbar, so wird die Lösbarkeit des unhomogenen an die Erfüllung gewisser Zusatzbedingungen geknüpft sein.

Wir haben im ersten Bande dieses Alternativprinzip weitgehend bestätigt gefunden und werden die dort gewonnenen Einsichten in den folgenden Kapiteln vertiefen.

Anhang zum dritten Kapitel.

Ausgleichsprobleme und Heavisides Operatorenkalkül.

Die Kap. III, § 7 genannten Ausgleichsprobleme spielen in den Anwendungen, insbesondere in der Elektrotechnik eine äußerst wichtige Rolle und bilden daher den Gegenstand einer ausgedehnten fast durchweg den Standpunkt der Anwendungen betonenden Literatur, wobei vielfach die berühmte von HEAVISIDE ausgebildete *Operatorenmethode* im Mittelpunkt steht. Diese Operatorenmethode, welche die gestellten Fragen mit Sachgemäßheit und Direktheit angreift, übt einen um so größeren Reiz aus, als die strenge Rechtfertigung ihres symbolischen Verfahrens vielfach keineswegs auf der Hand liegt. Erst nachträglich ist eine solche befriedigende Begründung des Kalküls von verschiedenen Seiten gegeben worden. Jedoch sind durch diese Begründungen die Heavisideschen Methoden keineswegs überflüssig gemacht, da das

[1] Vgl. etwa die Arbeit: COURANT, FRIEDRICHS, LEWY: Über die partiellen Differenzengleichungen der Physik. Math. Ann. Bd. 100, S. 32 ff.

symbolische Verfahren vielfach formal einfacher ist und unmittelbarer erlaubt, die Aufmerksamkeit auf den gewünschten Punkt zu konzentrieren.

Zwar würde eine vollständige Behandlung des ausgedehnten Gebietes den Rahmen dieses Werkes weit überschreiten; jedoch soll hier wenigstens an den einfachsten Typen von Problemen eine Theorie der Ausgleichsprobleme gegeben und an Beispielen erläutert werden.

§ 1. Ausgleichsprobleme und Lösung mittels Integraldarstellungen.

1. Beispiel. Wellengleichung. Es sei zunächst ein einfaches und leicht explizit zu behandelndes Beispiel für ein Ausgleichsproblem vorausgeschickt. Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1}$$

in einem Intervall $0 \leqq x \leqq l$ mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = 0$$

und den Randbedingungen

$$u(0, t) = f(t), \qquad u(l, t) = 0 \tag{α}$$

bzw.

$$u(0, t) = f(t), \quad u_x(l, t) = 0, \tag{β}$$

wobei $f(t)$ eine gegebene Funktion von t ist. Das erste Problem entspricht einer für $t = 0$ in Ruhe befindlichen Saite mit der Durchbiegung u, welche im Endpunkte $x = l$ befestigt und am Anfangspunkt einer durch die Funktion $f(t)$ vorgeschriebenen Bewegung unterworfen ist. Das zweite Problem entspricht am Anfangspunkt derselben Bewegung, wobei aber der Endpunkt der Saite frei in einer zur Ruhelage vertikalen Linie gleiten darf; oder aber (vgl. S. 152) dem elektrischen Vorgang in einem idealen Doppelkabel, wobei $u(x, t)$ die Spannung ist und die Stromstärke u_x am Endpunkte verschwindet. In beiden Problemen nehmen wir an

$$f(t) = 0 \text{ für } t \leqq 0.$$

Wir können diese Probleme sehr einfach explizit lösen, indem wir von der allgemeinen Lösung der Wellengleichung

$$u(x, t) = \varphi(t + x) + \psi(t - x) \tag{2}$$

ausgehen und die Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$ den Anfangs- und Randbedingungen anpassen. Der Übersicht halber denken wir uns die λ-Achse in Intervalle J_ν eingeteilt, wobei J_ν das Intervall $\nu l \leqq \lambda < (\nu + 1) l$ bedeutet. Dann lassen sich φ und ψ sukzessive in den verschiedenen Intervallen bestimmen.

Wir betrachten das zweite Problem mit Reflexion am Endpunkt. Die Anfangsbedingung für $t=0$ liefert für die gesuchten Funktionen die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(x) + \psi(-x) = 0 \\ &\varphi'(x) + \psi'(-x) = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

deren erste nach Differentiation

$$\varphi'(x) - \psi'(-x) = 0 \tag{3'}$$

ergibt. Dabei liegt x im Intervall J_0 und $-x$ im Intervall J_{-1}. Es folgt, daß φ bzw. ψ in diesen Intervallen konstant sind, und wir dürfen wegen der Relation $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) + \psi(-x) = 0$, indem wir über die an sich willkürliche additive Konstante in $\varphi(x)$ bzw. $-\psi(x)$ verfügen, diese Konstante als Null annehmen. Die Randbedingung für $x=0$ ergibt

$$\varphi(t) + \psi(t) = f(t) \tag{4}$$

gültig für alle Intervalle J_ν. Die Reflexionsbedingung am Endpunkt liefert

$$\lim_{x\to l} (\varphi'(t+x) - \psi'(t-x)) = 0 \tag{5}$$

oder nach Integration, indem wir $\varphi(t+l) - \psi(t-l)$ als überall stetig voraussetzen und (3) berücksichtigen,

$$\varphi(t+l) - \psi(t-l) = 0, \tag{6}$$

woraus wir die Rekursionsformel

$$\varphi(t+2l) = \psi(t) \tag{7}$$

entnehmen, welche für alle t in den Intervallen $J_{-1}, J_0, \ldots$ gilt. Somit sind unsere Funktionen φ und ψ und damit auch $u(x,t)$ durch Rekursionen für alle Werte von $t>0$ eindeutig bestimmt. Die Lösung läßt sich, wie man leicht feststellt, in der folgenden Weise explizit schreiben

$$u(x,t) = f(t-x) + \sum_{\nu=1} (-1)^\nu \{ f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)\}. \tag{8}$$

Hier ist die rechte Seite nur scheinbar eine unendliche Summe. Denn für jeden Zeitpunkt t ist nur eine endliche Anzahl ihrer Glieder von Null verschieden. Die anschauliche Deutung dieser Reihe durch Wellenzüge mit der Wellenform $f(\lambda)$ liegt auf der Hand: Die Lösung erscheint als Superposition solcher nach beiden Seiten über die unendliche Saite $-\infty < x < \infty$ hinstreichender Wellenzüge der Form $f(\lambda)$ bzw. $-f(\lambda)$.

Eine bemerkenswerte Erscheinung in unserer Lösung sei hervorgehoben: Nehmen wir an, die Anfangsfunktionen $f(t)$ entspreche einem Impulsstoß[1]: es sei $f(\lambda) = 1$ in einem kleinen Intervall $0 \leqq \lambda \leqq \varepsilon$, im

[1] Das Wort „Impuls" wird hier vielfach ganz allgemein gebraucht werden, um stoßartige Vorgänge, bzw. entsprechende Funktionen zu bezeichnen.

übrigen sei $f(\lambda) = 0$. Dann wird in dem Zeitintervall $l < t < l + \varepsilon$, z. B. am Endpunkt $x = l$ die Funktion u den Wert 2 haben (vgl. Abb. 7). In elektrotechnischen Anwendungen, wo u eine Potentialspannung darstellt, bedeutet dies, daß bei Vorgängen in Doppelleitungen mit unendlichem Widerstand am Ende die von außen dem System zugeführten Spannungen Verdoppelungen erfahren können.

Das Problem α) mit festgehaltenem Endpunkt läßt sich in ebenso einfacher Weise explizit lösen:

$$u(x, t) = f(t - x) + \sum [f(t - x - 2\nu l) - f(t + x - 2\nu l)]. \tag{9}$$

Auch hier liegt die anschauliche Deutung durch Übereinanderlagerung gleichgeformter Wellen auf der Hand. Im übrigen sei auf die nebenstehende graphische Veranschaulichung des Vorganges hingewiesen. Die Abbildung entspricht einer impulsartigen Anfangsfunktion $f(t)$, welche nur in einem Intervall $0 \leqq t \leqq \varepsilon$ den Wert 1 hat, sonst Null ist. Der in Betracht kommende Streifen in der x, t-Ebene ist in unserem Diagramm in Gebiete zerlegt, in denen die Funktion die Werte $+1$, -1 bzw. 0 besitzt.

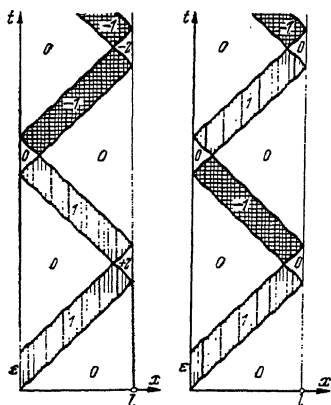



Abb. 7. Abb. 8.

2. Allgemeine Problemstellung. Indem wir nunmehr Ausgleichsprobleme vom allgemeineren Standpunkte angreifen, beschränken wir uns auf den Fall einer Raumdimension x und der Zeitkoordinate t mit dem Hinweis, daß ganz analog auch der Fall von mehr Raumdimensionen behandelt werden kann. Es wird sich um das folgende Differentialgleichungsproblem handeln.

Problem I: Gegeben ist die Differentialgleichung

$$a u_{tt} + b u_t = L[u] \tag{10}$$

mit

$$L[u] = p u_{xx} + q u_x + r u,$$

wobei a, b, p, q, r im Intervall

$$0 \leqq x \leqq l$$

gegebene stetige Funktionen von x allein sind, welche in diesem Intervall den Voraussetzungen genügen:

α) $p \geqq 0$

β) $a > 0$ im hyperbolischen Fall
$a \equiv 0$, $b > 0$ im parabolischen Fall.

Gesucht ist eine Lösung $u(x, t)$ der Differentialgleichung (10) im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ und für die Zeiten $t \geqq 0$, für welche dort die

Anfangsbedingungen

$$(11) \qquad \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{(im hyperbolischen Fall)} \end{cases}$$

und die

Randbedingungen

$$(12) \qquad \begin{aligned} u(0, t) &= f(t) \\ \varrho u_x(l, t) + \lambda u_t(l, t) &= \sigma u(l, t) \end{aligned}$$

gestellt sind, wobei $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und $f(t)$ vorgeschriebene Funktionen, ϱ, λ, σ vorgeschriebene Konstante sein sollen.

Wir werden uns vorzugsweise mit dem wichtigsten Fall beschäftigen, daß $\varphi = \psi = 0$ ist, daß also zur Zeit $t = 0$ der Ruhezustand herrscht[1] (Ausgleichsprobleme im eigentlichen Sinne).

3. Integral von Duhamel. Für den Fall, daß zur Zeit $t = 0$ Ruhe herrscht, d. h. daß $u(x, 0) = 0$, bzw. $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$ ist, läßt sich das allgemeine Problem I leicht auf ein spezielles Problem zurückführen.

Wir definieren zunächst eine Funktion $U_2(x, t)$ als die eindeutig bestimmte Lösung des Problems I mit der stetig differenzierbaren Randbedingung

$$f(t) = U_2(0, t) = \frac{t^2}{2} \quad \text{für} \quad t \geqq 0, \qquad = 0 \quad \text{für} \quad t < 0$$

und nehmen an, daß wir durch

$$U_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} U_2(x, t)$$

eine stetige Lösung zur noch stetigen Randbedingung

$$f(t) = U_1(0, t) = t \quad \text{für} \quad t \geqq 0, \quad = 0 \quad \text{für} \quad t < 0$$

erhalten und schließlich in

$$U(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} U_1(x, t)$$

eine Lösung des Problemes für die unstetige Randbedingung

$$f(t) = U(0, t) = 1 \quad \text{für} \quad t > 0, \quad = 0 \text{ für} \quad t < 0$$

mit folgender Eigenschaft: Jedes beschränkte Gebiet des Streifens $0 \leqq x \leqq l$; $t \geqq 0$ möge sich in endlich viele abgeschlossene Teilgebiete zerlegen lassen, in denen U nebst den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig ist.

[1] Wie in Kap. III, § 7 gezeigt, kann man den allgemeinen Fall formal stets hierauf zurückführen.

Es gilt dann der folgende *Satz von* DUHAMEL: *Ist $f(t)$ und die Ableitung $f'(t)$ stückweise stetig für $t > 0$, so wird allgemein (Duhamelsches Integral)*

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t U(x, t-\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{13}$$

die Lösung des Problems I mit der Randbedingung $u(0, t) = f(t)$. Hierbei wird, wie wir an Beispielen sehen werden, die Lösung $U(x, t)$ im allgemeinen nicht mehr überall stetig sein. In der Tat müssen wir Unstetigkeiten für U erwarten, da die Anfangsbedingung $U(0, t) = 1$ zusammen mit der Anfangsbedingung $U(x, 0) = 0$ bedeutet, daß im Punkte $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ ein Stoß erfolgt, unter dessen Einfluß der Wert $U(0,0) = 0$ in einer beliebig kurzen Zeit zu dem Wert 1 emporschnellt.

Diese Auffassung liefert uns sofort eine anschauliche Deutung des Duhamelschen Integrals (13). Wir denken die Wirkung der im linken Ende des Intervalls „angreifenden Kraft" $f(t)$ zustande gekommen aus einzelnen in den Zeitpunkten $\tau_0 = 0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ erfolgten Stößen, die jeweils einen Sprung des Wertes $u(0, \tau_{\nu-1})$ um den Wert $f(\tau_\nu) - f(\tau_{\nu-1})$ bewirken. Ist $U(x, t)$ die oben definierte spezielle Lösung, so setzt sich die Lösung $u(x, t)$ unter der Einwirkung jener Stöße additiv in der Form

$$u(x, t) = \sum_{\nu=0}^{n} U(x, t-\tau_\nu)\,(f(\tau_{\nu+1}) - f(\tau_\nu)) + U(x, t)\, f(0); \qquad (\tau_{n+1} = t)$$

zusammen. Setzen wir voraus, daß $f(t)$ für $t > 0$ stetig differenzierbar ist, daß jedoch $f(0)$ ungleich Null sein darf — was einem endlichen Sprung zur Zeit $t = 0$ entspricht — so entsteht offenbar, wenn man nachträglich den Grenzübergang zu verschwindend kleinen Zeitintervallen ausführt, das Integral

$$u(x, t) = U(x, t)\, f(0) + \int_0^t U(x, t-\tau) f'(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t U(x, t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

gemäß unserer obigen Behauptung (13).

Es ist leicht, diese heuristische Betrachtung durch einen Beweis bzw. eine Verifikation zu ersetzen. Wegen $U(x, 0) = 0$ ist

$$u_t = U_t(x, t) f(0) + \int_0^t U_t(x, t-\tau) f'(\tau)\, d\tau,$$

ferner im hyperbolischen Falle wegen $U_t(x, 0) = 0$

$$u_{tt} = U_{tt}(x, t) f(0) + \int_0^t U_{tt}(x, t-\tau) f'(\tau)\, d\tau,$$

endlich

$$L[u] = f(0)\, L[U] + \int^t L[U(x, t-\tau)] f'(\tau)\, d\tau.$$

Das Bestehen der Differentialgleichung (1) für U sowie die Randbedingung $\varrho U_x + \lambda U_t = \sigma U$ für $x = l$ und die Anfangsbedingungen (11) übertragen sich somit sofort auf $u(x, t)$. Schließlich folgt wegen $U(0, t) = 1$

$$u(0, t) = f(0) + \int_0^t f'(\tau)\, d\tau = f(t).$$

Somit auch die erste der Randbedingungen (12).

4. Methode der Superposition von Exponentiallösungen. Die für das Anfangswertproblem in Kap. III, § 6, 3 diskutierte Methode des Fourierschen Integrals, d. h. die Superposition von Lösungen, welche mit Hilfe von Exponentialfunktionen dargestellt werden, kann in sachgemäßer Abänderung auch zur Lösung von Ausgleichsproblemen herangezogen werden. Wir begnügen uns dabei wieder mit einer heuristischen Betrachtung, die wir in § 3 zu einem Existenzsatz vertiefen werden. Wir betrachten das spezielle Problem mit $u(0, t) = 1$; $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, suchen also die Funktion $U(x, t)$ der vorhergehenden Nummer. Zunächst verschaffen wir uns spezielle Lösungen der Differentialgleichung

$$a\, u_{tt} + b\, u_t = L[u] \tag{10}$$

in der Form

$$u = e^{\gamma t} v(x, \gamma). \qquad (\gamma = \alpha + i\beta)$$

Dieser Ansatz liefert für v die gewöhnliche Differentialgleichung

$$L[v] = (a\gamma^2 + b\gamma)\, v, \tag{15}$$

in welcher nunmehr γ als Parameter auftritt. Stellen wir am Endpunkt $x = l$ für v die Randbedingung

$$\varrho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)\, v, \tag{16}$$

so erfüllt offenbar

$$u = v(x, \gamma)\, e^{\gamma t}$$

dort die vorgegebene Randbedingung

$$\varrho u_x + \lambda u_t = \sigma u, \tag{12}$$

und daher gilt dasselbe auch für jede lineare Kombination von Lösungen dieser Art mit verschiedenen Parametern γ. Wir versuchen nun, durch eine solche Superposition zu erreichen, daß auch die Randbedingung $u(0, t) = 1$ für $t > 0$ erfüllt ist und weiterhin, daß zur Zeit $t = 0$ der Ruhezustand herrscht.

Hierzu setzen wir voraus, daß v und die betreffenden Ableitungen von v analytische Funktionen des *komplexen* Parameters $\gamma = \alpha + i\beta$ in der Halbebene $\alpha > 0$ sind; dann können wir durch Integration über einen Integrationsweg L in der rechten komplexen γ-Halbebene in der Form

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{\gamma t} \frac{v(x, \gamma)}{\gamma}\, d\gamma \tag{17}$$

neue Lösungen der Differentialgleichung (10) unter der Bedingung (12) erhalten. Für $x = 0$ wird dann gelten

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\gamma t}\frac{v(0,\gamma)}{\gamma}\,d\gamma\,,$$

und die Aufgabe ist, den Integrationsweg L und den verfügbaren Randwert $v(0, \gamma)$ so zu wählen, daß

$$u(0, t) = 1\,, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0\,, \quad t < 0$$

gilt.

Die Randbedingung für $x = 0$ ist erfüllt, wenn

$$v(0, \gamma) = 1 \tag{16'}$$

gesetzt wird und wenn L eine beliebige Parallele zur imaginären Achse der γ-Ebene ist, welche in der rechten Halbebene $\alpha > 0$ verläuft. In der Tat, das entstehende Integral

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\alpha+i\infty}\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\,d\gamma = \frac{e^{\alpha t}}{2\pi}\int\frac{e^{i\beta t}}{\alpha+i\beta}\,d\beta \tag{18}$$

konvergiert nach elementaren Sätzen für alle $\alpha \neq 0$, $t \neq 0$. Da das Integral $\int\limits_{l_1+i\beta}^{l_2+i\beta}\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\,d\gamma$, erstreckt über irgendein zur reellen α-Achse paralleles Geradenstück mit endlicher Länge $l_2 - l_1$, bei wachsendem $|\beta|$ gegen Null konvergiert, so erkennen wir aus dem Cauchyschen Integralsatz (vgl. nebenstehende Abbildung) in üblicher Weise, daß das Integral (18) von α nicht abhängt. Daraus ergibt sich sofort für $t < 0$, indem wir α über alle Grenzen streben lassen, das Bestehen der Gleichung $u(0, t) = 0$. Im Falle $t > 0$ ist nach CAUCHYS Integralsatz unter Berücksichtigung des Residuums für $\gamma = 0$

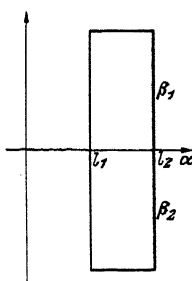



Abb. 9.

$$u(0, t) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int^{\alpha+i\infty}\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\,d\gamma\,,$$

wobei α beliebig negativ sein kann. Es folgt daher durch Grenzübergang $\alpha \to -\infty$ für $t > 0$ tatsächlich das Bestehen der Gleichung $u(0, t) = 1$.

Es ist daher plausibel, daß mit dem beschriebenen Integrationsweg L der Ausdruck

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{v(x,\gamma)}{\gamma}e^{\gamma t}\,d\gamma \tag{18}$$

die gesuchte Lösung der Gleichung (10) ist. Allerdings kann man im allgemeinen nicht erwarten, daß dieses Integral absolut konvergiert; denn bei gegebenem x wird im allgemeinen $U(x, t)$ in t Unstetigkeiten besitzen.

Betrachten wir jedoch mit hinreichend großem n zur entsprechend oft differenzierbaren Anfangsfunktion $f(t) = \frac{t^n}{n!}$ für $t > 0$ und $f(t) = 0$ für $t < 0$ den Ausdruck

$$U_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{n!} \int_L \frac{v(x, \gamma)}{\gamma^{n+1}} e^{\gamma t} d\gamma,$$

so wird dieser um so besser konvergieren, je größer n ist; und dementsprechend wird es leichter sein, ihn als Lösung des Ausgleichsproblemes I zu verifizieren, und sodann U durch Differentiation nach t zu gewinnen. Wir werden diese vorläufigen heuristischen Überlegungen in § 3 unter etwas verändertem Gesichtspunkt wieder aufnehmen und durchführen.

§ 2. Die Heavisidesche Operatorenmethode.

Gegenüber dem in § 1, 4 dargelegten Verfahren hat vom Standpunkte des Praktikers aus die *symbolische Methode von* HEAVISIDE große Vorteile. Ihre strenge Rechtfertigung findet sie durch Verbindung mit den in § 1 und später § 3 gegebenen Grundlagen. In der Tat kann sie als eine etwas andere Anordnung ähnlicher Überlegungen aufgefaßt werden, wobei der kalkülmäßige Anteil an der Lösung des Problems von dem mathematisch-inhaltlichen Anteil in zweckmäßiger Weise so getrennt wird, daß dieser zweite Anteil erst bei dem letzten Schritt, der Realisierung des symbolisch gewonnenen Resultates, zur Geltung kommt und daß dieser Anteil gewissermaßen ein für alle Mal auf Vorrat in Form von Tabellen inhaltlich realisierter symbolischer Operatoren bereitgestellt werden kann, was für den Praktiker im Einzelfall die mathematisch-inhaltliche Betrachtungsweise erspart.

Die Grundidee des Kalküls ist, nicht direkt nach der Lösung $u(x, t)$ des Differentialgleichungsproblems aus § 1, 3 zu fragen, sondern vielmehr den linearen Funktionalprozeß, welcher der dort vorgegebenen Randfunktion $f(t)$ die Lösung u zuordnet, selbst zum Gegenstand des Kalküls zu machen. Wir beschränken uns wieder auf die eigentlichen Ausgleichsprobleme, bei welchen zu Beginn $t = 0$ der Ruhezustand herrscht.

1. Die einfachsten Operatoren. Die Grundlage des Verfahrens bildet die Einführung des *Differentiations-* und *Integrationsoperators*, p und p^{-1}, als reziproke Operationen. Wir betrachten Funktionen der Zeitvariablen t für $t > 0$ und definieren den Integrationsoperator p^{-1} durch

(1) $$p^{-1} f(t) = g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Wenn wir den Differentiationsoperator mit p bezeichnen

(2) $$p\,g(t) = f(t) = \frac{dg}{dt},$$

so ist es für den Aufbau eines Kalküls mit Regeln entsprechend zur Algebra von einschneidender Wichtigkeit, *daß p und p^{-1} invers zueinander werden oder symbolisch, daß*

(3) $$p\,p^{-1} = p^{-1}\,p = 1$$

wird. Um diese Relation zu sichern, müssen wir die folgende Einschränkung machen: *Der Operator p darf nur auf solche Funktionen $g(t)$ angewandt werden, für welche $g(0) = 0$ ist.*

Andernfalls wäre nämlich

$$p^{-1}\,p\,g = \int_0^t \frac{dg(\tau)}{d\tau}\,d\tau = g(t) - g(0)$$

$$p\,p^{-1}\,g = \frac{d}{dt}\int_0^t g(\tau)\,d\tau = g(t),$$

also

$$p^{-1}\,p\,g \neq p\,p^{-1}\,g.$$

Im Gegensatz zum Operator p ist jedoch der Operator p^{-1} auf beliebige stetige Funktionen anwendbar.

Nunmehr können wir, wenn

$$Q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m$$

irgendein Polynom vom Grade m ist, in unmittelbar ersichtlicher Weise den Operator $Q(p^{-1})$ definieren, welcher auf eine beliebige Funktion f anwendbar ist *(ganzer rationaler Operator).* Auch der entsprechende Operator $Q(p)$ ist definiert als linearer Differentialoperator m^{ter} Ordnung allerdings nur unter der Voraussetzung, daß die Funktion f, auf die er angewandt wird, für $t = 0$ mit ihren Ableitungen bis zur $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung verschwindet.

Ist

$$P(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_n\lambda^n$$

ein anderes Polynom vom Grade n und $Q(0) = a_0 \neq 0$, so bezeichnet man

(4) $$R(p^{-1}) = \frac{P(p^{-1})}{Q(p^{-1})}$$

als einen *gebrochen rationalen regulären Operator.* Dabei kann der Ausdruck

$$R(p^{-1})\,f(t) = g(t)$$

auf verschiedene Arten definiert werden.

Einmal kann man g bei gegebenem für $t > 0$ stückweise stetigem f kennzeichnen als die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Differentialgleichungsproblems

(5) $$a_0\,g^{(m)} + a_1\,g^{(m-1)} + \cdots + a_m\,g = \varphi^{(m)},$$

— wobei

$$\varphi = P(p^{-1})\, f$$

eine bekannte Funktion ist —, mit den Anfangsbeaingungen

$$
\begin{aligned}
a_0\, g(0) &= \varphi(0)\\
a_0\, g'(0) + a_1\, g(0) &= \varphi'(0)\\
a_0\, g''(0) + a_1\, g'(0) + a_2\, g(0) &= \varphi''(0)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$a_0\, g^{(m-1)}(0) + a_1\, g^{(m-2)}(0) + \cdots + a_{m-1}\, g(0) = \varphi^{(m-1)}(0).$$

Zweitens kann man g definieren, indem man die rationale Funktion $\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = R(\lambda)$ in der Umgebung des Nullpunktes in eine Potenzreihe nach λ entwickelt:

$$R(\lambda) = \sum \alpha_\nu \lambda^\nu.$$

Es ist dann leicht zu erkennen, daß die entsprechende Reihe

$$R(p^{-1})\, f = \sum \alpha_\nu\, p^{-\nu} f(t)$$

für alle positiven Werte von t konvergiert und mit dem oben definierten Ausdruck für $g(t)$ übereinstimmt.

Ist der Koeffizient $a_0 = 0$, so heißt der rationale Operator *irregulär*, er läßt sich dann sicherlich in der Form

$$p^k R(p^{-1})$$

darstellen, wo R regulär ist. Für die Anwendbarkeit eines solchen Operators auf die Funktion f sind die Bedingungen $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$ zu stellen.

Es ist leicht zu sehen, daß man mit diesen rationalen Operatoren nach den rationalen Regeln der Algebra rechnen darf.

Der in § 1 ausgeführte Kunstgriff von DUHAMEL besagt für unsere Operatoren Folgendes: *Ersetzt man die zunächst beliebige Funktion $f(t)$ durch die „Einheitsfunktion" $\eta(t)$ welche definiert ist durch*

$$
\begin{aligned}
\eta(t) &= 1 \quad \text{für} \quad t \geqq 0\\
\eta(t) &= 0 \quad \text{für} \quad t < 0,
\end{aligned}
$$

und gilt für einen Operator T die Beziehung

$$T\eta(t) = H(t), \tag{6}$$

dann wird

$$T f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t H(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau. \tag{7}$$

Ein wesentliches Kennzeichen der Operatorenrechnung ist: Man versucht auch anderen als bisher betrachteten rationalen Funktionen von p oder $\frac{1}{p}$ einen solchen Sinn beizulegen, daß in dem erweiterten

Operatorenbereich die algebraischen Rechenregeln, das Duhamelsche Prinzip und sonstige später zu betrachtende Regeln gelten[1].

2. Beispiele. 1. Für den Operator

$$T = \frac{1}{1 + \alpha p^{-1}}$$

ist

$$T\eta = e^{-\alpha t}, \qquad T f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = g(t).$$

In der Tat löst g die Differentialgleichung

$$g' + \alpha g = f' \qquad \text{mit} \qquad g(0) = f(0).$$

2. Für den Operator

$$T = \frac{1}{1 + \nu^2 p^{-2}}$$

wird

$$T\eta = \cos\nu t, \qquad T f = g(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau) \cos\nu(t-\tau)\, d\tau.$$

In der Tat löst g die Differentialgleichung

$$g'' + \nu^2 g = f''$$

mit den Anfangsbedingungen

$$g(0) = f(0), \qquad g'(0) = f'(0).$$

3. Wir betrachten die unhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$a_0 u^{(m)} + a_1 u^{(m-1)} + \cdots + a_m u = f(t) \tag{8}$$

und mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0. \tag{8'}$$

Unter diesen Anfangsbedingungen können wir die Differentialgleichung symbolisch in der Form schreiben

$$Q(p)\, u = f(t); \qquad Q(\lambda) = a_0 \lambda^m + \cdots + a_m$$

und erhalten die Lösung symbolisch in der Form

$$u(t) = \frac{1}{Q(p)} f(t). \tag{9}$$

Nehmen wir an, daß die algebraische Gleichung

$$Q(\lambda) = 0,$$

die n verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \neq 0$ besitzt, so können wir mit Hilfe von Partialbruchzerlegung in sehr eleganter Weise die symbolisch

[1] Beiläufig sei bemerkt, daß in der Literatur häufig die Einheitsfunktion $\eta(t)$ nicht ausgeschrieben wird, und daß man in einem solchen Zusammenhang unter dem Operatorensymbol T einfach die Funktion $T\eta$ zu verstehen hat.

hingeschriebene Lösung realisieren. Wir gehen aus von der Formel

$$\frac{1}{p\,Q(p)} = \frac{c_0}{p} + \sum_1^m \frac{c_\nu}{p-\alpha_\nu}.$$

Dann wird

$$u(t) = \frac{1}{Q(p)} f(t) = c_0 f(t) + \sum_1^m c_\nu \frac{p}{p-\alpha_\nu} f(t).$$

In dem besonderen Falle, daß

$$f(t) = e^{i\omega t}\,\eta(t) \qquad (i\omega \neq \alpha_\nu)$$

ist, kann man, statt zur Realisierung das Duhamelsche Integral gemäß Beispiel 1 zu verwenden, eleganter in folgender Weise vorgehen.

Wir schreiben gemäß Beispiel 1

$$f(t) = \frac{p}{p-i\omega}\,\eta$$

und erhalten nunmehr

$$u = \frac{p}{L(p)}\,\eta,$$

wo zur Abkürzung

$$L(p) = (p-i\omega)\,Q = a_0(p-\alpha_1)\cdots(p-\alpha_m)\,(p-i\omega)$$

gesetzt ist.

Diesen rationalen Operator können wir nun auf Grund der bekannten Partialbruchzerlegung in die Gestalt setzen

$$\frac{p}{L(p)} = \frac{d_0 p}{p-i\omega} + \sum \frac{d_\nu p}{p-\alpha_\nu},$$

wobei die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung durch

$$d_0 = \frac{1}{Q(i\omega)}, \qquad d_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu - i\omega}\,\frac{1}{Q'(\alpha_\nu)}$$

gegeben sind. Wir erhalten nunmehr unter Berücksichtigung unseres ersten Beispiel sofort die gewünschte Lösung

$$u = d_0\,e^{i\omega t} + \sum^m d_\nu\,e^{\alpha_\nu t}. \tag{10}$$

Für die Anwendungen ist am wichtigsten naturgemäß der Koeffizient d_0.

4. Als weiteres Beispiel betrachten wir die „singulären Operatoren"

$$\sqrt{p}, \qquad \frac{1}{\sqrt{p}}, \tag{11}$$

die wir, um zu einer sinngemäßen Erweiterung des Operatorenbereiches zu gelangen, im Einklang mit unseren früheren Regeln definieren müssen. Es liegt nahe, unter Berücksichtigung der Theorie der Differentiation

und Integration mit gebrochenem Index diese Operatoren folgendermaßen zu definieren

$$(12)\qquad \begin{aligned} p^{-\frac{1}{2}}\eta &= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}; & p^{-\frac{1}{2}}f(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{t-\tau}\,f(\tau)\,d\tau \\ p^{\frac{1}{2}}\eta &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, & p^{\frac{1}{2}}f(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau. \end{aligned}$$

In der Tat steht diese Definition, wie man leicht bestätigen wird, im Einklang mit der Forderung

$$p^{-\frac{1}{2}}\,p^{-\frac{1}{2}}\,\eta = p^{-1}\eta\,.$$

Zu derselben Definition gelangt man, wenn man von der folgenden Betrachtung ausgeht: Es ist $p^{-n}\eta = c\,t^n$, wo $c = \frac{1}{n!}$ eine Konstante ist. Daher ist es plausibel, den Ansatz zu machen

$$p^{-\frac{1}{2}}\eta = c\sqrt{t}\,,$$

wo nunmehr die Konstante c passend bestimmt werden muß. Fordert man hierzu die Gültigkeit des Duhamelschen Prinzips und das Bestehen der Relation $p^{-\frac{1}{2}}p^{-\frac{1}{2}}\eta = p^{-1}\eta = t$, so ergibt sich sofort zwangsläufig

$$t = c^2\frac{d}{dt}\int_0^t \sqrt{t-\tau}\,\sqrt{\tau}\,d\tau = 2c^2 t\int_0^1 \sqrt{1-\tau}\,\sqrt{\tau}\,d\tau = c^2\frac{\pi}{4}; \quad \text{also} \quad c = \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

womit die Konstante c im Einklang mit der obigen Definition festgelegt wird.

5. Ein sehr wichtiger nicht mehr rationaler Operator, der *Exponentialoperator*, wird für konstantes h eingeführt durch die Definition

$$(13)\qquad e^{-hp}f(t) = f(t-h).$$

Diese Definition wird nahegelegt durch die Taylorsche Reihenentwicklung für $f(t-h)$. Jedoch kann diese Plausibilitätsbetrachtung in keiner Weise als Begründung dienen, da die Definition nicht an den analytischen Charakter der Funktion $f(t)$ gebunden sein darf, zumal wir oft Funktionen $f(t)$ zu betrachten haben, die für negative Werte von t verschwinden.

Die Einführung unserer Definition rechtfertigt sich vielmehr dadurch, daß mit ihr unmittelbar die Beziehungen

$$e^{-hp}\,e^{-kp}f(t) = e^{-(k+h)p}f(t)$$

und

$$\frac{d}{dh}e^{-hp}f(t) = -p\,e^{-hp}f(t)$$

gelten, deren letzte mit der Gleichung

$$\frac{d}{dh} f(t-h) = -\frac{d}{dt} f(t-h)$$

äquivalent ist.

6. Endlich betrachten wir für $h < 0$ den Operator

$$e^{-h\sqrt{p}}. \tag{14}$$

Seine Realisierung werden wir erst in Nr. 5 vornehmen. Jedoch machen wir schon hier die folgende für die Direktheit der Operatorenmethoden typische Bemerkung. Unter der Annahme, daß wir unseren Operator nach dem Parameter h differenzieren dürfen, erhalten wir aus $e^{-h\sqrt{p}} f = g$

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -\sqrt{p}\, e^{-h\sqrt{p}} f.$$

Wenn uns nun der Wert unserer Funktion $\frac{\partial g}{\partial h}$ nur für den Parameterwert $h = 0$ interessiert, so können wir erwarten, daß dieser Wert durch

$$\frac{\partial g}{\partial h}\bigg|_{h=0} = -\sqrt{p}\, f = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \tag{15}$$

gegeben ist.

Als letztes Beispiel in diesem Zusammenhange behandeln wir das sog. *Verschiebungsprinzip von* HEAVISIDE:

Ist $T = \Phi(p)$ ein Operator, k eine Konstante, so ist der Operator $\Phi(p+k)$ gegeben durch

$$\Phi(p+k) = e^{-kt}\, \Phi(p)\, e^{kt}. \tag{16}$$

Der Beweis kann für alle rationalen regulären Operatoren ohne weiteres folgendermaßen geführt werden: Man zeigt zunächst leicht durch Schluß von n auf $n+1$ daß das Verschiebungsprinzip für den Operator $\frac{1}{p^n}$ gültig ist. Sodann folgt es für alle rationalen regulären Operatoren, da man diese durch Reihen nach $\frac{1}{p}$ ausdrücken kann. Für irreguläre Operatoren wird sodann das Verschiebungsprinzip als plausibles Prinzip eingeführt. Z. B. wird man nunmehr definieren

$$\sqrt{p+\alpha^2}\, f(t) = e^{-\alpha^2 t} \sqrt{p}\, e^{\alpha^2 t} f(t) = \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{\alpha^2 \tau} f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \tag{17}$$

und speziell

$$\sqrt{p^2+\alpha^2}\, \eta(t) = \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int \frac{e^{\alpha^2 \tau}}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = \frac{2 e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left(e^{\alpha^2 t} \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-\tau^2}\, d\tau \right) \tag{18}$$

Bei allen diesen durch Plausibilitätsbetrachtungen neu definierten irregulären Operatoren steht eine befriedigende Rechtfertigung noch aus,

d. h. ein Beweis der Tatsache, daß ihre Einführung im Einklang mit den elementaren Rechenregeln steht. Wir werden diese Rechtfertigung nachträglich in Nr. 5 geben.

3. Anwendungen auf Wärmeleitung. Wir erläutern die Anwendung der Operatorenmethode auf Ausgleichsprobleme an einigen typischen Beispielen.

1. Die *Wärmeleitungsgleichung für ein einseitig unendliches Intervall*

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{19}$$

Anfangs- und Randbedingungen seien:

$$u(x, 0) = 0; \qquad u(0, t) = f(t), \qquad u(\infty, t) = 0.$$

Der Operator $T = T(x)$, welcher von x als Parameter abhängt, möge die gegebene Funktion $f(t)$ in die gesuchte Lösung $u(x, t)$ transformieren. Um T zu finden, schreiben wir die Differentialgleichung in der Form

$$(T_{xx} - p\,T)\,f = 0 \tag{20}$$

und die Randbedingungen, indem wir zunächst die Funktion $f(t) = \eta(t)$ als Einheitsfunktion wählen, in der Form

$$T(0) = 1, \qquad T(\infty) = 0.$$

Die Anfangsbedingung ist schon in unserem Ansatz berücksichtigt, indem wir $u_t = p\,T f$ geschrieben haben. Behandeln wir die Differentialgleichung

$$T_{xx} - p\,T = 0$$

so als ob p darin ein Parameter wäre, so ergibt sich sofort als Lösung

$$T = e^{-x\sqrt{p}}. \tag{21}$$

Es entsteht die Frage, wie dieser symbolische Ausdruck zu realisieren ist oder welche Funktionen die Ausdrücke

$$e^{-x\sqrt{p}}\,\eta; \qquad e^{-x\sqrt{p}}\,f(t)$$

darstellen. Ohne daß wir im Moment schon imstande sind, diese Fragen sachgemäß zu beantworten, können wir doch ohne weiteres die Antwort auf ein Teilproblem geben, welches unter Umständen das für die Praxis allein interessierende sein mag. Wir können nämlich die am Anfangspunkt wegströmenden Wärme, d. h. den Ausdruck $u_x(0, t)$ explizit finden, indem wir mit dem Operator T nach den gewöhnlichen Rechenregeln verfahren. Dabei erhalten wir nämlich unter Berücksichtigung unseres obigen Resultats aus Nr. 2 Beispiel 6

$$u_x(0, t) = T_x(0)\,f = -\sqrt{p}\,f = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau.$$

Gerade in der Möglichkeit, solche Teilresultate zu gewinnen, ohne zur vollständigen Realisierung der Operatoren mit einfach ausdrückbaren Funktionen imstande zu sein, liegt ein Hauptvorteil des symbolischen Kalküls.

2. Allgemeine Wärmeleitungsgleichung. In ähnlicher Weise kann man auch die allgemeinere Wärmeleitungsgleichung $u_t - u_{xx} + \alpha^2 u = 0$ für das Intervall $0 \leqq x < \infty$ und dieselben Anfangs- und Randbedingungen wie vorher behandeln. Für den Operator $T(x)$, mit dessen Hilfe man die Lösung $u(x, t) = T(x) f(t)$ erhält, gewinnen wir das folgende symbolische Differentialgleichungsproblem

$$T_{xx} = (p + \alpha^2) T \tag{22}$$

mit den Randbedingungen

$$T(0) = 1, \qquad T(\infty) = 0.$$

Die formale Lösung lautet

$$T = e^{-x\sqrt{p+\alpha^2}}. \tag{23}$$

Diesen Operator können wir zunächst noch weniger als den im vorigen Beispiel allgemein realisieren. Jedoch ergibt sich als Antwort für das an sich schon wichtige Teilproblem der Auffindung von $u_x(0, t)$ sofort die folgende Relation

$$u_x(0, t) = T_x(0) f = -\sqrt{p + \alpha^2}\, f = \frac{e^{-\alpha^2 t}}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{\alpha^2 \tau} f(\tau)}{\sqrt{t - \tau}}\, d\tau,$$

wobei der Ausdruck rechts aus Nr. 2 entnommen ist.

Im speziellen Fall der Einheitsfunktion $f = \eta$ wird

$$u_x(0, t) = \frac{2e^{-\alpha^2 t}}{\alpha\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left(e^{\alpha^2 t} \int_0^{\alpha\sqrt{t}} e^{-\tau^2}\, d\tau \right). \tag{24}$$

4. **Wellengleichung.** Vom Standpunkte des Operatorenkalküls finden auch die in § 1, 1 behandelten einfachen Ausgleichsprobleme eine neue Beleuchtung. Betrachten wir z. B. für das Intervall $0 \leqq x \leqq l$ das Problem der Differentialgleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{25}$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = f(t); \quad u_x(l, t) = 0$$

und setzen

$$u(x, t) = T(x) f,$$

so erhalten wir für den Operator T die Differentialgleichung

$$T_{xx} - p^2 T = 0 \tag{26}$$

mit den Bedingungen

$$T(0) = 1; \qquad T_x(l) = 0.$$

Es ergibt sich symbolisch

$$T(x) = \frac{\mathfrak{Cof}\, p\,(l - x)}{\mathfrak{Cof}\, p\, l} = \frac{e^{-px} + e^{-p(2l-x)}}{+ e^{-2pl}} \tag{27}$$

oder, indem wir entwickeln

$$T(x) = e^{-px} + \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left[e^{-p(x+2\nu l)} - e^{-p(2\nu l - x)}\right].$$

Die Realisierung des Operators ist nun auf Grund der früheren Beispiele aus Nr. 1 einfach. Es ergibt sich

$$u(x, t) = f(t-x) + \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left[f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)\right] \tag{28}$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat aus § 1, 1.

In ähnlicher Weise kann natürlich auch das andere dort behandelte Problem gelöst werden, bei dem sich für den entsprechenden Operator ergibt

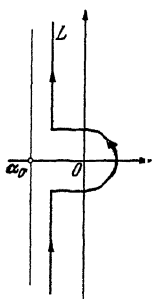
Abb. 10.

$$T(x) = \frac{\mathfrak{Sin}\, p(l-x)}{\mathfrak{Sin}\, pl} \tag{29}$$

oder

$$T = e^{-px} + \sum_{1}^{\infty} \left[e^{-p(x+2\nu l)} - e^{-p(2\nu l - x)}\right],$$

d. h.

$$u(x,t) = f(t-x) + \sum_{1}^{\infty} \left[f(t-x-2\nu l) - f(t+x-2\nu l)\right]. \tag{30}$$

5. Methode zur Rechtfertigung des Operatorenkalküls. Realisierung weiterer Operatoren. Der Operatorenkalkül kann streng gerechtfertigt werden, indem man allgemein für unsere Operatoren eine Realisierung durch eine explizite Definition gibt und feststellt, daß auf Grund dieser Definition die aufgestellten Rechenregeln, der Verschiebungssatz und das Duhamelsche Prinzip gelten, und daß diese Definition mit den vorher gegebenen Definitionen im Einklang steht. Durch die Überlegungen von § 1, Nr. 4 wird die folgende Definition motiviert:

Sei $F(\gamma)$ eine reguläre analytische Funktion der Variablen $\gamma = \alpha + i\beta$ in der Halbebene $\alpha > \alpha_0$. Es sei L eine beliebige Parallele zur imaginären Achse, die in der Halbebene $\alpha > \alpha_0$ verläuft, bzw., falls $\alpha_0 < 0$, ein „Hakenweg" von der in Abb. 10 gekennzeichneten Gestalt. Existiert dann unabhängig von der speziellen Wahl von L das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma$ für alle $t > 0$, so definieren wir

$$F(p)\,\eta = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma$$

(31) *und*

$$F(p)\,f = \frac{d}{dt}\int\limits_0 f(\tau)\, d\tau \, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma(t-\tau)}\, d\gamma.$$

Eine hinreichende Voraussetzung für die Existenz der Integrale (31) ist z. B.: Es existiere eine positive Funktion $\Phi(\varrho)$, für die $\int^{\infty} \Phi(\varrho)\, d\varrho$

konvergiert, derart, daß für alle $\gamma = \alpha + i\beta$ mit $\alpha \geqq \alpha_0 + \delta$, $\delta > 0$ die Ungleichung

$$\left|\frac{F(\gamma)}{\gamma}\right| \leqq \Phi(|\beta|)$$

erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung können wir alsdann in dem zweiten Integral (31) die Integration nach τ unter dem Integralzeichen ausführen; setzen wir dementsprechend

$$D(\gamma, t) = \int_0^t f(\tau)\, e^{-\gamma\tau}\, d\tau,$$

so wird

$$F(p)\, f = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dt} \int \frac{F(\gamma)}{\gamma} D(\gamma, t)\, e^{\gamma t}\, d\gamma.$$

Die Gültigkeit der Rechenregeln für die so definierten Operatoren wird durch den *Multiplikationssatz* gesichert

$$F(p)\, G(p) = F\, G(p), \tag{32}$$

d. h. *das Resultat der sukzessiven Anwendung zweier Operatoren F und G kann auch erhalten werden, indem man den der Produktfunktion entsprechenden Operator anwendet.*

Es genügt, diesen Satz für die Einheitsfunktion $\eta(t)$ zu beweisen; dies kann verhältnismäßig einfach geschehen unter den weiteren Voraussetzungen über die Funktionen F und G[1]: Es existiere in jeder Halbebene $\alpha \geqq \alpha_0 + \delta$ eine positive Funktion $\psi(\varrho)$ mit konvergentem Integral $\int_0^\infty |\psi|^2\, d\varrho$ derart, daß in dieser Halbebene überall

$$|F| \leqq \psi(|\beta|), \qquad |G| \leqq \psi(|\beta|)$$

gilt. Dann existieren auch die Integrale

$$\int^\infty \frac{\psi}{\varrho}\, d\varrho \qquad \text{und} \qquad \int^\infty \frac{\psi^2}{\varrho}\, d\varrho$$

— das erstere wegen der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_1^\infty \frac{\psi}{\varrho}\, d\varrho \leqq \sqrt{\int_1^\infty \psi^2\, d\varrho}\, \sqrt{\int_1^\infty \frac{d\varrho}{\varrho^2}}\ -,$$

und die den Funktionen F, G, FG entsprechenden Integrale (31) sind absolut konvergent. Setzen wir nun

$$f(t) = G(p)\, \eta = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G(\delta)}{\delta}\, e^{\delta t}\, d\delta$$

[1] Der Beweis mit diesen Voraussetzungen genügt noch keineswegs für die Rechtfertigung des Kalküls in dem notwendigen Umfange. Vgl. jedoch z. B. von Koppenfels: Math. Ann. Bd. 105 S. 694ff., wo dieser Satz unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen bewiesen wird.

und

$$D(\gamma, t) = \int^{t} f(\tau)\, e^{-\gamma\tau}\, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G(\delta)}{\delta}\; e^{(\delta-\gamma)t} - 1 \; d\delta,$$

so wird

$$F\,G\eta = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{d}{dt} \int \frac{F(\gamma)}{\gamma}\, D(\gamma, t)\, e^{\gamma t}\, d\gamma.$$

Man erkennt auf Grund unsere Voraussetzungen leicht, daß Differentiation unter dem Integralzeichen stets Integrale liefert, die in einem Gebiet $t_1 \leqq t \leqq t_2$ mit $t_1 > 0$ gleichmäßig konvergieren; es ist daher

$$F\,G\eta = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{L} \frac{F(\gamma)}{\gamma}\, d\gamma \int\limits_{L'} \frac{G(\delta)}{\delta}\; \frac{\delta e^{\delta t} - \gamma e^{\gamma t}}{\delta - \gamma}\, d\delta.$$

Hierbei sei für L' eine rechts von L verlaufende Gerade gewählt. Der zweite Bestandteil des inneren Integrales wird, wie wir aus der Abschätzung

$$\int \frac{G(\delta)}{\delta(\delta-\gamma)}\, d\delta \Big| \leqq \frac{1}{\alpha' - \alpha} \int \frac{G(\delta)}{\delta}\, d\beta'$$

erkennen, mit wachsendem α' beliebig klein und ist somit überhaupt Null. Es folgt also

$-T$

Abb. 11.

$$F\,G\eta = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\gamma)}{\gamma}\, d\gamma\, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G(\delta)}{\delta - \gamma}\, e^{\delta t}\, d\delta.$$

In diesem Doppelintegral können wir infolge unserer Voraussetzungen die Integrationsfolge vertauschen[1] und erhalten

$$F\,G\eta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L'} G(\delta)\, e^{\delta t}\, d\delta\, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma.$$

Es braucht also nur die Relation

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma = \frac{F(\delta)}{\delta}$$

[1] Es sei L_1 ein endliches Intervall der Geraden L zwischen den Ordinaten $-T$ und $+T$; dann ist

$$F\,G\eta = \lim_{L_1 \to L} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{L'} G(\delta)\, e^{\delta t}\, d\delta \int\limits_{L_1} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma$$

Die Behauptung folgt sodann aus der Abschätzung

$$\int\limits_{L-L_1} \frac{F(\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}\, d\gamma \Big| \leqq \frac{1}{|\delta|} \sqrt{2 \int\limits_{T}^{\infty} \psi^2\, d\varrho}\; \sqrt{2 \int\limits_{L} \left(\frac{1}{|\gamma|^2} + \frac{1}{|\gamma-\delta|^2}\right) d\beta}$$

und aus der Konvergenz des Integrals $\int\limits_{0} \psi^2\, d\varrho$

bewiesen zu werden. Diese aber ist eine Folge des Cauchyschen Integralsatzes.

Die Rechtfertigung des *Verschiebungssatzes* ergibt sich ebenfalls unmittelbar aus der komplexen Integraldarstellung. Ist $F(p)$ ein gegebener Operator, also

$$F(p)\,\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t}\, d\gamma,$$

so ist

$$F(p+k)\,\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\gamma+k)\, e^{\gamma t}}{\gamma}\, d\gamma = \frac{e^{-kt}}{2\pi i}\int_L \frac{F(\gamma)\,\gamma}{\gamma-k}\,\frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\, d\gamma$$

und dieser Ausdruck bedeutet

$$F(p+k)\,\eta = e^{-kt} F(p)\,\frac{p}{p-k}\,\eta.$$

Wegen $\frac{p}{p-k}\eta = e^{kt}\eta$ folgt somit

$$F(p+k)\,\eta = e^{-kt} F(p)\, e^{kt}\,\eta.$$

Ebenso ist es leicht, bei den früher behandelten Beispielen die Übereinstimmung der Definitionen mit der jetzigen Integraldefinition festzustellen. Es ist zum Beispiel[1]:

1. $$\frac{1}{p^n} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^{n+1}}\, d\gamma. \qquad (n \geqq 1,\ \text{ganz})$$

Der Integrationsweg L kann in eine beliebige, den Nullpunkt umschließende Kurve deformiert werden: daher ist

$$\frac{1}{p^n} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n} e^{\gamma t}\right]_{t=0} = \frac{t^n}{n!}.$$

2. $$\frac{\quad}{p+\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma+\alpha}\, d\gamma = e^{-\alpha t}.$$

3. $$\frac{\quad}{(p+\alpha)'} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\gamma t}}{(\alpha+\gamma)^{n+1}}\, d\gamma = e^{-\alpha t}\,\frac{t^n}{n!}.$$

4. $$\sqrt{p} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma}}\, d\gamma = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\, d\gamma.$$

Ersetzen wir die Integrationsvariable γ durch $\varkappa = \sqrt{\gamma}$, so folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\, d\gamma = \frac{1}{\pi i}\int e^{\varkappa^2}\, d\varkappa.$$

[1] In den nachfolgenden Beispielen ist der Kürze halber $F(p)$ für den Ausdruck $F(p)\eta$ geschrieben.

Der Integrationsweg L' in der $\varkappa$ Ebene ist (vgl. § 3, 3) der rechte Zweig einer beliebigen gleichseitigen Hyperbel und ist äquivalent zu der imaginären Achse. Also wird

$$\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta = \frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

5.
$$p^s = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma = t^{-s}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma.$$

Für den Wert des Integrals ergibt sich ähnlich wie in 4.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma}}{\gamma^{1-s}}\,d\gamma = \frac{1}{\Gamma(1-s)}$$

und damit

$$p^s = \frac{t^{-}}{\Gamma(1-s)}; \qquad (s < 1)$$

6.
$$e^{-kp} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{(t-k)\gamma}}{\gamma}\,d\gamma = \begin{cases} 0, & t < k \\ 1, & t > k \end{cases}$$

7.
$$\frac{p}{p^2 + a^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^2 + a^2}\,d\gamma.$$

Deformieren wir L zu einer die Punkte $\pm ia$ umschließenden Kurve, so wird

$$\frac{p}{p^2 + a^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint e^{\gamma t}\,\frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{\gamma - ia} - \frac{1}{\gamma + ia}\right)d\gamma = \frac{\sin at}{a}.$$

8. Als Beispiel für die Realisierung weiterer Operatoren betrachten wir

$$\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{-x\sqrt{\gamma} + t\gamma}}{\sqrt{\gamma}}\,d\gamma. \tag{33}$$

Mit Hilfe komplexer Integration läßt sich das Integral rechts leicht auswerten und es ergibt sich

$$\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{34}$$

Hieraus erhalten wir die Realisierung des schon früher gesuchten Operators $e^{-x\sqrt{p}}$ folgendermaßen

$$e^{-x\sqrt{p}} = \sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}} = \sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{p}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{t},$$

also

$$e^{-x\sqrt{p}} = \frac{d}{dt}\int^{t} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\pi\tau}}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{t-\tau}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int^{t} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\,d\tau.$$

9. Als andere Anwendungen unseres Realisierungsprozesses, welche man leicht nachprüfen kann, seien die folgenden Formeln erwähnt

$$\frac{}{\sqrt{p^2+a^2}} - \frac{}{2\pi i} \int \frac{e^{\gamma t}}{\sqrt{\gamma^2+a^2}}\, d\gamma = J_0(a\,t). \tag{35}$$

Diese Formel führt zu einer interessanten Anwendung des Multiplikationssatzes. Zerspalten wir den Operator $\frac{p}{p^2+a^2}$ in die drei Produkte

$$\frac{}{p^2+a^2} - \frac{}{p} \frac{}{\sqrt{p^2+a^2}} \frac{}{\sqrt{p^2+a^2}},$$

so liefert die Anwendung des Duhamelschen Prinzips

$$\frac{}{p^2+a^2} = \int_0^t J_0(a\,(t-\tau))\, J_0(a\,\tau)\, d\tau.$$

Andererseits ist nach Beispiel 7

$$\frac{p}{p^2+a^2} \qquad \sin a\,t$$

Wir erhalten also unmittelbar das folgende *Integraltheorem für Besselsche Funktionen:*

$$\int_0^t J_0(a\,(t-\tau))\, J_0(a\,\tau)\, d\tau = \frac{\sin at}{} \tag{36}$$

10. Endlich betrachten wir (vgl. hierzu Bd. I, 2. Aufl., S. 134) die *Abelsche Integralgleichung*

$$f(t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}\, d\tau. \qquad (0<\alpha<1) \tag{37}$$

Als Operatorengleichung geschrieben lautet sie

$$p f = \Gamma(1-\alpha)\, p^{\alpha} \varphi,$$

also ihre Auflösung

$$\varphi = \frac{}{\Gamma(1-\alpha)}\, p^{1-\alpha} f$$

oder ausgeschrieben

$$\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\, d\tau. \tag{38}$$

Wegen $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ folgt dann in Übereinstimmung mit dem Resultat in Bd. I, S. 134

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\, d\tau. \tag{39}$$

§ 3. Zur allgemeinen Theorie der Ausgleichsprobleme.

Die Überlegungen der vorangehenden Paragraphen enthalten zwar die Methode, nicht aber eine vollständige Begründung der Operatorentheorie. Es bleibe dahingestellt, ob nicht dem Charakter dieser Theorie die Entwicklung der *Methoden* angemessener ist, als die von übergeordneten auf deduktive Anwendung hinweisenden *Sätzen*. Die Operatorenmethode ist mit gleicher Einfachheit auf die verschiedenartigsten Probleme anwendbar. Eine Unterordnung aller dieser Möglichkeiten unter einen umfassenden Satz scheint jedoch zum mindesten komplizierte Formulierungen zu erfordern. Wir verzichten hier auf eine vollständige Durchführung eines solchen Versuches, wollen aber durch Verfolgung des in § 1, Nr. 4 gegebenen Ansatzes wenigstens einen Schritt in dieser Richtung tun. Wir zeigen nicht nur, wie die Methode begründet werden kann, sondern formulieren auch einen Satz, dem sich schon verhältnismäßig komplizierte Beispiele unterordnen. Dabei wird die vor allem von G. DOETSCH zu ähnlichen Zwecken benutzte Laplacesche Transformation in den Vordergrund treten[1].

1. Die Transformation von Laplace. Zu den Laplaceschen Transformationsformeln kann man sofort gelangen, indem man in den beiden Sätzen über die *Mellinschen Integralformeln* (Bd. I, 2. Aufl., S. 87) die Variablen x durch e^{-x} und die Funktion $g(x)$ durch $g(e^{-x}) = \varphi(x)$ ersetzt. Wir wollen jedoch den Beweis für die *Laplaceschen Umkehrungsformeln* noch einmal unabhängig unter etwas erweiterten Voraussetzungen führen.

Satz 1. *Es sei in einem Streifen* $\alpha < \sigma < \beta$ der Ebene der komplexen Variablen $s = \sigma + i\tau$ *die Funktion* $\varphi(s)$ *regulär analytisch. In jedem schmaleren Streifen* $\alpha + \delta \leq \sigma \leq \beta - \delta$ $(\delta > 0$, *beliebig fest) möge es eine positive Funktion* $\Phi(\varrho)$ *geben, so daß* $\int\limits_0^\infty \Phi(\varrho)\, d\varrho$ *existiert und daß überall in diesem Streifen*

$$|\varphi(s)| \leqq \Phi(|\tau|) \qquad (s = \sigma + i\tau) \tag{1}$$

gilt. Dann existiert für reelle x und festes σ

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{xs} \varphi(s)\, ds, \tag{2}$$

und es gilt im Streifen $\alpha < \sigma < \beta$

$$\varphi(s) = \int\limits^{\infty} \psi(x)\, e^{-xs}\, dx. \tag{3}$$

[1] Vgl. ein demnächst in dieser Sammlung erscheinendes Werk dieses Autors.

Satz 2. *Ist $\psi(x)$ eine für reelle x stückweise glatte Funktion und ist für $\alpha < \sigma < \beta$ das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-\sigma x}\, dx$ absolut konvergent, dann folgt aus*

$$\varphi(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-xs}\, dx; \qquad \alpha < \sigma < \beta \tag{3}$$

die Umkehrung (2).

Zusatz. *Ist $\beta = \infty$, ist also $\varphi(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma > \alpha$ regulär und den obigen weiteren Voraussetzungen unterworfen*[1], *so wird $\psi(x) = 0$ für $x < 0$. Es gelten also in diesem Falle die reziproken Formeln*

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits^{\sigma + i\infty} \varphi(s)\, e^{xs}\, ds \\ \varphi(s) &= \int\limits_{0}^{\infty} \psi(x)\, e^{-xs}\, dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir beweisen zunächst Satz 2. Es sei

$$\psi_T(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} \varphi(s)\, e^{xs}\, ds = \frac{e^{x\sigma}}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} \varphi(\sigma + i\tau)\, e^{ix\tau}\, d\tau.$$

Für $\varphi(\sigma + i\tau)$ tragen wir den Wert

$$\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-\xi(\sigma + i\tau)}\, d\xi$$

ein und erhalten

$$\psi_T(x) = \frac{e^{x\sigma}}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-\sigma\xi}\, e^{-i(\xi - x)\tau}\, d\xi.$$

Da nun $\psi(x)\, e^{-x\sigma}$ stückweise glatt ist und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|\, e^{-x\sigma}\, dx$ für jedes feste σ des Intervalles $\alpha < \sigma < \beta$ konvergiert, so strebt auf Grund des Fourierschen Integraltheorems (vgl. Bd. I, S. 65 ff.) mit wachsendem T das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-\sigma\xi}\, e^{-i(\xi - x)\tau}\, d\xi$$

gegen den Wert $\psi(x)\, e^{-\sigma x}$ und somit $\psi_T(x)$ gegen $\psi(x)$, wie behauptet wird.

Um Satz 1 zu beweisen, bilden wir das unter unseren Voraussetzungen im Intervall $\alpha < \sigma < \beta$ absolut konvergente Integral

$$\psi(x) = \frac{e^{\gamma\sigma}}{2\pi} \int\limits^{\infty} \varphi(\sigma + i\tau)\, e^{i\tau x}\, d\tau.$$

[1] Insbesondere existiert ein $\Phi(\varrho)$ für alle $\sigma \geqq \alpha + \delta$.

Wir zeigen, daß dieses Integral von σ nicht abhängt. Nach der üblichen Betrachtungsweise auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes ist dies der Fall, wenn das Integral

$$J = \int^{\sigma_2} \varphi(\sigma + iT)\, e^{x(\sigma+iT)}\, d\sigma$$

über ein zur reellen Achse paralleles Geradenstück der festen Länge $\sigma_2 - \sigma_1 > 0$, welches ganz im Streifen $\alpha + \delta \leqq \sigma \leqq \beta - \delta$ liegt, gegen Null strebt, falls $|T|$ eine passende über alle Grenzen wachsende Folge $|T_1|$, $|T_2|, \ldots$ durchläuft. Dies letztere jedoch folgt aus der Abschätzung

$$|J| \leqq e^{|x|\sigma_2} \int^{\sigma_2} |\varphi(\sigma + iT)|\, d\sigma \leqq e^{|x|\sigma_2}\, \Phi(|T|)\, (\sigma_2 - \sigma_1).$$

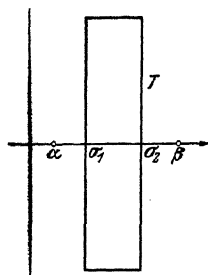



Abb. 12.

Wegen der Existenz des Integrals $\int\limits_0^{\smile} \Phi(\varrho)\, d\varrho$ muß es nämlich zum mindesten eine Folge von Werten $T_1, T_2, \ldots$ geben, für welche $\Phi(|T|)$ gegen Null strebt.

Aus der Gleichung

$$\psi(x)\, e^{-x\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int^{\infty} \varphi(\sigma - i\tau)\, e^{-i\tau x}\, d\tau$$

folgt, daß $\psi(x)\, e^{-x\sigma}$ die Fouriersche Transformierte zu der in τ sicherlich stückweise glatten Funktion $\varphi(\sigma - i\tau)$ ist; somit wird nunmehr wegen der Konvergenz des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\sigma - i\tau)|\, d\tau$, nach dem Fourierschen Umkehrtheorem

$$\varphi(\sigma - i\tau) = \int^{\infty} \psi(x)\, e^{-x\sigma + i\tau x}\, dx,$$

d. h.

$$\varphi(s) = \int\limits_{\smile}^{\smile} \psi(x)\, e^{-xs}\, dx,$$

wie behauptet war.

Um noch den Zusatz zu beweisen, bemerken wir, daß unter dessen Voraussetzung die für alle $\sigma \geqq \alpha + \delta$ und alle x gültige Abschätzung

$$|\psi(x)| < e^{x\sigma} \frac{1}{\pi} \int^{\smile} \Phi(\varrho)\, d\varrho \tag{5}$$

gilt. Ist x negativ, so wird die rechte Seite mit hinreichend großem σ beliebig klein, und es folgt somit

$$\psi(x) \equiv 0 \quad \text{für} \quad x < 0,$$

wodurch der Zusatz bewiesen ist.

2. Lösung der Ausgleichsprobleme mit Hilfe der Laplaceschen Transformation. Wir sind nunmehr in der Lage, in weiter reichender Weise als in § 1, 4 unser Ausgleichsproblem I aus § 1 zu lösen auch unter der Voraussetzung, daß der Anfangszustand nicht der Ruhezustand ist. Die Lösung beruht darauf, daß dieses Problem I auf ein anderes, II, mit einer unabhängigen Veränderlichen weniger zurückgeführt wird, mit welchem es auf Grund der Laplaceschen Transformation und ihrer Inversen äquivalent ist, und welches sich in vielen Fällen einer einfachen expliziten Behandlung als zugänglich erweist. Dafür ist es erwünscht, die Voraussetzungen, unter denen unsere Transformationen vorgenommen werden, so weit zu halten, daß die praktisch in Anwendungen vorkommenden Fälle tatsächlich einbegriffen bleiben.

Wir stellen für die zu betrachtende Lösung $u(x, t)$ des Problems I die folgende Forderung: es gibt eine reelle Zahl α_0 derart, daß mit wachsendem t die Funktionen

$$\begin{gathered} u(x,t)\, e^{-\alpha_0 t} \\ u_x(x,t)\, e^{-\alpha_0 t} \\ u_{xx}(x,t)\, e^{-\alpha_0 t} \end{gathered} \tag{6}$$

gleichmäßig in x beschränkt bleiben, wenn t über alle Grenzen wächst.

Unter dieser Bedingung existiert für $\Re\gamma = \alpha > \alpha_0$ die Laplacesche adjungierte Funktion

$$\frac{v}{\gamma} = \int_0^\infty u(x, t)\, e^{-\gamma t}\, dt$$

und stellt in der Halbebene $\alpha > \alpha_0$ eine reguläre analytische Funktion von $\gamma = \alpha + i\beta$ dar. Für die Ableitungen dieser Funktion erhalten wir auf Grund unserer Voraussetzungen

$$\frac{v_x}{\gamma} = \int^\infty u_x e^{-\gamma t}\, dt$$

$$\frac{xx}{\gamma} = \int^\infty u_{xx}\, e^{-\gamma t}\, dt.$$

Ebenso folgern wir aus diesen Bedingungen, daß auch die Laplaceschen Adjungierten der Funktionen u_t und u_{tt} existieren. Zunächst ist

$$\int_0^T u_t(x, t)\, e^{-\gamma t}\, dt = u(x, T)\, e^{-\gamma T} - \varphi(x) + \gamma \int_0^T u(x, t)\, e^{-\gamma t}\, dt.$$

Aus der Konvergenz der rechten Seite für $T \to \infty$ bei $\Re\gamma > \alpha_0$ folgt die der linken Seite, also wird

$$\int^\infty u_t\, e^{-\gamma t}\, dt = v(x, \gamma) - \varphi(x).$$

Aus der Differentialgleichung $a u_{tt} + b u_t = L[u]$ folgt sodann im hyperbolischen Falle wegen $a > 0$ auch die Existenz des Integrals $\int\limits_0^\infty u_{tt}\, e^{-\gamma t}\, dt$, und zwar ist

$$\int\limits_0^\infty u_{tt}\, e^{-\gamma t}\, dt = \gamma(v - \varphi) - \psi.$$

Multiplizieren wir nunmehr die Differentialgleichung (10) in § 1 mit $e^{-\gamma t}$ und integrieren nach t von 0 bis ∞, so entsteht für v die inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung

$$L[v] + (a\gamma^2 + b\gamma)\varphi + a\gamma\psi = (a\gamma^2 + b\gamma)\, v,$$

welche übrigens homogen wird, wenn zu Beginn der Ruhezustand herrscht. Aus den Randbedingungen des Problems I folgen in analoger Weise für die Funktion $v(x, \gamma)$ die Randbedingungen

$$v(0, \gamma) = \gamma \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-\gamma t}\, dt$$

$$\varrho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)\, v + \lambda\gamma\varphi(l). \qquad (x = l)$$

Es entsteht also für die Funktion v der unabhängigen Veränderlichen x und des komplexen Parameters γ das folgende Randwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Problem II.

II

$$(7) \qquad L[v] + (a\gamma^2 + b\gamma)\varphi + a\gamma\psi = (a\gamma^2 + b\gamma)\, v$$

$$(7') \qquad v(0, \gamma) = \gamma \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-\gamma t}\, dt$$

$$\varrho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)\, v + \lambda\gamma\varphi(l). \qquad (x = l)$$

Dabei sei $f(t)$ für $t \geqq 0$ stückweise glatt und das Integral $\int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-\alpha t}\, dt$ für $\alpha > \alpha_0$ absolut konvergent. $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien stetige Funktionen für $0 \leqq x \leqq l$.

Wir folgern hieraus sofort: *Falls Problem II zu jedem $\gamma = \alpha + i\beta$ mit $\alpha > \alpha_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, so gibt es höchstens eine Lösung des zugehörigen Problems I, welche den Forderungen* (6) *genügt.* Da nämlich unter unseren Voraussetzungen die Laplacesche Transformation eindeutig umkehrbar ist, müßten zwei verschiedenen Lösungen des Problems I auch zwei verschiedene Lösungen des Problems II entsprechen.

Noch wesentlicher als diese Bemerkung jedoch ist die Tatsache, daß mit Hilfe der Umkehrformeln von LAPLACE aus der Lösung des Problems II die Lösung des Problems I gewonnen werden kann. Es gilt nämlich

der folgende Satz: *Es sei $v(x,\gamma)$ eine im Bereich $0 \leqq x \leqq l$ stetige, mit stetigen Ableitungen nach x bis zur zweiten Ordnung versehene Lösung des Problems II. Für jedes feste x dieses Intervalls sei $v(x,\gamma)$ in der Halbebene $\Re\,\gamma > \alpha_0$ der komplexen γ-Ebene überall regulär. Es gelte ferner: In jeder Teilhalbebene $\Re\,\gamma \geqq \alpha_0 + \delta$ — aus welcher im Falle $\alpha_0 < 0$ der Nullpunkt durch einen beliebig kleinen festen Kreis ausgeschlossen ist — und in jedem festen Teilbereich $\varepsilon \leqq x \leqq l$ eine Ungleichung der Form*

$$\left|\frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\right| \leqq \Phi(|\beta|)\,, \tag{8}$$

wobei $\int_0^\infty \Phi(\varrho)\,d\varrho$ existiert. Wird nun durch das Integral

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\,e^{\gamma t}\,d\gamma \tag{9}$$

eine im Bereich $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$, $t^2 + x^2 \geqq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ beliebig klein) stetige und im Bereich $0 < x \leqq l$, $t \geqq 0$ mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Funktion u dargestellt, so ist u die Lösung des zugehörigen Problems I. Der Integrationsweg L ist dabei eine beliebige Parallele zur imaginären Achse, die ganz im Streifen $\alpha > \alpha_0$ verläuft, oder, falls $\alpha_0 < 0$ ist, ein „*Haken*"*weg* von der in Abb. 10, § 2, 5 angegebenen Gestalt[1].

Zum Beweise zeigen wir zunächst, daß $u(x,t)$ die Differentialgleichung erfüllt. Hierbei wie auch nachher bei der Verifikation der Rand- und Anfangsbedingungen bedienen wir uns des schon mehrfach in § 1 erwähnten Kunstgriffes, um die notwendigen Differentiationen ausführen zu können. Wir bilden zunächst die Hilfsfunktion

$$w(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{v(x,\gamma)}{\gamma^3}\,e^{\gamma t}\,d\gamma. \tag{10}$$

Diese Funktion kann für $\varepsilon \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ wegen der Voraussetzung (8) durch Differentiation unter dem Integralzeichen zweimal nach der Zeit t differenziert werden. Insbesondere ist

$$w_{tt} = u(x,t).$$

Andererseits ist wegen der Differentialgleichung (7) auch

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{L[v]}{\gamma^3}\,e^{\gamma t}\,d\gamma$$

ein im Bereich $\varepsilon \leqq x \leqq l$, $\varepsilon \leqq t \leqq T$ gleichmäßig konvergentes Integral. Hieraus folgert man, daß

$$L[w] = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{L[v]}{\gamma^3}\,e^{\gamma t}\,d\gamma$$

[1] Aufgabe: Man identifiziere dieses Ergebnis mit der Darstellung der Lösung durch das Duhamelsche Integral aus § 1, Nr. 2.

gilt[1]. Daher folgt nunmehr

$$a w_{tt} + b w_t - L[w] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3} \left[(a\gamma^2 + b\gamma)\, v - L[v] \right] d\gamma.$$

Also infolge der Differentialgleichung (7)

$$a w_{tt} + b w_t - L[w] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3} \left[(a\gamma^2 + b\gamma)\, \varphi + a\gamma\psi \right] d\gamma$$

oder

$$a w_{tt} + b w_t - L[w] = a\varphi + (b\varphi + a\psi)t. \tag{11}$$

Differenzieren wir zweimal nach t — dies ist möglich, da $u(x, t)$ selbst als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wurde —, so entsteht für u die Differentialgleichung $a u_{tt} + b u_t = L[u]$, und zwar für alle x, t mit $0 < x \leqq l$, $t > 0$.

Daß u im Punkte $x = 0$ die Randbedingung $u(0, t) = f(t)$ erfüllt, folgt unmittelbar aus dem Umkehrtheorem und aus der für $t > 0$, $0 \leqq x \leqq l$ vorausgesetzten Stetigkeit von $u(x, t)$.

Im Punkte $x = l$ folgt zunächst für die Hilfsfunktion w die Bedingung

$$\varrho w_x + \lambda w_t - \sigma w = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^3} \left[\varrho v_x + (\lambda\gamma - \sigma)\, v \right] d\gamma$$

$$= \frac{\lambda \varphi(l)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma^2}\, d\gamma = \lambda t \varphi(l)$$

und daraus durch zweimalige Differentiation nach t

$$\varrho u_x + \lambda u_t - \sigma u = 0.$$

[1] Es genügt nachzuweisen, daß

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{p\, v_{xx} + q\, v_x}{\gamma^3}\, e^{\gamma t}\, d\gamma = p\, w_{xx} + q\, w_x,$$

oder, wegen $p > 0$, daß

$$\Omega = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{(P v_x)_x}{\gamma^3}\, e^{\gamma t}\, d\gamma = (P w_x)_x$$

gilt, wobei $P(x) = e^{0 \;\; p \;\; dx}$ gesetzt ist.

Durch Integration des für $\varepsilon \leqq x \leqq l$; $t \geqq \varepsilon$ gleichmäßig konvergenten Integrals folgt leicht

$$\int^{x} \frac{dx'}{P(x')} \int^{x'} \Omega\, dx'' = w(x, t) - w(\varepsilon, t) - A(t) \int^{x} \frac{dx'}{P(x')},$$

wobei $A(t)$ von x nicht abhängt. Differentiation der letzten Gleichung liefert dann direkt $\Omega = (P w_x)_x$.

Um endlich die Anfangsbedingungen zu verifizieren, beachten wir zunächst, daß wegen

$$w(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{v}{\gamma^3} d\gamma$$

und

$$w_t(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{v}{\gamma^2} d\gamma$$

und wegen der Voraussetzung (8) sowohl $w(x, 0)$ als auch $w_t(x, 0)$ für $x > 0$ verschwinden. In der Tat gelten die Abschätzungen

$$|w(x, 0)| \leqq \frac{1}{\pi \alpha^2} \int\limits_0^\infty \Phi(\varrho)\, d\varrho,$$

$$|w_t(x, 0)| \leqq \frac{1}{\pi \alpha} \int\limits_0^\infty \Phi(\varrho)\, d\varrho,$$

aus denen für $\alpha \to \infty$ die Behauptung folgt. Da w und w_t, sowie ihre Ableitungen bis zur zweiten Ordnung infolge der Voraussetzungen über $u(x, t)$ im Gebiete $0 < x \leqq l$; $t \geqq 0$ stetig sind, so verschwindet für $t \to 0$ auch $L[w]$ und $L[w_t]$, und die Gleichung (11) geht über in

$$(12) \qquad a[w_{tt}(x, 0) - \varphi(x)] = a(u(x, 0) - \varphi(x)) = 0.$$

Durch Differentiation von (11) ergibt sich für $t = 0$

$$a(w_{ttt} - \psi) + b(w_{tt} - \varphi) = 0$$

oder

$$(13) \qquad a(u_t(x, 0) - \psi(x)) + b(u(x, 0) - \varphi(x)) = 0.$$

Hieraus folgt im Falle $a \neq 0$

$$u(x, 0) = \varphi(x); \qquad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

und im Falle $a = 0$, $b \neq 0$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

womit der Beweis zu Ende geführt ist.

Schließlich sei bemerkt, daß wegen (8) für u die Abschätzung

$$|u(x, t)| \leqq \frac{1}{\pi} e^{\alpha t} \int\limits_0^\infty \Phi(\varrho)\, d\varrho$$

besteht, gültig für beliebiges $\alpha \geqq \alpha_0$. Für $t < 0$ folgt daraus

$$(14) \qquad u(x, t) \equiv 0$$

und für $t > 0$

$$(15) \qquad |u(x, t)| \leqq \frac{1}{\pi} e^{\alpha_0 t} \int \Phi(\varrho)\, d\varrho,$$

was zeigt, daß die anfangs für unsere Funktion u gemachte Voraussetzung (6) bei der nunmehr konstruierten Lösung auch tatsächlich erfüllt ist.

3. Beispiele. Wärmeleitungs- und Kabelgleichung für endliche Gebiete. 1. Die Wärmeleitungsgleichung. Als erstes Beispiel betrachten wir die allgemeine Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx} - r u \qquad (r = \text{konst.}) \tag{16}$$

im endlichen Grundgebiet $0 \leqq x \leqq l$, für die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = 0 \tag{16'}$$

und die Randbedingungen

$$u(0, t) = 1\,; \qquad \varrho u_x + \lambda u_t = \sigma u \; (x = l). \tag{16''}$$

Gemäß unserer allgemeinen Regel lösen wir zunächst das folgende *Problem II* der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v_{xx} = \varkappa^2 v \qquad (\varkappa^2 = \gamma + r) \tag{17}$$

mit den Randbedingungen

$$v(0, \gamma) = 1\,. \quad \varrho v_x = (\sigma - \lambda\gamma) v. \qquad (x = l) \tag{17'}$$

Diese Lösung lautet

$$v(x, \gamma) = \frac{\varrho\varkappa \operatorname{Cof} \varkappa(l - x) + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa(l - x)}{\varrho\varkappa \operatorname{Cof} \varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa l} \tag{18}$$

und ist, als Funktion der komplexen Variablen $\gamma = \alpha + i\beta$ betrachtet, in jedem Gebiet der Halbebene $\Re\gamma > -r$ regulär, welches keine Nullstelle des Nenners

$$\varrho\varkappa \operatorname{Cof} \varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa l$$

enthält. Diese Nullstellen genügen nun der Gleichung

$$e^{2\varkappa l} = \varepsilon(\varkappa), \quad \text{mit} \quad \varepsilon(\varkappa) = \frac{\lambda\varkappa^2 - \varrho\varkappa - (\lambda r + \sigma)}{\lambda\varkappa^2 + \varrho\varkappa - (\lambda r + \sigma)}, \tag{19}$$

und ihr Realteil kann bei gegebenen, nicht sämtlich verschwindenden λ, ϱ, σ eine gewisse Schranke α_0 nicht überschreiten. Denn gäbe es andernfalls eine unendliche Folge von Nullstellen $\gamma_\nu = \sqrt{\varkappa_\nu^2 - r}$, deren Realteil gegen ∞ wächst, so würde für sie die linke Seite von (19) über alle Grenzen wachsen, die rechte aber beschränkt bleiben.

Hieraus folgt, daß $v(x, \gamma)$ in einer gewissen Halbebene $\Re\gamma > \alpha_0$ regulär ist. Auf jeder Parallelen L zur imaginären β-Achse, die ganz in dieser Halbebene verläuft, gilt nun für den Realteil von $\varkappa = \sqrt{\gamma + r}$ die Relation $\lim\limits_{|\beta| \to \infty} \Re\varkappa - \sqrt{\frac{|\beta|}{2}} = 0$. Schreiben wir daher

$$v(x, \gamma) = \frac{e^{-\varkappa x} - \varepsilon(\varkappa)\, e^{\varkappa(x - 2l)}}{1} \tag{20}$$

so erkennen wir, daß im Intervall $0 < \delta \leqq x \leqq l$ die Ungleichung

$$|v(x, \gamma)| \leqq C_0 e^{-x\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}} \leqq C_0 e^{-\delta\sqrt{\frac{|\beta|}{2}}} \tag{21}$$

besteht, wobei die Konstante C_0 von x und β nicht abhängt. Hieraus folgt sofort, daß $v(x, \gamma)$ der Voraussetzung (8) des allgemeinen Satzes aus Nr. 2 genügt. Entsprechende Ungleichungen bestehen auch für die Ableitungen der Funktion v:

$$(21') \qquad |v_x(x,\gamma)| \leqq C_1 \sqrt{|\beta|}\, e^{-\delta}$$

$$v_{xx}(x,\gamma)| \leqq C_2 |\beta|\, e^{-}$$

Infolge (21) und (21′) stellt nun das Integral

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L v(x,\gamma) \frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\, d\gamma$$

im Gebiete $0 < x \leqq l$; $t \geqq 0$ eine stetige, mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Funktion $U(x, t)$ dar. Können wir also weiter noch die Stetigkeit von U bei Annäherung an einen Punkt $t > 0$ der t-Achse zeigen, so ist nach dem allgemeinen Ergebnis von Nr. 1

$$(22) \qquad U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varrho\varkappa \operatorname{Cof} \varkappa (l-x) + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa (l-x)}{\varrho\varkappa \operatorname{Cof} \varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa l} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma$$

die gesuchte Lösung von (16).

Um die Stetigkeit von U zu beweisen, schreiben wir

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varepsilon(\varkappa)\, e^{-2\varkappa l} (e^{-\varkappa :} - e^{\varkappa x}}{1 - \varepsilon(\varkappa)\, e^{-}} \cdot \frac{e^{\gamma t}}{\gamma}\, d\gamma$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{-x\sqrt{\gamma+r}} - e^{-x\sqrt{\gamma}}}{} e^{\gamma t} d\gamma + \frac{}{2\pi i} \int_L \frac{e^{-x\sqrt{\gamma}}}{\nu} e^{\gamma t} d\gamma.$$

Die beiden ersten Integrale sind im ganzen Gebiet $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ gleichmäßig konvergent — dabei das zweite wegen der auf L gültigen Ungleichung

$$e^{-x\sqrt{\gamma+r}} - e^{-x\sqrt{\gamma}} \Big| = \Big| e^{-x\sqrt{\gamma}} \quad e^{\ \sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma+r}} - 1 \Big| \leqq C \frac{}{\sqrt{|\gamma|}},$$

wobei C von x und γ unabhängig ist; beide konvergieren mit x gegen Null. Das dritte Integral aber besitzt [vgl. § 2, Formel (34) ff.] den Wert

$$\frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\, d\tau$$ und nähert sich für $t > 0$ mit $x \to 0$ stetig dem Wert 1.

Führen wir in (22) an Stelle von γ die Integrationsvariable $\varkappa = \sqrt{\gamma + r}$ ein, so geht (22) über in

$$(23) \quad U(x, t) = \frac{e^{-rt}}{2\pi i} \int_{L'} \frac{\varrho\varkappa \operatorname{Cof} \varkappa (l-x) + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa (l-x)}{\varrho\varkappa \operatorname{Cof} \varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa l} \frac{2\varkappa}{\varkappa^2 - r} e^{\varkappa^2 t} d\varkappa.$$

wobei nunmehr L' das Bild der Parallelen L in der $\varkappa = \sigma + i\tau$-Ebene ist, also eine gleichseitige Hyperbel

$$\Re \gamma = \Re(\varkappa^2 - r) = \sigma^2 - \tau^2 - r = \text{konst.} > \alpha_0.$$

Man erkennt jedoch auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes leicht, daß man auch in der $\varkappa$-Ebene als Integrationsweg eine beliebige wiederum mit L bezeichnete Parallele zur imaginären Achse wählen darf, welche alle Nullstellen des Ausdruckes $(\varkappa^2 - r)\,(\varrho\varkappa \operatorname{Cof} \varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa l)$ zur Linken läßt.

Abb. 13.

Wir betrachten insbesondere die Randbedingungen

$$(24) \qquad u_x(l, t) = 0 \quad \text{bzw.} \quad u(l, t) = 0.$$

Im ersten Fall ist $\varepsilon(\varkappa) = -1$, im zweiten Fall — der übrigens wegen $u(l, 0) = 0$ die nur scheinbar allgemeine Randbedingung $\lambda u_t = \sigma u$ mit erledigt — ist $\varepsilon(\varkappa) = +1$. Wir behandeln beide Fälle gleichzeitig, indem wir in (20) die Funktion $\varepsilon(\varkappa)$ als Konstante ansehen und ihr nachträglich im Resultat die Werte $\varepsilon = -1$ bzw. $\varepsilon = +1$ erteilen.

Um die Darstellung von U zu vereinfachen, benutzen wir die Entwicklung

$$\frac{1}{1 - \varepsilon e^{-2\varkappa l}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu e^{-2\varkappa\nu l}$$

die für alle $\varkappa$ mit positivem Realteil konvergent ist, und erhalten so

$$(25) \qquad v(x, \varkappa) = \sum_{\nu=0} \varepsilon^\nu e^{-\varkappa(x+2\nu l)} - \sum_{\nu=1} \varepsilon^\nu e^{\varkappa(x-2\nu l)}$$

und

$$(26) \quad U(x, t) = \frac{e^{-rt}}{2\pi i} \int_L \left[\sum_0^\infty \varepsilon^\nu e^{-\varkappa(x+2\nu l)} - \sum_1^\infty \varepsilon^\nu e^{\varkappa(x-2\nu l)} \right] \frac{2\varkappa}{} e^{\varkappa^2 t} d\varkappa.$$

In dieser Reihe können wir für $t > 0$ Integration und Summation vertauschen[1]. Differenzieren wir alsdann (26) nach t unter dem Summen- und Integralzeichen, so entsteht eine für $t \geqq \delta > 0$ gleichmäßig konvergente Reihe von gleichmäßig konvergenten Integralen, und es folgt somit

[1] Denn ist $v_n(x, \varkappa)$ der n^{te} Abschnitt der Reihe (25) und $\varkappa = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, so gilt $|v - v_n| \leqq C e^{-2\alpha n l}$; C von $\varkappa$ und x unabhängig. Also konvergiert

$$\frac{1}{2\pi i} \int (v - v_n) \cdot \frac{}{\varkappa^2 - } \cdot e^{\varkappa^2 t} d\varkappa \leqq \frac{C}{2\pi} \cdot e^{-2\alpha n l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{}{\varkappa^2 - r} e^{(\alpha^2 - \beta^2)t} d\beta$$

für $t > 0$ mit wachsendem n gegen Null.

$$U_t(x,t) = \frac{e^{-rt}}{2\pi i}\left\{\sum_0^\infty \varepsilon^\nu \int_L e^{-\varkappa(x+2\nu l)} 2\varkappa e^{\varkappa^2 t} d\varkappa - \sum_1^\infty \varepsilon^\nu \int_L e^{\varkappa(x-2\nu l)} 2\varkappa e^{\varkappa^2 t} d\varkappa\right\}.$$

Wählen wir nunmehr für L die imaginäre Achse selbst, so entsteht für U_t nach leichter Umformung die Darstellung

$$U_t = -\frac{e^{-rt}}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^\nu \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau(x+2\nu l)-\tau^2 t}\, d\tau$$

oder

$$U_t = -\frac{e^{-rt}}{\sqrt{\pi t}}\,\frac{\partial}{\partial x}\sum \varepsilon^\nu e^{-\frac{(x+2\nu l)^2}{4t}}$$

(27)

$$= \frac{e^{-rt}}{\sqrt{4\pi t^3}}\sum_{-\infty} \varepsilon^\nu (x+2\nu l)\, e^{-\frac{(x+2\nu l)^2}{4t}}$$

Wegen $U(x,0)=0$ folgt endlich U selbst durch Integration von (27):

$$U(x,t) = \int^t U_\tau(x,\tau)\, d\tau.$$

Die Funktion

$$F(x,t;l) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sum_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^\nu e^{-\frac{(x+2\nu l)^2}{4t}} \tag{28}$$

aus der sich $U(x,t)$ in einfacher Weise vermöge der Formel

$$U(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t e^{-r\tau} F(x,\tau;l)\, d\tau \tag{29}$$

berechnen läßt, läßt sich durch die *elliptische ϑ-Funktion*

$$\vartheta(z,\tau) = \sum^{\infty} e^{2\pi i n z} e^{i\pi n^2 \tau} \tag{30}$$

ausdrücken. Es sei zunächst $\varepsilon = 1$; dann folgt aus der in Kap. III, § 6, 1 abgeleiteten Transformationsformel

$$F(x,t;l) = \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{\pi}{l}x} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t} \tag{31}$$

und daher

$$F(x,t;l) = \frac{1}{l}\,\vartheta\left(\frac{x}{2l},\, i\frac{\pi}{l^2}t\right). \tag{32}$$

Im Falle $\varepsilon = -1$ läßt sich die entsprechende Funktion $F_1(x,t;l)$ leicht in der Form

$$F_1(x,t;l) = F(x,t;l) - 2F(x+2l,t;2l) \tag{33}$$

aus F gewinnen. Nach leichter Rechnung ergibt sich

$$F_1(x,t;l) = \frac{1}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}x}\, e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}t} \tag{34}$$

oder

$$F_1(x,t;l) = \frac{1}{l}\, e^{i\frac{\pi}{2l}x - \frac{\pi^2}{4l^2}t}\,\vartheta\left(\frac{x}{2l}\left(1+i\frac{\pi t}{l}\right);\ i\frac{\pi^2}{l^2}\right). \tag{35}$$

Wir können die Formeln (31) und (34) ausnutzen, um eine andere Darstellung der Funktion U zu gewinnen. Tragen wir diese Reihen in (29) ein, so ergeben sich nach Integration unter dem Summenzeichen unter Berücksichtigung der im Intervall $0 < x \leq l$ gültigen Fourierentwicklungen

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Sin}\sqrt{r}\,(l-x)}{\mathfrak{Sin}\sqrt{r}\,l} &= \frac{2\pi}{l^2}\sum^{\infty}\frac{n\sin\frac{\pi}{l}nx}{r+n^2\frac{\pi^2}{l^2}} \\ \frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{r}\,(l-x)}{\mathfrak{Cof}\sqrt{r}\,l} &= \frac{2\pi}{l^2}\sum\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{r+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}} \end{aligned} \tag{36}$$

sofort die Darstellungen:

$$U(x,t) = \frac{\mathfrak{Sin}\sqrt{r}\,(l-x)}{\mathfrak{Sin}\sqrt{r}\,l} - \frac{2\pi}{l^2}\,e^{-rt}\sum^{\infty}\frac{n\sin\frac{\pi}{l}nx}{r+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}\,e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t} \tag{37}$$

$$(U(l,t)=0)$$

bzw.

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{r}\,(l-x)}{\mathfrak{Cof}\sqrt{r}\,l} \\ &- \frac{2\pi}{l^2}\,e^{-rt}\sum_0^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{r+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}}\,e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}t}. \end{aligned} \tag{38}$$

$$(U_x(l,t)=0)$$

Sie besagen, daß sich für $t\to\infty$ die *Grenzverteilungen*

$$U = \frac{\mathfrak{Sin}\sqrt{r}\,(l-x)}{\mathfrak{Sin}\sqrt{r}\,l} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{r}\,(l-x)}{\mathfrak{Cof}\sqrt{r}\,l} \tag{39}$$

einstellen.

Für ein unendlich ausgedehntes Intervall erhalten wir aus (37) oder (38) den Ausdruck

$$U = e^{-x\sqrt{r}} - 2e^{-rt}\int^{\infty}\frac{\xi\sin x\xi}{r+\xi^2}\,e^{-\xi^2 t}\,d\xi \tag{40}$$

und speziell im Falle $r = 0$

$$U = 1 - 2 \int\limits_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi} e^{-\xi^2 t} d\xi \tag{41}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/\sqrt{4t}}^\infty e^{-\xi^2} d\xi.$$

2. **Die Wellen- und Telegraphengleichung.** Wir behandeln als weiteres Beispiel die *Telegraphengleichung*

$$u_{tt} = u_{xx} - r^2 u, \qquad (r = \text{konst.}) \tag{42}$$

für die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \tag{42'}$$

und die Randbedingungen[1]

$$u(0, t) = \frac{t^3}{3!}; \qquad \varrho u_x + \lambda u_t = \sigma u \; (x = l). \tag{42''}$$

Das zugehörige *Problem II* lautet

$$\text{II} \quad \begin{cases} (43) & \qquad = \varkappa^2 v \\ (43') & v(0, \gamma) = \dfrac{1}{\gamma^3}; \quad \varrho v_x = (\sigma - \lambda\gamma)\, v \; (x = l), \end{cases}$$

wobei hier

$$\varkappa^2 = \gamma^2 + r^2$$

zu setzen ist. Die Lösung ist gegeben durch

$$v(x, \gamma) = \frac{\varrho \varkappa \operatorname{Cof} \varkappa (l - x) + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa (l - x)}{\varrho \varkappa \operatorname{Cof} \varkappa l + (\lambda\gamma - \sigma) \operatorname{Sin} \varkappa l} \frac{1}{\gamma^3} \tag{44}$$

$$= \frac{e^{-\varkappa x} - \varepsilon(\varkappa)\, e^{\varkappa(x - 2l)}}{1 - \varepsilon(\varkappa)\, e} \frac{1}{}$$

wobei nun

$$\varepsilon(\varkappa) = \frac{\lambda\sqrt{\varkappa^2 - r^2} - \varrho\varkappa - \sigma}{\lambda\sqrt{\varkappa^2 - r^2} + \varrho\varkappa - \sigma} \tag{45}$$

zu setzen ist. Wie früher erkennt man, daß ein $\alpha_0 > 0$ existiert, so daß der Nenner in (44) in der Halbebene $\Re\gamma > \alpha_0$ keine Nullstellen mehr

---

[1] Wir konstruieren hier statt der Stoßfunktion $U(x, t)$ die Funktion $U_3(x, t)$ (vgl. § 1, 2), um auf Grund des Satzes von Nr. 2 von vornherein sicher zu sein, daß das zugehörige Integral $\frac{}{2\pi i} \int \frac{v(x_1\gamma)}{} e^{\gamma t} d\gamma$ die gesuchte Lösung darstellt. Die Voraussetzungen jenes Satzes würden nicht für das zu $U(x, t)$ gehörige Integral erfüllt sein. Nachträglich jedoch können wir U in der Form $U(x, t) = \frac{\partial^3 U_3(x, t)}{\partial t^3}$ aus U_3 erhalten.

besitzt und daher v dort überall regulär ist. Auf jeder in der Halbebene $\Re\gamma \geqq \alpha_0 + \delta$ verlaufenden Parallelen L zur imaginären Achse gilt

$$\left|\frac{v(x,\gamma)}{\gamma}\right| \leqq \frac{A}{(B+|\beta|)^4},$$

wobei $A > 0$ und $B > 0$ von x und γ unabhängige Konstante sind. Hieraus und aus entsprechenden Abschätzungen für $\frac{v_x}{\gamma}$ und $\frac{v_{xx}}{\gamma}$ erkennt man leicht, daß durch

$$U_3(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{v(x,\gamma)}{\gamma} e^{\gamma t} d\gamma \tag{46}$$

eine im Gebiete $0 \leqq x \leqq l$, $t \geqq 0$ stetige, mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Funktion dargestellt wird. Diese Funktion ist somit die Lösung von (42).

Wir behandeln wieder die Spezialfälle[1]

$$\begin{cases} u_x(l,t) = 0; & \varepsilon(\varkappa) = -1 \\ u(l,t) = 0; & \varepsilon(\varkappa) = +1, \end{cases} \tag{47}$$

entwickeln wie früher v in die Reihe

$$v(x,\gamma) = \sum_0^\infty \varepsilon^\nu e^{-\varkappa(x+2\nu l)} - \sum_1^\infty \varepsilon^\nu e^{\varkappa(x-2\nu l)}, \tag{48}$$

und tragen diese Reihe in (46) ein. Da gliedweise Integration, wie man unmittelbar erkennt, erlaubt ist, so entsteht eine Reihe der Form

$$U_3(x,t) = S(x,t) + \sum_1^\infty \varepsilon^\nu [S(2\nu l + x, t) - S(2\nu l - x, t)], \tag{49}$$

wobei $S(x,t)$ durch das Integral

$$S(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{-x\sqrt{\gamma^2+r^2}+\gamma t} \frac{d\gamma}{\gamma^4} \tag{50}$$

bestimmt wird.

Im Falle $r = 0$ folgt sofort

$$S(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{\gamma(t-x)} \frac{d\gamma}{\gamma^4},$$

also

$$S(x,t) = S(t-x) = \begin{cases} \frac{(t-x)^3}{3!}, & t > x \\ 0, & t < x \end{cases} \tag{51}$$

und endlich

$$U_3(x,t) = S(t-x) + \sum_1^\infty \varepsilon^\nu [S(t-x-2\nu l) - S(t+x-2\nu l)] \tag{52}$$

---

[1] Ein weiterer wichtiger Fall ist der der sog. „Anpassung" $\varepsilon = 0$, der allerdings nur bei $r = 0$ durch $\sigma = 0$ und $\lambda = \varrho$ realisiert werden kann. In diesem Falle treten keine „reflektierten" Wellen auf.

in Übereinstimmung mit unseren früheren Resultaten in § 1, 1 für den Spezialfall $f(t) = \frac{t^3}{3!}$, $t > 0$. Da in der Reihe (52) jeweils nur endlich viele Glieder nicht identisch verschwinden und jedes dieser Glieder stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung und stückweise stetige Ableitungen dritter Ordnung besitzt, so erhalten wir durch Differentiation unmittelbar die Funktion U für $r = 0$, nämlich

$$U(x, t) = \eta(t - x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} (\eta(t - x - 2\nu l) - \eta(t + x - 2\nu l)),$$

wobei

$$\eta(t) = 1, \quad t > 0$$
$$= 0, \quad t < 0$$

gesetzt ist.

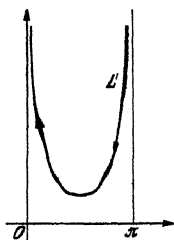



Abb. 14. Abb. 15.

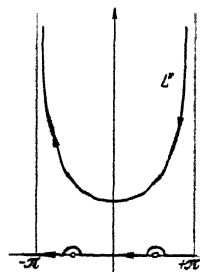



Abb. 16.

Zur Berechnung des Integrals (50) im Falle $r \neq 0$ führen wir an Stelle von γ vermöge der Gleichung

$$\gamma = i r \cos\varphi$$

die Größe $\varphi = \sigma + i\tau$ als Integrationsvariable ein; es folgt

$$S(x, t) = -\frac{1}{2\pi r^3} \int_{L'} e^{ir(ix\sin\varphi + t\cos\varphi)} \frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}\, d\varphi. \tag{53}$$

Dabei ist L' das Bild der Geraden L in der φ-Ebene, d. h. die Kurve

$$\Re(ir\cos\varphi) = \text{konst.} > \alpha_0,$$

deren Gestalt in Abb. 14 gekennzeichnet ist. Ist nun $t < x$, so wird der Realteil des Exponenten

$$ir(ix\sin\varphi + t\cos\varphi),$$

d. h. der Ausdruck

$$r\sin\sigma(t \,\mathfrak{Sin}\,\tau - x \,\mathfrak{Cos}\,\tau) \tag{54}$$

im Unendlichen des Gebietes $0 < \sigma < \pi$; $\tau > 0$ negativ unendlich, so daß L' auf ein doppelt durchlaufenes Geradenstück (vgl. Abb. 15) in diesem Gebiet zusammengezogen werden kann. Daraus folgt

$$S(x, t) \equiv 0. \qquad (t < x) \tag{55}$$

Ist $t > x$, so wird (54) im Unendlichen des Gebietes $-\pi < \sigma < 0$; $\tau > 0$ negativ unendlich, und L kann zu einer den ganzen Streifen $-\pi < \sigma < \pi$ berandenden Kurve L'' ausgezogen werden (vgl. Abb. 16). Wegen der Periodizität des Integranden in (53) erhalten wir

$$S(x,t) = \frac{1}{2\pi r^3} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir(ix\sin\varphi + t\cos\varphi)} \frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}\, d\varphi, \tag{56}$$

wobei die Punkte $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ in einem nach unten offenen kleinen Halbkreis zu umgehen sind.

Es genügt mit $S = -f_x$ die Funktion

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi r^4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir(ix\sin\varphi + t\cos\varphi)} \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi} \tag{57}$$

zu berechnen. Für deren vierte Ableitung nach t aber folgt sofort

$$\frac{\partial^4 f(x,t)}{\partial t^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir(ix\sin\varphi + t\cos\varphi)}\, d\varphi = J_0\left(r\sqrt{t^2 - x^2}\right).$$

Für $t = x$ verschwindet nun sowohl $f(x,t)$ wie die Ableitungen nach t bis zur dritten Ordnung. In der Tat, setzen wir in (57) $t = x$ und führen $z = e^{i\varphi}$ als Integrationsvariable ein, so folgt

$$f(x,x) = -\frac{8}{\pi r^4} \oint \frac{z^3}{(1+z^2)^4} e^{irxz}\, dz,$$

wobei als Integrationsweg der Einheitskreis der z-Ebene zu wählen ist und die Punkte $z = \pm i$ durch Ausbiegen nach innen zu umgehen sind. Es folgt sofort $f(x,x) = 0$; entsprechend ergibt sich das Verschwinden der Ableitungen für $t = x$. Somit erhalten wir

$$f(x,t) = \frac{1}{3!} \int_x^t (t-\tau)^3 J_0\left(r\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) d\tau$$

und daher als Endresultat

$$\left\{\begin{aligned} S(x,t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_x^t \frac{(t-\tau)^3}{3!} J_0\left(r\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) d\tau; && (t > x) \\ S(x,t) &= 0. && (t < x) \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Für den Spezialfall $r = 0$ gewinnen wir natürlich das frühere Resultat

$$S(x,t) = \frac{t^3}{3!}, \qquad (t > x)$$

$$S(x,t) = 0 \qquad (t < x)$$

wieder.

Auch im Falle $r \neq 0$ besitzt infolge (58) die Reihe (49) nur endlich viele nicht identisch verschwindende Glieder, von denen jedes mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten und mit stückweise stetigen dritten Ableitungen versehen ist. Infolgedessen ergibt sich durch Differentiation für die Stoßfunktion $U = \frac{\partial^3 U_3}{\partial t^3}$ der Ausdruck

$$(59) \qquad U(x, t) = S(x, t) + \sum_1^\infty \varepsilon^\nu \left[S(2\nu l + x, t) - S(2\nu l - x, t)\right],$$

wobei nunmehr

$$(59') \qquad S(x, t) \begin{cases} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_x^t J_0\left(r\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) d\tau, & (t > x) \\ = 0 & (t < x) \end{cases}$$

zu setzen ist. Diese Funktion löst das Problem (42) für die Randbedingung $U(0, t) = 1$.

Wir können für die Funktion $U(x, t)$ leicht noch eine andere Darstellung gewinnen, die in Analogie zu den Entwicklungen (37) und (38) in Beispiel 1 steht. Dabei wollen wir allerdings auf die Rechtfertigung der vorzunehmenden Vertauschungen von Grenzübergängen verzichten. Wir gehen aus von den ursprünglichen Integralen

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mathfrak{Cof}\, \varkappa(l - x)}{\mathfrak{Cof}\, \varkappa l} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma; \qquad (U_x(l, t) = 0)$$

bzw.

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mathfrak{Sin}\, \varkappa(l - x)}{\mathfrak{Sin}\, \varkappa l} \frac{e^{\gamma t}}{\gamma} d\gamma; \qquad (U(l, t) = 0)$$

und benutzen die im Intervall $0 < x \leqq l$ gültigen Entwicklungen

$$\frac{\mathfrak{Sin}\, \varkappa(l - x)}{\mathfrak{Sin}\, \varkappa l} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_0^\infty \frac{n \sin \frac{\pi}{l} n x}{\varkappa^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}$$

und

$$\frac{\mathfrak{Cof}\, \varkappa(l - x)}{\mathfrak{Cof}\, \varkappa l} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_0^\infty \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{\pi}{l}\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\varkappa^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}}.$$

Tragen wir diese Entwicklungen ein und integrieren gliedweise, so entstehen wegen $\varkappa^2 = \gamma^2 + r^2$ nun Einzelintegrale vom Typus

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{\gamma t}}{\gamma(\gamma^2 + r^2 + m^2)} d\gamma.$$

Schreiben wir

$$\frac{1}{\gamma(\gamma^2+r^2+m^2)} = \frac{1}{m^2+r^2}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma+i\sqrt{m^2+r^2}} + \frac{1}{\gamma-i\sqrt{m^2+r^2}}\right)\right),$$

so folgt sofort

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{\gamma t}}{\gamma(\gamma^2+m^2+r^2)}\,d\gamma = \frac{2\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{m^2+r^2}}{m^2+r^2}$$

und somit die Reihenentwicklung:

(59)

$$U(x,t) = \frac{4\pi}{l^2}\sum_0^\infty \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{r^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}}\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{r^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}},$$

bzw.

$$U(x,t) = \frac{4\pi}{l^2}\sum \frac{n\sin\frac{\pi}{l}nx}{r^2+n^2\frac{\pi^2}{l^2}}\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{r^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}$$

Im Limes $l\to\infty$ werden hieraus die Integrale

(60)
$$U_1 = U_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi\sin x\xi}{r^2+\xi^2}\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{r^2+\xi^2}\,d\xi$$

Im Falle $r\to 0$ ergeben sich die Summen

(61)

$$U(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\sin\frac{\pi}{l}\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin^2\frac{\pi}{2l}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}$$

$$U(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum \frac{\sin\frac{\pi}{l}nx\sin^2\frac{\pi}{2l}nt}{n}.$$

Die zweite der Summen (61) läßt sich übrigens vermöge des ersten *Bernoullischen Polynoms*

$$B_1(t) = t-\frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi nt}{n} \qquad (0<t<1)$$

in der Form

(62)
$$U_2(x,t) = B_1\left(\frac{x+t}{2l}\right) + B_1\left(\frac{x-t}{2l}\right) - 2B_1\left(\frac{x}{2l}\right)$$

darstellen.

Es sei die Aufgabe gestellt, diese letzten Formeln (61) und (62) mit den früheren Resultaten zu identifizieren.

Der Zusammenhang zwischen der Darstellung (49) und den Reihen (59) wird wie im Beispiel der Wärmeleitungsgleichung durch die Poissonsche Summationsformel (Bd. I, 2. Aufl., S. 65) hergestellt. Verstehen wir unter $G(x, t)$ die Funktion

$$G(x, t) = \begin{cases} 0, & t^2 < x^2 \\ J_0\left(r\sqrt{t^2 - x^2}\right), & t^2 > x^2, \end{cases} \tag{63}$$

so läßt sich die Darstellung (49) auf die Form bringen

$$U(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' G(x + 2\nu l, t), \tag{64}$$

die der Darstellung (29) im Falle der Wärmeleitungsgleichung analog ist. Für die Funktion

$$F(x, t; l) = \sum_{-\infty}^{\infty} G(x + 2\nu l, t) \tag{64'}$$

muß nun, wie man durch Vergleich mit der Reihe (59) erkennt, die Transformationsformel

$$F = \sum^{\infty} G(x + 2\nu l, t) = \frac{1}{l}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\frac{\pi}{l}x}}{\sqrt{r^2 + n^2\frac{\pi^2}{l^2}}} \sin t\sqrt{r^2 + n^2\frac{\pi^2}{l^2}} \tag{65}$$

bestehen; diese Formel folgt direkt aus der Poissonschen Summationsformel, wenn man aus der Theorie der Besselfunktionen die Integralformel

$$\int_0^t J_0\left(r\sqrt{t^2 - x^2}\right) e^{-in\frac{\pi}{l}x}\, dx = \frac{2}{l}\,\frac{\sin t\sqrt{r^2 + n^2\frac{\pi^2}{l^2}}}{\sqrt{r^2 + n^2\frac{\pi^2}{l^2}}} \tag{66}$$

entnimmt.

Speziell für $x = 0$ folgt

$$\sum^{\infty} G(2\nu l, t) = \frac{1}{l}\sum^{\infty} \frac{\sin t\sqrt{r^2 + n^2\frac{\pi^2}{l^2}}}{\sqrt{r^2 + n^2\frac{\pi^2}{l^2}}}. \tag{67}$$

Für jedes t besitzt die linke Seite der Reihe (67) nur endlich viele nicht verschwindende Glieder. Die in (67) rechts stehende unendliche

Reihe läßt sich also explizit durch eine endliche Summe von Besselfunktionen ausdrücken. Z. B. ist im Intervall $0 < t < 2l$

$$J_0(r\,t) = \frac{1}{l} \sum^{\infty} \frac{\sin t \sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}}{\sqrt{r^2 + n^2 \frac{\pi^2}{l^2}}};$$

im Limes $l \to \infty$ wird daraus:

$$J_0(r\,t) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin t \sqrt{r^2 + n^2 \zeta^2}}{\sqrt{r^2 + \pi^2 \zeta^2}}\, d\zeta.$$

Literatur zum Anhang des dritten Kapitels.

Monographien:

JEFFREYS: Operational Methodes in Math. Phys., Cambridge Tracts Nr. 23.

CARSON: Electrical Circuit Theory, New York: 1926, mit reichen Hinweisen auf die ausgebreitete Literatur. Von diesem Werk ist eine deutsche Übersetzung erschienen unter dem Titel: CARSON, JOHN R.: Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung. Erweiterte deutsche Bearbeitung von F. OLLENDORFF und K. POHLHAUSEN. Berlin: 1929.

BUSH: Operational Circuit Analysis, New York: 1937.

DOETSCH: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin: 1937.

Einzelarbeiten, welche den mathematischen Gesichtspunkt hervorheben:

PLANCHEREL: Atti del Congresso Intern. Bologna: 1928.

MÄCHLER, W.: Comm. math. Helvet. Bd. 5, S. 256 ff.

v. KOPPENFELS: Math. Ann. Bd. 105, S. 694 ff.

Viertes Kapitel.

Elliptische Differentialgleichungen, insbesondere Potentialtheorie.

Eine allgemeine Theorie der elliptischen Differentialgleichungen ist im Rahmen dieses Werkes nicht möglich. Wir beschränken uns hier auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung unter fast ausschließlicher Betonung der Potentialtheorie, welche ihrerseits für die Theorie allgemeinerer Differentialgleichungen typisch ist und welche an und für sich einen wichtigen Gegenstand der Analysis bildet.

In Band I und in den vorangehenden Kapiteln wurden bereits zahlreiche Fragen der Potentialtheorie erörtert. Im vorliegenden Kapitel sollen diese Überlegungen zu einem mehr systematischen Bilde ergänzt werden.

§ 1. Grundlagen.

1. Die Differentialgleichungen von Laplace, Poisson und verwandte Differentialgleichungen. Wir betrachten Funktionen $u(x_1, \ldots, x_n)$ von n Variablen und in einem Gebiet G des x-Raumes mit dem Rande Γ die Differentialgleichung

$$\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0, \tag{1}$$

die sog. *Laplacesche Differentialgleichung* oder *Potentialgleichung*; ihre Lösungen nennen wir *Potentialfunktionen* oder *harmonische Funktionen*. Die zugehörige unhomogene Gleichung, die sog. *Gleichung von* POISSON, schreibt man unter Hervorhebung des Faktors

$$\omega_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \tag{2}$$

welcher die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel darstellt, in der Form

$$\Delta u = -\omega_n \mu(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

wobei $\mu(x_1, \ldots, x_n)$ eine gegebene Ortsfunktion ist. Lösungen der Potentialgleichung, die in einem Gebiet G mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehen sind, heißen *in G regulär*. Mit G bezeichnen wir hier und im folgenden stets ein *offenes* und, falls nicht

ausdrücklich anders bemerkt, *beschränktes* Gebiet des Raumes. $G+\Gamma$ ist alsdann das aus G durch Hinzunahme der Randpunkte entstehende *abgeschlossene* Gebiet. Ebenso sprechen wir, falls μ in G stetig ist, von regulären Lösungen der Poissonschen Gleichung (3). Im folgenden werden wir vorzugsweise die Fälle $n=2$ und $n=3$ behandeln, wobei wir in den Fällen $n=2$, $n=3$ im folgenden x, y bzw. x, y, z statt x_1, x_2 bzw. x_1, x_2, x_3 schreiben werden.

Für $n=2$ ist die „*allgemeine Lösung*" der Potentialgleichung der Realteil irgendeiner analytischen Funktion der komplexen Variablen $x+iy$. Auch für $n=3$ erhält man leicht Lösungen, die von willkürlichen Funktionen abhängen. Es sei z. B. $f(z, t)$ eine bei festem reellem t in der komplexen Variablen z analytische Funktion; dann löst die Funktion

$$u = f(z + i x \cos t + i y \sin t,\ t)$$

bei beliebigen Werten von t die Gleichung $\Delta u = 0$. Wir können sodann weitere Lösungen durch Superposition, etwa durch Integration in der Form

$$u = \int f(z + i x \cos t + i y \sin t, t)\, dt \tag{4}$$

gewinnen.

Setzen wir z. B.

$$f(z, t) = z^n e^{iht},$$

wobei n und h ganze Zahlen sind, und integrieren von $-\pi$ bis $+\pi$, so entstehen in x, y, z homogene Polynome

$$u = \int_{-\pi}^{\pi} (z + i x \cos t + i y \sin t)^n e^{iht}\, dt.$$

Indem wir Polarkoordinaten $z = r\cos\vartheta$, $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$ einführen, folgt

$$u = 2 r^n e^{ih\varphi} \int_0^{\pi} (\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos t)^n \cos h t\, dt,$$

also bis auf einen konstanten Faktor die Funktionen

$$u = r^n e^{ih\varphi} P_{n,h}(\cos\vartheta),$$

wobei $P_{n,h}(x)$ die *Kugelfunktionen höherer Ordnung* sind (vgl. Bd. I, 2. Aufl., S. 437).

Durch *Transformation auf Polarkoordinaten* r, φ für $n=2$ bzw. r, ϑ, φ für $n=3$, also durch die Transformation

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

bzw. im Raume

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta,$$

geht der Laplacesche Differentialausdruck über in (vgl. Bd. I, S. 195)

$$(5)\qquad \begin{aligned} \Delta u &= u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}; && (n = 2) \\ \Delta u &= u_{rr} + \frac{2u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2\vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}(u_\vartheta \sin\vartheta)_\vartheta. && (n = 3) \end{aligned}$$

Wir entnehmen diesen Formeln den folgenden, mannigfacher Anwendungen fähigen Satz:

Ist $u(x, y)$ eine in einem ebenen Gebiete G reguläre harmonische Funktion, so genügt auch die Funktion

$$(6)\qquad v(x, y) = u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right) \qquad (r^2 = x^2 + y^2)$$

der Potentialgleichung und ist regulär in dem am Einheitskreis gespiegelten Gebiet G'. Im Raume gilt der entsprechende Satz, nur ist hier

$$(7)\qquad v = \frac{1}{r} u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

zu setzen.

Wenn wir Polarkoordinaten einführen, so haben wir nur zu zeigen, daß mit $u(r, \varphi)$ bzw. $u(r, \vartheta, \varphi)$ auch die Funktionen $v(r, \varphi) = u\left(\frac{1}{r}, \varphi\right)$ und $v(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} u\left(\frac{1}{r}, \vartheta, \varphi\right)$ den Gleichungen (5) genügen. Dies aber folgt sofort unter Beachtung der Formeln

$$r^4\left(v_{rr} + \frac{1}{r} v_r\right) = u_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} u_\varrho, \qquad (\text{für } n = 2)$$
$$r^5\left(v_{rr} + \frac{2}{r} v_r\right) = u_{\varrho\varrho} + \frac{2}{\varrho} u_\varrho, \qquad (\text{für } n = 3)$$

wobei $\varrho = \frac{1}{r}$ gesetzt ist.

Es sei als Aufgabe gestellt, allgemein für n Dimensionen und für die Funktion

$$(8)\qquad v = \frac{1}{r^{n-2}} u\left(\frac{x_1}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right)$$

den analogen Satz zu bestätigen.

Der harmonische Charakter einer Funktion ist hiernach invariant gegenüber Spiegelungen an Kugeln, wenn wir von dem für alle Funktionen gleichen Faktor $\frac{1}{r^{n-2}}$ absehen. Da gegenüber Ähnlichkeitstransformationen, Translationen und einfachen Spiegelungen an Ebenen, der

harmonische Charakter sogar völlig erhalten bleibt, so können wir unser Ergebnis in der folgenden Form aussprechen:

Transformationen, die sich aus Translationen, Ähnlichkeitstransformationen und Spiegelungen an Kugeln oder Ebenen zusammensetzen, führen harmonische Funktionen bis auf einen von der speziellen Funktion nicht abhängigen Faktor wieder in harmonische Funktionen über.

Ist u eine in einem endlichen Gebiet G reguläre harmonische Funktion und spiegeln wir G an einer Kugel, deren Mittelpunkt in G liegt, so geht das Innere von G in das Außengebiet G' der gespiegelten Randfläche Γ' über. Die Funktion

$$v = \cdot_{\;n-2} \left(\frac{x_1}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2}\right)$$

ist alsdann in diesem Außengebiet G' regulär und harmonisch. Umgekehrt definieren wir nun *Regularität in einem nicht beschränkten Gebiet* G in der Weise, daß wir zunächst G an einer außerhalb G gelegenen Kugel spiegeln und damit G in ein beschränktes Gebiet G' verwandeln. *Die harmonische Funktion u heißt alsdann in G regulär, wenn die obige Funktion v in G' regulär ist.* Insbesondere heißt eine harmonische Funktion u *im Unendlichen regulär,* falls G den unendlich fernen Punkt enthält und der Funktion u dort ein solcher Wert zugewiesen ist, daß v in G' regulär wird. Gemäß dieser Definition ist z. B. die Funktion $u =$ konst. zwar in der Ebene, aber nicht im Raume von drei und mehr Dimensionen im Unendlichen regulär. Im Raume sind bei beliebigem a die Funktionen

$$u = 1 - a +$$

außerhalb der Einheitskugel harmonisch und besitzen auf der Kugel die Randwerte $u = 1$. Aber nur die Funktion $u = \frac{1}{r}$ dieser Schar ist im Außengebiet der Einheitskugel regulär.

Wie wir schon früher sahen, sind die einzigen Lösungen der Potentialgleichung (1), welche nur von der Entfernung r des Punktes (x) von einem festen Punkt z. B. dem Nullpunkt abhängen, bis auf eine willkürliche multiplikative und willkürliche additive Konstante die Funktionen

$$(9) \qquad \begin{aligned} \gamma(r) &= \frac{}{\omega_n\,(n-2)}\, r^{2-,} & (n > 2) \\ \gamma(r) &= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}, & (n = 2) \end{aligned}$$

welche für $r = 0$ die sog. *charakteristische Singularität* aufweisen. Jede Lösung der Potentialgleichung in G, welche die Form

$$\psi(x_1, \ldots, x_n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n) = \gamma(r) + w \qquad \left(r = \sqrt{\sum (x_\nu - \xi_\nu)^2}\right)$$

hat, wobei w regulär ist, heißt eine *Grundlösung der Differentialgleichung,* und zwar mit einer Singularität im Punkte ξ, wobei ξ innerhalb G liegen soll.

Auch für die allgemeinere Differentialgleichung

$$\Delta u + c u = 0$$

bei konstantem c können wir leicht entsprechende Grundlösungen erhalten, indem wir nach Einführung von Polarkoordinaten Lösungen der Form $u = \psi(r)$ mit $r = \sqrt{\sum (x_\nu - \xi_\nu)^2}$ aufsuchen. Für ψ folgt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\psi'' + \frac{n-1}{r}\psi' + c\psi = 0, \tag{10}$$

die, indem wir $\psi(r) = \dfrac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}}\varphi(\sqrt{c}\,r)$ setzen, in die *Besselsche Differentialgleichung*

$$\varphi'' + \frac{1}{\varrho}\varphi' + \varphi - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{\varphi}{\varrho^2} = 0 \qquad (\varrho = \sqrt{c}\,r) \tag{11}$$

übergeht. Wir definieren die gesuchte Grundlösung ψ als die im Nullpunkt unendliche Lösung der Gleichung (11), z. B. für ungerades n:

$$\psi = \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} J_{-\frac{n-2}{2}}(\sqrt{c}\,r) \tag{12}$$

und für gerades n:

$$\psi = \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} N_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{c}\,r), \tag{13}$$

wobei N_ν die ν^{te} Neumannsche Funktion ist.

2. Potentiale von Massenbelegungen. Für $n = 3$ bedeutet das Grundpotential $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$ physikalisch das *Gravitationspotential* einer im Punkte ξ, η, ζ konzentrierten Masse 1 auf dem Punkt $P(x, y, z)$[1].

Ist eine Masse im ξ, η, ζ-Raume mit der Dichte $\mu(\xi, \eta, \zeta)$ ausgebreitet, so nennen wir das Integral

$$u(x, y, z) = \iiint_G \frac{\mu(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \qquad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\right) \tag{14}$$

erstreckt über das betreffende Gebiet G des ξ, η, ζ-Raumes, das *Potential einer räumlichen Massenbelegung der Dichte* μ im Gebiete G. Wenn der

[1] Das Wort Potential ist dabei im physikalischen Sinne gebraucht, nämlich als Größe, deren Gradient ein Kraftfeld liefert. Es wäre daher zur Präzisierung des mathematischen Sprachgebrauchs zweckmäßig, für Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung konsequent nicht das allgemeine Wort Potentialfunktionen, sondern die speziellere Bezeichnung harmonische Funktionen zu benutzen, obwohl tatsächlich der Begriff des Potentials auch in der Physik meistens mit der Laplaceschen Differentialgleichung verbunden ist.

Punkt P mit den Koordinaten x, y, z außerhalb G liegt, ist u, wie man durch Differentiation unter dem Integralzeichen unmittelbar erkennt, eine harmonische Funktion. Liegt der Punkt P im Gebiete G und ist μ dort stückweise stetig differenzierbar[1], so genügt, wie wir schon früher (vgl. Bd. I, S. 316, 2. Aufl.) erkannten, das Potential u einer Lösung der *Poissonschen Gleichung*

$$\Delta u = -4\pi\mu. \tag{15}$$

Im folgenden werden wir diese Tatsache von neuem beweisen und auch noch von anderen Seiten beleuchten.

Hier formulieren und beweisen wir zunächst den folgenden Satz: *Es sei $\mu(x, y, z)$ eine im Gebiet G absolut beschränkte und integrierbare Funktion. Dann ist das Potential* (14) *und seine Ableitungen überall gleichmäßig stetig; die Ableitungen können dabei durch Differentiation unter dem Integralzeichen gewonnen werden. Ist darüber hinaus μ im Gebiet G stetig differenzierbar, so sind auch die zweiten Ableitungen von u im Innern von G stetig und es gilt die Poissonsche Gleichung $\Delta u = -4\pi\mu$.*

Um zunächst den ersten Teil dieses Satzes zu beweisen, betrachten wir die Funktion

$$u_\delta(x, y, z) = \iiint_G \mu(\xi, \eta, \zeta)\, f_\delta(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{16}$$

wobei die Hilfsfunktion $f_\delta(r)$ sich von der Grundlösung $\frac{1}{r}$ nur in einer kleinen Kugel vom Radius δ um den Punkt $r = 0$ unterscheidet; im Innern dieser Kugel bleibe jedoch $f_\delta(r)$ im Gegensatz zu $\frac{1}{r}$ beschränkt und schließe sich auf der Kugeloberfläche stetig und stetig differenzierbar an $\frac{1}{r}$ an. Wir setzen z. B.

$$f_\delta(r) = \begin{array}{ll} \left(3 - \frac{r^2}{\delta^2}\right), & (r \leqq \delta) \\ & (r > \delta) \end{array} \tag{17}$$

[1] Es ist zweckmäßig, folgende Definition festzuhalten. Eine Kurve bzw. eine Fläche heißt *stückweise glatt*, wenn sie aus endlich vielen Bestandteilen zusammengesetzt ist, deren jeder kongruent einer Kurve bzw. einer Fläche ist, dargestellt durch eine Funktion

$$z = f(x_1 \ldots),$$

wobei f in einem entsprechenden Gebiet einschließlich des Randes stetig und mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehen ist. Besitzt f auch noch stetige Ableitungen zweiter Ordnung, so nennen wir die Kurve bzw. die Fläche *stückweise stetig gekrümmt*.

Eine Funktion heißt *stückweise stetig* in G, wenn sie in diesem Gebiet stetig ist, abgesehen von isolierten Punkten und stückweise glatten Kurven- bzw. Flächenstücken usw., welche in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von G nur in endlicher Anzahl vorhanden sein dürfen und längs welcher nur Unstetigkeiten erster Art (Sprünge) zugelassen sind. Sind die ersten Ableitungen der Funktion stückweise stetig in G, so heißt die Funktion in G *stückweise stetig differenzierbar*.

Aus der Ungleichung

$$(18)\qquad |u_\delta - u| \leqq 4\pi M \int_0^\delta \left(f_\delta + \frac{1}{r}\right) r^2\,dr = \frac{18\pi}{5} M\,\delta^2,$$

wobei M eine Schranke für $|\mu|$ bedeutet, folgt sofort, daß mit $\delta \to 0$ die Folge u_δ gleichmäßig für alle x, y, z gegen das Potential u konvergiert.

Die Differenzierbarkeit der Funktion $f_\delta(r) = g(x-\xi,\ y-\eta,\ z-\zeta)$ überträgt sich unmittelbar auf die Funktionen u_δ und zwar ist z. B.

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} = \iiint_G \mu \frac{\partial}{\partial x} f_\delta(r)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Es sei nun $\chi(x, y, z)$ definiert durch das konvergente Integral

$$(19)\qquad \chi = \iiint_G \mu \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

welches aus (14) durch formale Differentiation unter dem Integralzeichen entsteht. Dann ist

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi = \iiint_{K_\delta} \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(f_\delta - \frac{1}{r}\right) d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

und daher

$$(20)\qquad \left|\frac{\partial u_\delta}{\partial x} - \chi\right| \leqq 4\pi M \int_0^\delta \left(\left|\frac{\partial f_\delta}{\partial r}\right| + \frac{1}{r^2}\right) r^2\,dr = 5\pi M\,\delta,$$

d. h. die Folge $\frac{\partial u_\delta}{\partial x}$ konvergiert gleichmäßig für alle x, y, z gegen die Funktion $\chi(x, y, z)$. Aus bekannten Sätzen der Analysis folgt alsdann, daß χ stetig ist und daß $\chi = u_x$ gilt. In analoger Weise folgt die gleiche Tatsache für die Ableitungen u_y und u_z.

Die Existenz und Stetigkeit der zweiten Ableitungen von u ist ohne weitere Voraussetzungen über μ nicht gesichert. Ist jedoch μ in G stetig und stückweise stetig differenzierbar, so können wir das Integral

$$u_x = \iiint_G \mu \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = -\iiint_G \mu \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

durch partielle Integration, abgesehen von zusätzlichen Randgliedern, auf die Form

$$\iiint_G \frac{\mu_\xi}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

bringen und erkennen alsdann auf Grund des obigen Satzes Existenz und Stetigkeit auch der zweiten Ableitungen von u im Innern von G. Insbesondere folgt die Stetigkeit des Ausdrucks Δu und zwar ist, wie wir früher in Bd. I zeigten,

$$\Delta u = -4\pi\mu.$$

Bei $n = 2$ gelten natürlich ganz analoge Begriffsbildungen und Sätze für ein Belegungspotential

$$u(x, y) = \int\!\!\int \mu(\xi, \eta) \log \frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta$$

mit

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Neben diesen Potentialen von räumlicher bzw. flächenhafter Massenbelegung treten für $n = 3$ noch Potentiale von Massenbelegungen bzw. von sog. Doppelschichten auf Flächen sowie von linienhaften Belegungen auf; bei $n = 2$ Potentiale von einfachen und doppelten Belegungen längs Linien. Ein *Flächenpotential* einer Massenbelegung von der *Flächendichte* ϱ auf einer Fläche F mit dem Oberflächenelement do ist definiert durch ein Integral der Form

$$u = \int\!\!\int \frac{\varrho}{r}\, do. \tag{22}$$

Ein *Linienpotential* einer Belegung mit der *Liniendichte* τ längs einer Kurve C mit der Bogenlänge s ist definiert durch

$$u = \int_C \frac{\tau\, ds}{r} \tag{23}$$

bzw.

$$u = \int \tau \log \frac{1}{r}\, ds \tag{23'}$$

für $n = 2$.

Potentiale von *Doppelbelegungen* entstehen durch Superposition von Potentialen von *Dipolen* (vgl. Bd. I, Kap. VII, S. 446). Das *Potential eines einzelnen Dipols* ist gegeben durch

$$\frac{\quad}{\partial \nu}\,\frac{\quad}{r} \qquad \cos(\nu, r)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{1}{r} = -\frac{\cos(\nu, r)}{r},$$

wo $\frac{\partial}{\partial \nu}$ Differentiation nach irgendeiner Richtung des ξ, η, ζ-Raumes bzw. der ξ, η-Ebene bedeutet, und mit (ν, r) der Winkel zwischen dieser Richtung und dem Radiusvektor vom Punkte $P(x, y, z)$ zum Punkte $Q(\xi, \eta, \zeta)$ bzw. den entsprechenden Winkel für $n = 2$ bedeutet.

Ein *Doppelbelegungspotential* mit der Dichte σ auf einer Fläche F bzw. auf einer Kurve C ist dann gegeben durch Ausdrücke der Form

$$u(x, y, z) = \int\!\!\int \sigma \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{r}\, do \tag{24}$$

bzw.

$$u(x, y) = \int_C \sigma \frac{\partial}{\partial \nu} \log \frac{1}{r}\, ds, \tag{24'}$$

wobei jetzt $\frac{\partial}{\partial \nu}$ Differentiation in der als positiv festgelegten Richtung der Normalen der Fläche bzw. Kurve bedeutet.

3. Greensche Formeln und Anwendungen. Das wichtigste elementare Handwerkszeug für die Potentialtheorie sind die *Greenschen Formeln.* In einem dreidimensionalen Gebiete G mit dem Volumenelement dg und dem Rande Γ — den wir als stückweise glatt[1] annehmen — gelten zwischen zwei Funktionen u und v die folgenden beiden Greenschen Formeln

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} &\iiint_G (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\, dg + \iiint_G v \Delta u\, dg = \iint_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do \\ &\iiint_G (u \Delta v - v \Delta u)\, dg = \iint_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) do. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist für die erste Formel vorausgesetzt: Stetigkeit von u und v im abgeschlossenen Bereiche $G + \Gamma$, Stetigkeit der ersten Ableitungen von u und v in G, sowie dazu noch Stetigkeit der ersten Ableitungen von u auf Γ und der zweiten Ableitungen von u in G, während bei der zweiten Formel sowohl für u als auch für v Stetigkeit der ersten Ableitungen in $G + \Gamma$ und Stetigkeit der zweiten Ableitungen in G vorausgesetzt wird. Ferner wird die Existenz der Integrale über G vorausgesetzt.

Die genau entsprechenden Formeln gelten für $n = 2$.

Für $v = 1$ entsteht der *Gaußsche Integralsatz*

$$\iint_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do = 0, \tag{26}$$

d. h. *das Oberflächenintegral der normalen Ableitung einer im Innern von G regulären und in $G + \Gamma$ stetig differenzierbaren harmonischen Funktion besitzt den Wert Null.*

Eine unmittelbare Folgerung aus (26) ist der folgende Satz über Potentiale konstanter Doppelbelegungen:

Bei der konstanten Belegung $\sigma = 1$ ist das Dipolpotential eines Flächenstücks F absolut genommen gleich dem räumlichen Winkel, unter dem die Randkurve der Fläche von P aus erscheint. Insbesondere besitzt das Dipolpotential einer ein Gebiet G einschließenden Fläche — wenn $\frac{\partial}{\partial \nu}$

[1] Vgl. Anm. 1, auf S. 228.

Differentiation in Richtung der äußeren Normalen bedeutet — im Inneren der Fläche den konstanten Wert -4π *und außerhalb den Wert Null*[1].

Wir konstruieren zum Beweise den Kegel Ω, welcher von den von P nach der Randkurve C von F laufenden Strahlen erzeugt wird, und nehmen der Einfachheit halber an, daß die Fläche F und der zwischen P und C gelegene Teil des Kegelmantels ein einfach zusammenhängendes Gebiet G einschließen. Durch eine hinreichend kleine Kugelfläche K_ε vom Radius ε um P schneiden wir die Spitze des Kegels ab und verstehen unter G_ε das von F, Ω, K_ε begrenzte Gebiet, in welchem $u = \frac{1}{r}$ überall regulär ist. Aus (26) folgt

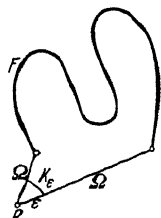



Abb. 17.

$$\iint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, do + \iint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, do + \iint \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, do = 0$$

und somit, weil auf Ω der Ausdruck $\frac{r}{\partial \nu}$ verschwindet und auf K_ε den konstanten Wert $-\frac{1}{\varepsilon^2}$ besitzt, unmittelbar die Behauptung (vgl. Abb. 17).

Für $n = 2$ besteht der analoge Satz: *Das Dipolpotential*

$$u(x, y) = \int \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, ds$$

eines Kurvenbogens C mit der konstanten Belegung $\sigma = 1$ ist gleich dem Winkel, unter dem die Randpunkte des Bogens von P aus erscheinen. Insbesondere ist $u = -2\pi$ im Innern und $u = 0$ im Äußern einer geschlossenen, ein Gebiet G einschließenden Kurve C.

Setzen wir in der ersten Formel (25) $v = u$, so entsteht die Identität

$$D[u] = \iiint\limits_G (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, dg = \iint\limits_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do, \tag{27}$$

gültig für jede in G reguläre harmonische Funktion u, deren Ableitungen in $G + \Gamma$ stetig sind. Diese Formel bleibt auch gültig, falls

[1] Das Vorzeichen dieses räumlichen Winkels bestimmt sich in eindeutiger Weise, wenn dem Flächenstück eine positive oder negative Seite zugeordnet ist, folgendermaßen: Der Kegel Ω bildet mit dem Flächenstück F ein geschlossenes Gebiet, das wir zunächst als einfach zusammenhängend annehmen wollen. Dann ist das Vorzeichen des räumlichen Winkels negativ, wenn die nach der positiven Seite von F weisende Normale aus dem Gebiet herausführt, andernfalls positiv. Im allgemeinen Fall denken wir F aus einer endlichen Anzahl von Flächenstücken zusammengesetzt, für deren jedes die obige Voraussetzung zutrifft, und erkennen dann, daß unser Dipolpotential gleich der Summe der entsprechenden räumlichen Winkel, genommen mit dem zugehörigen Vorzeichen, wird.

das Gebiet G den unendlich fernen Punkt enthält, vorausgesetzt, daß die harmonische Funktion auch dort regulär bleibt, d. h. vorausgesetzt, daß die Funktion

$$v = \frac{1}{r} u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$$

im Nullpunkt regulär ist. Das Integral $D[u]$, das sog. *Dirichletsche Integral*, spielt in der Potentialtheorie eine besonders wichtige Rolle. Es bildet, wie wir schon in Bd. I, S. 165 sahen, das Bindeglied zwischen der Potentialtheorie und der Variationsrechnung und wird für uns später (vgl. Kap. VII) in diesem Zusammenhange von ausschlaggebender Bedeutung werden.

Wir können schon jetzt aus Formel (27) die folgende Folgerung ziehen: *Es sei u eine in G reguläre harmonische Funktion, die in $G+\Gamma$ stetig und stetig differenzierbar ist. Verschwindet dann u auf Γ, so gilt $u \equiv 0$ in G. Verschwindet auf dem Rande die normale Ableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, so ist die Funktion u in G konstant.* In beiden Fällen folgt nämlich $D[u] = 0$, somit die Konstanz der Funktion u in G, und im ersten Fall muß die Konstante mit dem Randwert Null übereinstimmen.

Es sei G eine Kugel vom Radius R. Setzen wir $v = \frac{1}{r}$, wobei r der Abstand vom Mittelpunkt der Kugel ist, und wenden die zweite Formel (25) auf eine Kugelschale an, die zwischen einer willkürlich gewählten konzentrischen Kugel vom Radius $R_0 < R$ und der obigen Kugel gelegen ist, so folgt unter Berücksichtigung von (26)

$$\frac{1}{4\pi R_0^2}\iint_{\Gamma_0} u\, do = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Gamma} u\, do. \tag{28}$$

Lassen wir hier R_0 gegen Null konvergieren, so ergibt sich der *Mittelwertsatz*

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Gamma} u\, do. \tag{29}$$

Mit anderen Worten: *Der Wert einer harmonischen Funktion in einem Punkte ist gleich dem arithmetischen Mittel der Werte dieser Funktion auf der Oberfläche irgendeiner konzentrischen Kugel, innerhalb deren die Funktion überall regulär ist und stetige Randwerte besitzt.*

Wir können aus diesem Mittelwerttheorem wichtige Folgerungen ziehen.

Das Maximum und Minimum einer in einem Gebiete G regulären harmonischen und Γ noch stetigen Funktion u wird stets am Rande und nur für konstantes u auch im Innern angenommen.

Zum Beweise betrachten wir die Punktmenge F des abgeschlossenen Gebietes $G+\Gamma$, in der u gleich dem Maximum der Werte ist, die in $G+\Gamma$ angenommen werden können. Da u in $G+\Gamma$ stetig ist, so ist F

eine abgeschlossene Menge; würde nun F einen inneren Punkt P_0 von G enthalten, so existiert eine Schar von ganz in G gelegenen Kugeln um P_0, und der Mittelwert der Funktionswerte u auf jeder dieser Kugeln liefert wiederum der Wert $u(P_0) = M$. Dies ist wegen $u \leqq M$ aber nur möglich, wenn im Innern jeder ganz in G gelegenen Kugel um P_0 durchweg $u = M$ gilt. Mit jedem inneren Punkt P_0 von G enthielte also F zugleich jede Kugel um P_0, die ganz in G liegt, und dies ist nur möglich, wenn F mit $G + \Gamma$ zusammenfällt, wenn also u in $G + \Gamma$ konstant ist. Für in G nicht konstantes u kann somit F nur aus Randpunkten bestehen. In entsprechender Weise zeigt man, daß auch das Minimum m auf dem Rande und nur für konstantes u auch im Innern von G angenommen wird.

Aus diesem Satz vom Maximum und Minimum folgt sofort:

Eine in G reguläre harmonische und in $G + \Gamma$ stetige Funktion, die auf dem Rande konstant ist, ist im ganzen Gebiet konstant.

Insbesondere folgt der *Eindeutigkeitssatz:*

Zwei in G reguläre harmonische Funktionen, die in $G + \Gamma$ stetig sind und auf dem Rande übereinstimmen, sind in G identisch.

Denn die Differenz der beiden Funktionen ist selbst eine reguläre in $G + \Gamma$ stetige harmonische Funktion und verschwindet am Rande, ist also in G identisch Null.

Die Greenschen Formeln (25) erfahren eine wichtige Modifikation, wenn wir für v eine Funktion einsetzen, die in einem Punkte P die charakteristische Singularität der Potentialgleichung besitzt. Es sei P ein innerer Punkt von G mit den Koordinaten x, y, z. Wir setzen

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} + w(\xi, \eta, \zeta),$$

wobei $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ und w eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion in G sein möge, und wenden die Greenschen Formeln (25) auf ein Teilgebiet $G - K_\varepsilon$ von G an, welches durch Ausschneiden einer kleinen Kugel vom Radius ε um P als Mittelpunkt entsteht. Indem wir auf dieses Gebiet die Greenschen Formeln anwenden und sodann den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ausführen, erhalten wir in der bekannten einfachen Weise die folgenden Formeln

$$(30) \qquad \iiint\limits_G (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z)\, dg + \iiint\limits_G u \Delta w\, dg = p\, u + \iint\limits_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, do$$

$$(30') \qquad \iiint\limits_G (u \Delta w - v \Delta u)\, dg = p\, u + \iint\limits_\Gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) do.$$

Dabei ist $v = \frac{1}{r} + w$,

$$p = \begin{cases} 4\pi, & \text{wenn } P \text{ innerhalb } G, \\ 2\pi, & \text{wenn } P \text{ auf } \Gamma, \\ 0, & \text{wenn } P \text{ außerhalb } G \text{ liegt,} \end{cases}$$

und es ist, falls P auf Γ liegt, vorausgesetzt, daß Γ in P eine stetige Tangentialebene besitzt[1]. Ferner setzen wir über u und w, wie in (25), voraus: Existenz der Integrale über G, Stetigkeit von u und w in $G+\Gamma$, Stetigkeit der Ableitungen erster und zweiter Ordnung von u und w in G; sodann für (30) Stetigkeit der ersten Ableitungen von u in $G+\Gamma$, und endlich für (30′) Stetigkeit der ersten Ableitungen von u und w in $G+\Gamma$.

Für die Ebene besteht unter analogen Voraussetzungen ein analoges Formelsystem

$$(31)\qquad \iint\limits_G (u_x v_x + u_y v_y)\, do + \iint\limits_G u\,\Delta w\, do = p u + \int\limits_\Gamma u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds$$

$$(31')\qquad \iint\limits_G (u\Delta w - v\Delta u)\, do = p u + \int\limits_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds$$

mit $v = \log\frac{1}{r} + w$

$$p = \begin{cases} 2\pi, & \text{wenn } P \text{ innerhalb } G,\\ \pi, & \text{wenn } P \text{ auf } \Gamma,\\ 0, & \text{wenn } P \text{ außerhalb } G. \end{cases}$$

Setzen wir insbesondere $w = 0$, so gewinnen wir im Innern von G für u die Darstellung

$$(32)\qquad u = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\Delta u}{r}\, dg + \frac{1}{4\pi}\iint \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\, do - \frac{1}{4\pi}\iint u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, do.$$

Jede in $G+\Gamma$ zweimal stetig differenzierbare Funktion u kann als Potential einer Belegung aufgefaßt werden, die aus der räumlichen Belegung $-\frac{\Delta u}{4\pi}$ des Gebietes G, der Flächenbelegung $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial \nu}$ und der Dipolbelegung $-\frac{1}{4\pi}u$ der Randfläche Γ besteht.

Für eine harmonische Funktion u gilt speziell

$$(33)\qquad u = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_\Gamma \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\, do - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_\Gamma u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, do,$$

d. h. *jede in G reguläre harmonische und in $G+\Gamma$ stetig differenzierbare Funktion kann als Potential einer Belegung der Randfläche dargestellt werden, die aus der einfachen Belegung $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial \nu}$ und der Dipolbelegung $-\frac{1}{4\pi}u$ besteht.*

[1] Ist z. B. P ein konischer Eckpunkt des Randes, so ist an dieser Stelle für p anstatt 2π der Öffnungswinkel dieser konischen Ecke zu setzen.

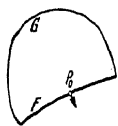
Aus den Formeln (30′) ergibt sich wiederum der Mittelwertsatz der Potentialtheorie. Denn wenden wir (30′) auf eine Kugel vom Radius R an und setzen $w = -\frac{1}{R} = \text{konst.}$, so verschwindet v auf der Oberfläche der Kugel und es folgt direkt die Relation (29).

Die Übertragung aller dieser Folgerungen für $n = 2$ und allgemeiner für beliebige Dimensionen sei als Aufgabe gestellt. Bei beliebigem n gelten dabei mit im übrigen gleichen Voraussetzungen über u, v und das Gebiet G die Greenschen Formeln

$$(34)\qquad \begin{aligned} &\iint\limits_G \cdots \int \left(\sum_{\varkappa=1}^{n} u_{x_\varkappa} v_{x_\varkappa} + v\,\Delta u\right) dg = \int\limits_\Gamma \cdots \int v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do \\ &\iint\limits_G \cdots \int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, dg = \int\limits_\Gamma \cdots \int \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) do \end{aligned}$$

und ferner die zu (30) analogen Formeln

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\iint\limits_G \cdots \int \left(\sum_{\varkappa=1}^{n} u_{x_\varkappa} v_{x_\varkappa} + u\,\Delta w\right) dg = p\,u + \int\limits_\Gamma \cdots \int u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, do \\ &\iint\limits_G \cdots \int (u\,\Delta w - v\,\Delta u)\, dg = p\,u + \int\limits_\Gamma \cdots \int \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) do. \end{aligned}$$

Dabei ist für $n > 2$ zu setzen

$$v = -\frac{1}{(n-2)\, r^{n-2}} + w$$

und

$$p = \begin{cases} \omega & \text{wenn } P \text{ in } G, \\ \frac{1}{2}\omega_n, & \text{wenn } P \text{ auf } \Gamma, \\ 0, & \text{wenn } P \text{ außerhalb } G \text{ liegt.} \end{cases}$$

Abb. 18.

Ferner bedeutet do das Oberflächenelement und $\frac{\partial}{\partial \nu}$ Differentiation in Richtung der äußeren Normalen auf Γ.

4. Die Ableitungen der Belegungspotentiale. In Nr. 2 haben wir gesehen, daß das Potential einer räumlichen Belegung stetig ist und stetige Ableitungen besitzt, wenn die Belegungsdichte beschränkt und integrierbar ist. Wir wollen nunmehr das *Stetigkeitsverhalten der Flächenpotentiale und Dipolpotentiale* bzw. ihrer Ableitungen beim Durchgang des Punktes $P(x, y, z)$ durch die Fläche F studieren, wobei wir keinen Wert darauf legen, die Sätze unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen zu beweisen. Wir benutzen folgende Methode[1]. Wir betrachten gemäß Abb. 18 einen Punkt P_0 auf einem Flächenstück F und fassen

[1] Unsere Methode ist verwandt mit einem Verfahren von ERHARD SCHMIDT; vgl. Math. Abh. HERMANN AMANDUS SCHWARZ gewidmet, S. 365. Berlin 1914.

dieses Flächenstück F als Teil der Berandung Γ eines räumlichen Gebietes G auf. In dieses Gebiet G hinein denken wir uns die Funktion ϱ bzw. σ, welche die Dichte der Belegung auf F darstellt, in hinreichend stetiger Weise fortgesetzt. Sodann wenden wir auf das Gebiet G und passende Funktionen u und v die Greenschen Formeln (30) und (30') an. Da es nur darauf ankommen wird, Unstetigkeiten der betrachteten Funktion zu studieren, so ist es zweckmäßig, in unseren Formeln Ausdrücke, welche beim Durchgang von P durch die Fläche F stetig bleiben, fortzulassen, indem wir für einen solchen Ausdruck die symbolische Schreibweise $\equiv 0$ („kongruent Null") gebrauchen. Das Gebiet G übrigens sei so gewählt, daß die positive Normale auf F nach außen weist.

Wir bemerken zunächst, daß, wie man fast unmittelbar sieht, das Potential einer einfachen Flächenbelegung beim Durchgang von P durch die Fläche F stetig bleibt. Somit werden wir nur das Verhalten des Doppelbelegungspotentials und seiner Ableitungen sowie der Ableitungen des einfachen Flächenpotentials zu studieren haben. Dabei werden wir zu folgendem Ergebnis gelangen, dessen Voraussetzungen übrigens — auch auf Grund der hier angewandten Methode — noch wesentlich gemildert werden können.

Wir nehmen an, daß in der Umgebung des Punktes P_0 die Fläche F stetig gekrümmt sei (vgl. Anm. 1 auf S. 228) und daß die Belegungsdichte auf dieser Fläche zweimal stetig differenzierbar ist. Dann gilt:

1. Der Wert des Dipolpotentials im Punkte P_0 erleidet beim Durchgang durch die Fläche F Sprünge gemäß den folgenden Formeln

$$(36)\qquad \begin{aligned} &\lim_{P_+ \to P_0} u(P_+) - u(P_0) = 2\pi\sigma(P_0) \\ &\lim_{P_- \to P_0} u(P_-) - u(P_0) = -2\pi\sigma(P_0). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet das Symbol $P_+ \to P_0$ Annäherungen von der positiven und $P_- \to P_0$ Annäherung von der negativen Flächenseite.

2. Die Ableitung des Dipolpotentials $u(P)$ in Richtung der Flächennormalen ändert sich stetig, wenn P die Fläche auf der Normalen in P_0 durchschneidet. Die tangentialen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$ jedoch, d. h. die Ableitungen senkrecht zur Normalen, erfahren sprunghafte Änderungen gemäß den Sprungrelationen

$$(37)\qquad \begin{aligned} &\lim_{P_+ \to P_0} \frac{\partial u(P_+)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = 2\pi \frac{\partial \sigma(P_0)}{\partial t} \\ &\lim_{P_- \to P_0} \frac{\partial u(P_-)}{\partial t} - \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} = -2\pi \frac{\partial \sigma(P_0)}{\partial t}. \end{aligned}$$

3. Das Potential einer einfachen Flächenbelegung ändert sich beim Durchgang durch P_0 stetig, ebenso seine tangentialen Ableitungen. Jedoch erleidet die normalen Ableitung einen Sprung von der Größe

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \frac{\partial u}{\partial \nu_+} + \frac{\partial u}{\partial \nu_-} = -4\pi \varrho (P_0). \tag{38}$$

Hierbei bedeutet $\frac{\partial}{\partial \nu_+}$ Differentiation in Richtung der positiven und $\frac{\partial}{\partial \nu_-}$ Differentiation in Richtung der negativen Flächennormalen in P_0.

Wir betrachten zunächst eine Doppelbelegung mit der Dichte σ, denken diese Dichte stetig differenzierbar als eine Funktion $\sigma(x, y, z)$ in $G + F$ fortgesetzt und schreiben die Greensche Formel (30) mit $w = \sigma$ unter Weglassung der stetig bleibenden Bestandteile in der Form

$$p\sigma + \iint \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} do \equiv -\iiint \left(\sigma_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\qquad}{\partial y} + \sigma_\zeta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right.$$

— alle Randintegrale, welche nicht von dem Bestandteil F herrühren, sind offenbar mit Bezug auf den Punkt P stetig und beliebig oft stetig differenzierbar. Da die rechte Seite dieser Formel gemäß unseren früheren Überlegungen von S. 229 stetig ist, so ergibt sich

$$p\sigma + \iint \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} \cdot do \equiv 0,$$

was die Aussage über das Verhalten des Dipolpotentials enthält.

Um unsere Aussage für die Ableitung des Dipolpotentials zu beweisen, denken wir uns die Randbelegung σ so zweimal stetig differenzierbar in G fortgesetzt, daß auf F die Normalenableitung $\frac{\partial \sigma}{\partial \nu}$ verschwindet und wenden dann die zweite Greensche Formel (30′) bzw. die aus ihr durch Differentiation nach den Koordinaten x, y, z entstehende Formel an, welche nunmehr so lautet:

$$p\,\sigma + \iint \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} do \equiv \iiint \frac{\Delta \sigma}{r} dg.$$

Da die rechte Seite stetig, d. h. $\equiv 0$ ist, ergibt sich zunächst noch einmal die Aussage über das Unstetigkeitsverhalten des Dipolpotentials selbst. Da zudem die rechte Seite noch stetige Ableitungen nach x, y, z besitzt, so folgt, daß die Ableitungen des Dipolpotentials dasselbe Unstetigkeitsverhalten wie die Ableitungen des Ausdruckes $-p\,\sigma$ besitzen, wie zu beweisen war.

In genau derselben Weise ergibt sich unsere Behauptung über die Ableitungen des Flächenpotentials, indem wir die Greensche Formel (30′) anwenden, darin nunmehr jedoch die Funktion w so wählen, daß längs der Fläche F diese Funktion identisch Null und die normale Ableitung $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ gleich der Dichte der Flächenbelegung ϱ wird.

Die Möglichkeit, unsere Randfunktionen in ein Gebiet G, welches an F anschließt, gemäß unseren obigen Forderungen fortzusetzen, ist auf Grund der getroffenen Stetigkeitsvoraussetzungen für F und die Randbelegungen leicht ersichtlich.

Analoge Sätze und Sprungrelationen bestehen für das Potential in der Ebene, mit dem Unterschied, daß in den Relationen (36) und (37) der Faktor 2π durch π und in (38) der Faktor 4π durch 2π zu ersetzen ist.

§ 2. Poissons Integral und Folgerungen.

1. Randwertaufgabe und Greensche Funktion. Schon in Bd. I, Kap. V, § 14 wurde diskutiert, in welcher Weise die Lösung der Randwertaufgabe mit Hilfe einer von den speziellen Randwerten bzw. der speziellen rechten Seite der Differentialgleichung unabhängigen *Greenschen Funktion* dargestellt werden kann. Es sei nochmals an die Zusammenhänge erinnert: Wir betrachten einen beschränkten Bereich G im $x_1, \ldots, x_n$-Raume mit dem Rande Γ, den wir als stückweise glatt[1] voraussetzen. Auf dem Rande seien stetige Randwerte vorgeschrieben durch Vorgabe einer im abgeschlossenen Bereiche $G+\Gamma$ stetigen und mit stetigen Ableitungen dritter Ordnung versehenen Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$; die betrachteten Randwerte sollen dann diejenigen Werte sein, welche f auf Γ annimmt. Die Randwertaufgabe der Potentialtheorie verlangt, eine in $G+\Gamma$ stetige und in G reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ zu finden, welche auf Γ mit f übereinstimmt. Der scheinbar spezielle Charakter dieser Randwertaufgabe ist unwesentlich, da man hinterher, wie wir in § 4 sehen werden, durch einen einfachen Grenzübergang sich von den einschränkenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über die Randwerte befreien kann. Die Randwertaufgabe läßt sich in eine etwas andere Form bringen, durch Einführung der Funktion $u - f = v$ statt u. Für die Funktion v haben wir dann die homogenen Randwerte Null auf Γ, dafür aber die unhomogene Differentialgleichung

$$\Delta v = -\Delta f.$$

Es sei nun Q ein fester innerer Punkt von G mit den Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ und $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein variabler Punkt von G, γ die auf S. 226 definierte Funktion. *Dann verstehen wir unter der Greenschen Funktion des Differentialausdrucks Δu für das Gebiet G eine noch von dem Parameterpunkt Q abhängige Grundlösung*

$$(1)\quad \begin{cases} K(P, Q) = K(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n) = \gamma(r) + w, \\ r = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + \cdots + (x_n-\xi_n)^2} \end{cases}$$

der Gleichung $\Delta u = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} = 0$, welche außer im Punkte $P = Q$ in G regulär und in $G+\Gamma$ stetig ist und die am Rande Γ verschwindet.

[1] Vgl. Anm. 1, S. 228.

Die Greensche Funktion ist in den Argumenten P und Q symmetrisch: $K(P, Q) = K(Q, P)$ (vgl. Bd. I, 2. Aufl., S. 315).

Da die Greensche Funktion auf Γ verschwindet und auf einer hinreichend kleinen Kugel um Q positiv ist, so folgt: *Die Greensche Funktion ist im Innern von G positiv.*

Wenn wir voraussetzen, daß K, außer im Punkte $P = Q$, in $G + \Gamma$ nicht nur stetig, sondern auch stetig differenzierbar, und ferner, daß auch v eine in $G + \Gamma$ stetige und stetig differenzierbare Lösung der Gleichung $\Delta v = -\Delta f$ ist, so folgt aus der Formel (35) in § 1 für v sofort die Darstellung

$$v = \int\int_G \cdots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, \Delta f\, d\xi_1 \ldots d\xi_n \tag{2}$$

und für die Lösung der ursprünglichen Randwertaufgabe

$$u = f + \int\int_G \cdots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, \Delta f\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \tag{3}$$

In diesen Formeln (2) und (3) wird die Lösung u nur scheinbar von den Werten der Funktion f im Innern von G beeinflußt. Denn durch Anwendung der Greenschen Formel erhalten wir leicht

$$\int\int_G \cdots \int K\, \Delta f\, d\xi_1 \ldots d\xi_n = -f - \int_\Gamma \cdots \int \frac{\partial K}{\partial \nu} f\, do$$

und somit

$$u = -\int_\Gamma \cdots \int \frac{\partial K}{\partial \nu} f\, do. \tag{4}$$

In dieser Formel aber treten nur die Randwerte von f auf.

Es ist jedoch für viele Zwecke vorteilhaft, die Darstellung der Lösung des Randwertproblems in der Form (3) beizubehalten. Denn es besteht umgekehrt der folgende, die verschärften Voraussetzungen über K und v nicht enthaltende Satz: *Ist $K(P, Q)$ die Greensche Funktion des beschränkten Gebietes G, so stellt in G bei stückweise stetig differenzierbarem g der Ausdruck*

$$v = \int\int_G \cdots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, g(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

eine in $G + \Gamma$ stetige, am Rande Γ verschwindende Lösung der Poissonschen Differentialgleichung

$$\Delta v = -g$$

dar.

Daß v in G der Differentialgleichung genügt, folgt unmittelbar aus der Integraldarstellung und aus der stückweise stetigen Differenzierbarkeit von G (vgl. § 1, S. 229). Um nachzuweisen, daß v am Rande verschwindet, genügt der bloße Hinweis auf das Verschwinden von K am Rande nicht, da K sich nicht gleichmäßig in Q dem Werte Null

nähert, wenn der Punkt P gegen den Rand strebt. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, machen wir von dem folgenden später in Nr. 2 zu beweisenden Hilfssatze Gebrauch: *Ist B ein Teilbereich von G mit einem Durchmesser kleiner als h, so gilt*

$$\iint_B \cdots \int K(x_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n < \varepsilon(h),$$

wo $\varepsilon(h)$ eine nur von h, nicht von der speziellen Wahl von B abhängige und mit h gegen Null strebende Schranke bedeutet. Nunmehr möge sich P in G dem Randpunkte R nähern. B_h sei derjenige Teilbereich von G, welcher im Kreise mit dem Radius h um R liegt, G' der übrige Bestandteil von G. Dann ist

$$v = \iint_{G'} \cdots \int K\, d\xi_1 \ldots d\xi_n + \iint_{B_h} \cdots \int K\, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Der vom Bereiche G' herrührende Bestandteil konvergiert offenbar gegen Null, wenn P gegen R strebt. Der Bestandteil $v_h = \iint_{B_h} \cdots \int K\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$ läßt sich unmittelbar abschätzen durch

$$|v_h| < M\,\varepsilon(h),$$

wenn M eine Schranke für $|g|$ ist. Also wird, wenn P hinreichend nahe an R liegt, $|v| < M\,\varepsilon(h)$, und somit ist wegen der Willkürlichkeit von h die Behauptung bewiesen.

Aus diesem Satze folgt alsdann vermöge (2) und (3) unmittelbar die Lösung u der Randwertaufgabe, falls K bekannt ist. D. h.: *Die Lösung des Randwertproblems bei allgemeinen vorgegebenen Randwerten ist äquivalent mit der Auffindung der Greenschen Funktion*, welche einem ganz speziellen, allerdings noch von dem Parameterpunkt Q abhängigen Randwertproblem entspricht.

2. Greensche Funktion für Kreis und Kugel. Das Poissonsche Integral für Kugel und Halbraum. Wir haben die Greensche Funktion für ein kreis- bzw. kugelförmiges Grundgebiet bereits in Bd. I konstruiert. Die dortigen Überlegungen lassen sich ohne Schwierigkeit auch für den n-dimensionalen Potentialausdruck durchführen. Es sei $\gamma = \psi(r)$ die Grundlösung der Differentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

in n Dimensionen:

$$\psi(r) = \frac{1}{\omega_n (n-2)} r^{2-n}, \qquad (n > 2)$$

$$(5) \qquad \psi(r) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}. \qquad (n = 2)$$

Dann wird die Greensche Funktion der Kugel vom Radius R sofort durch den Ausdruck

$$(6) \qquad K(x_1, \ldots, \xi_n) = \psi(r) - \psi\left(\frac{\varrho}{R} r_1\right)$$

gegeben, wobei $\varrho^2 = \sum \xi_\nu^2$, $r^2 = \sum (x_\nu - \xi_\nu)^2$ gesetzt ist und

$$r_1 = \sqrt{\sum \left(x_\nu - \frac{R^2}{\varrho^2}\xi_\nu\right)^2}$$

den Abstand des Punktes $x_1, \ldots, x_n$ von dem Spiegelbild

$$\frac{R^2}{\varrho^2}\xi_1, \ldots, \frac{R^2}{\varrho^2}\xi_n$$

zu dem Punkt $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bezeichnet. Diese Funktion erfüllt, wie man leicht sieht, alle Anforderungen, insbesondere verschwindet sie auf der Kugeloberfläche, da dort $r = \frac{\varrho}{R} r_1$ gilt.

Die Greensche Funktion für Kreis bzw. Kugel kann in folgender Weise als *Majorante für die Greenschen Funktionen beliebiger beschränkter Gebiete* G benutzt werden. Ist Q irgendein Punkt in G, und R eine so große Zahl, daß der Kreis mit dem Radius R um irgendeinen der Punkte von G das Gebiet $G + \Gamma$ ganz im Innern enthält, und bedeutet r den Abstand von Q, so ist $\psi(r) - \psi(R) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{R}{r}$ für $n = 2$ und $\psi(r) - \psi(R) = \frac{1}{\omega_n (n-2)}(r^{2-n} - R^{2-n})$ für $n > 2$ die Greensche Funktion des Kreises vom Radius R um Q mit Q als Singularität. Ist $K(P, Q)$ die Greensche Funktion von G mit Q als Singularität, so wird die Differenz $K - (\psi(r) - \psi(R))$ in G regulär und auf Γ nicht negativ; also ist in G überall

$$0 \leqq K \leqq \psi(r) - \psi(R).$$

Hieraus folgt leicht die in Nr. 1 benutzte Abschätzung für Teilgebiete B von G mit Durchmesser kleiner als h.

Mit Hilfe von (6) erhalten wir nun in dem Integral

$$u = -\iint \frac{\partial K}{\partial \nu} f\,do$$

über die Oberfläche der Kugel die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u = 0; \qquad (u = f \text{ auf } \Gamma$$

für die Kugel. Es ergibt sich nach leichter Rechnung

$$\frac{\partial K}{\partial \nu} = \psi'(r)\,\frac{R^2 - \varrho^2}{rR} \tag{7}$$

und somit für u die Integralformel

$$u = -\frac{R^2 - \varrho^2}{R}\iint \frac{\psi'(r)}{r} f\,do. \tag{8}$$

Denken wir uns f als Funktion der Koordinaten $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ auf der Einheitskugel gegeben und setzen für $\psi(r)$ die Werte (5) ein, so entsteht die *Poissonsche Integralformel*

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{R^{n-2}(R^2 - \varrho^2)}{\omega_n}\iint \frac{f\,d\omega_n}{(\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R\cos\vartheta)^{n/2}}. \tag{9}$$

Dabei ist das Integral über die n-dimensionale Einheitskugel zu erstrecken, $\varrho = \sqrt{x^2 + \cdots + x_n^2}$ und ϑ der Winkel zwischen dem Radiusvektor ϱ und dem zum Integrationspunkt $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ führenden Kugelradius.

Für $n = 2$ und $n = 3$ haben wir diese Formel bereits früher abgeleitet (vgl. Bd. I, S. 445 und Bd. II, S. 17).

Aus den obigen Betrachtungen folgt, daß die Lösung der Randwertaufgabe durch (9) gegeben wird, falls die Randwerte f durch die Werte einer in G stetigen, mit stetigen ersten und zweiten und stückweise stetigen dritten Ableitungen versehenen Funktionen f auf Γ festgelegt werden. Z. B. sind diese Voraussetzungen sicher für $f \equiv 1$ erfüllt; die Poissonsche Integralformel in Verbindung mit dem Eindeutigkeitssatze von § 1 besagt in diesem Falle, daß der im Innern der Kugel stets positive Kern

$$(10) \qquad H(P, Q) = \frac{R^2 - \varrho^2}{\omega_n r^n}, \quad r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \cdots + (x_n - \xi_n)^2},$$

nach $\xi_1, \ldots, \xi_n$ über die Kugelfläche vom Radius R integriert, den Wert 1 ergibt:

$$(11) \qquad \int\!\!\int H(P, Q)\, do = \frac{R^{n-2}(R^2 - \varrho^2)}{\omega_n} \int\!\!\int \frac{d\omega_n}{(\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos\Delta)^{n/2}} = 1.$$

Dieser Kern $H(P, Q)$ genügt übrigens im Innern der Kugel bei festem $Q(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in $P(x_1, \ldots, x_n)$ selber der Potentialgleichung, wie wir sofort erkennen, wenn wir ihn in der Form

$$\omega_n H = -\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{2}{n-2} \sum \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \frac{1}{r^{n-2}}$$

mit

$$r^2 = \sum (x_\nu - \xi_\nu)^2$$

schreiben. Auf der Kugeloberfläche selbst verschwindet H überall, abgesehen vom Punkte $P = Q$, wo er bei Annäherung von Innen über alle Grenzen wächst.

Von den einschränkenden Voraussetzungen über die Randwerte f können wir uns hier leicht befreien. Wir zeigen: *Die Poissonsche Integralformel löst die Randwertaufgabe, wenn wir von den Randwerten lediglich Stetigkeit auf der Kugeloberfläche verlangen.* Denn unter dieser Annahme können wir, falls P ein innerer Punkt der Kugel ist, in (9) beliebig oft und zwar unter dem Integralzeichen differenzieren; mit H genügt also auch u der Potentialgleichung. Es bleibt somit nur zu zeigen, daß bei Annäherung an den Rand u in die vorgeschriebenen Randwerte übergeht. Es sei P_1 ein willkürlicher Randpunkt und P ein nahegelegener Punkt im Innern (Abb. 19). Ist dann P_0 der auf dem durch P gehenden Radius gelegene Punkt der Kugeloberfläche, so folgt aus

$$|u(P) - f(P_1)| \leqq |u(P) - f(P_0)| + |f(P_0) - f(P_1)|$$

und aus der Stetigkeit der Randfunktion, daß es genügt, die Annahme

der Randwerte bei radialer Annäherung an Γ zu beweisen, d. h. zu zeigen, daß

$$(12) \qquad u(P)-f(P_0)=\iint H(P,Q)\,(f(Q)-f(P_0))\,do_Q$$

beliebig klein wird, falls P auf dem Radius durch P_0 gegen P konvergiert.

Zum Beweise teilen wir die Oberfläche durch eine beliebig kleine Kugel vom Radius δ um P_0 in zwei Gebiete Ω_1, Ω_2 und nehmen an, daß P bereits im Innern dieser kleinen Kugel liegt, daß also die Entfernung $h=(P,P_0)$ kleiner als δ ist. Ω_1 sei das Gebiet, welches den Punkt P_0 enthält. Gilt nun auf der Kugel $|f|\leqq M$ und auf Ω_1

Abb. 19.

$$|f(Q)-f(P_0)|\leqq\sigma(\delta),$$

so folgt aus (12) die Abschätzung

$$|u(P)-f(P_0)|\leqq 2M\iint_{\Omega_2} H\,do_Q + \sigma(\delta)\iint_{\Omega_1} H\,do_Q < 2M\iint_{\Omega_2} H\,do_Q+\sigma(\delta).$$

Nun ist in Ω_2, wie man leicht erkennt, der Kern H kleiner als der Ausdruck

$$\frac{R^2-\varrho^2}{\omega_n\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} \qquad \frac{2Rh}{\omega_n\left(\frac{\delta}{2}\right)^n}.$$

Es folgt also

$$|u(P)-f(P_0)|\leqq\frac{4MR^{n-1}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n}h+\sigma(\delta).$$

Wählen wir nun δ so klein, daß in Ω_1 überall $\sigma(\delta)<\frac{\varepsilon}{2}$ und sodann h derart, daß auch

$$\frac{4MR^{n-1}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n}h<\frac{\varepsilon}{2}$$

gilt, so wird $|u(P)-f(P_0)|<\varepsilon$; damit ist der Beweis geführt.

Eine entsprechende Integraldarstellung und entsprechende Resultate lassen sich gewinnen, wenn für G an Stelle einer Kugel ein Halbraum gewählt wird. Ist Γ die x, y-Ebene und G das Gebiet $z>0$, so löst das *Poissonsche Integral für den Halbraum*

$$(9') \qquad u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint\frac{f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}$$

die Randwertaufgabe für G bei beliebigen Randwerten $f(x,y)$, vorausgesetzt, daß nach Spiegelung der Ebene $z=0$ an einer außerhalb G

gelegenen Kugel (vgl. Nr. 1, S. 226) ein Randwertproblem mit stetigen Randwerten für das gespiegelte beschränkte Gebiet G' entsteht.

Allgemein besteht unter entsprechenden Voraussetzungen in n Dimensionen, wobei G das Gebiet $x_n > 0$ sei, die Integralformel

$$(9'') \quad u(x_1, \ldots, x_n) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1}}{((x_1-\xi_1)^2 + \cdots + (x_{n-1}-\xi_{n-1})^2 + x_n^2)^{n/2}}.$$

3. Folgerungen aus der Poissonschen Formel. Zunächst ist der Satz vom Maximum und Minimum sowie der Mittelwertsatz wiederum eine unmittelbare Folgerung der Poissonschen Darstellung, worauf wir nicht weiter einzugehen brauchen.

Der stets positive Kern H liegt für $\varrho < R$ zwischen den Werten

$$\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{R+\varrho}\right)^{n-2} \frac{R-\varrho}{R+\varrho}$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{R-\varrho}\right)^{n-2} \frac{R+\varrho}{R-\varrho}.$$

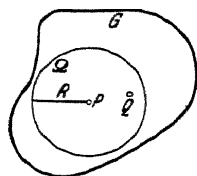



Abb. 20.

Es sei nun u eine in einem Gebiet G reguläre nicht negative harmonische Funktion (Abb. 20). Es sei ferner Ω eine ganz in G gelegene Kugel vom Radius R, P ihr Mittelpunkt und Q ein beliebiger innerer Punkt dieser Kugel. Dann folgt aus dem Poissonschen Integral und dem Mittelwertsatz die sog. *Harnacksche Ungleichung*

$$\left(\frac{R}{R+\varrho}\right)^{n-2} \frac{R-\varrho}{R+\varrho}\, u(P) \leqq u(Q) \leqq \left(\frac{R}{R-\varrho}\right)^{n-2} \frac{R+\varrho}{R-\varrho}\, u(P).$$

Wenn u in jedem beschränkten Gebiet des Raumes regulär ist, so können wir zu irgend zwei Punkten P und Q stets eine beliebig große Kugel wählen und erhalten aus der obigen Ungleichung im Limes $R \to \infty$ sofort $u(P) = u(Q)$, also *eine harmonische Funktion, die in jedem beschränkten Gebiet des Raumes regulär und positiv ist, ist eine Konstante.*

Natürlich gilt die gleiche Tatsache auch für jede nirgends positive und in jedem endlichen Gebiet reguläre Potentialfunktion und allgemeiner für jede in jedem endlichen Gebiet reguläre und nach einer Seite beschränkte Potentialfunktion: *Ist eine harmonische Funktion in jedem endlichen Gebiet des Raumes regulär und nach einer Seite beschränkt, so ist sie konstant.*

Eine weitere wichtige Folgerung aus der Poissonschen Integralformel ist der *analytische Charakter der harmonischen Funktionen:*

Jede in einem Gebiet G reguläre harmonische Funktion kann in der Umgebung jedes inneren Punktes von G in eine Potenzreihe entwickelt werden.

Wählen wir P zum Nullpunkt des Koordinatensystems, so gilt

$$(13) \qquad u = \sum Q_\nu(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei die Q_ν homogene Polynome vom Grade ν in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sind, die selbst der Potentialgleichung genügen.

Der Beweis ergibt sich leicht, indem wir u durch das Poissonsche Integral über eine Kugel vom Radius R um P ausdrücken, die ganz im Regularitätsgebiet gelegen ist, und alsdann den Kern

$$\frac{1-\frac{\varrho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\varrho}{R}\cos\vartheta+\frac{\varrho^2}{R^2}\right)^{n/2}}$$

in eine nach Potenzen von $\frac{\varrho}{R}$ fortschreitende Reihe entwickeln. Diese Reihe

$$\frac{1-\frac{\varrho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\varrho}{R}\cos\varDelta+\frac{\varrho^2}{R^2}\right)^{n/2}}=\sum^{\infty}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\nu}\psi_\nu(\cos\vartheta) \tag{14}$$

ist für alle $\varrho \leqq R-\delta$ konvergent und ihre Einzelglieder sind selbst harmonische Funktionen, nämlich gewisse homogene Polynome vom Grade ν in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$[1].

[1] Im Falle $n = 2$ ist

$$\psi_\nu(\cos\vartheta) = 2^\nu\, T_\nu(\cos\vartheta),$$

wobei (vgl. Bd. I, S. 76) $T_\nu(x)$ das ν^{te} *Tschebyscheffsche Polynom* bedeutet. Es folgt somit

$$\psi_\nu(\cos\vartheta) = 2\cos\nu\vartheta$$
$$\psi_0(\cos\vartheta) = 1$$

und

$$\frac{1-\frac{\varrho^2}{R^2}}{1-2\frac{\varrho}{R}\cos\vartheta+\frac{\varrho^2}{R^2}} = 1+2\sum^{\infty}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\nu}\cos\nu\vartheta.$$

Im Falle $n = 3$ ist (vgl. Bd. I, S. 74)

$$\psi_\nu(\cos\vartheta) = (2\nu+1)\,P_\nu(\cos\vartheta),$$

wobei $P_\nu(x)$ das ν^{te} *Legendresche Polynom* bedeutet. Hier ist

$$\frac{1-\frac{\varrho^2}{R^2}}{\left(1-2\frac{\varrho}{R}\cos\vartheta+\frac{\varrho^2}{R^2}\right)^{3/2}} = \sum^{\infty}(2\nu+1)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\nu}P_\nu(\cos\vartheta).$$

Dabei können wir bei Verwendung der Legendreschen Polynome höherer Ordnung $P_{\nu,h}(x)$ die Größen $P_\nu(\cos\vartheta)$ für $\nu > 0$ in der Form schreiben

$$\begin{aligned}(2\nu+1)\,P_\nu(\cos\vartheta) &= P_\nu(\cos\beta)\,P_\nu(\cos\beta') \\ &+ 2\sum_{h=1}^{\nu}\frac{(\nu-h)!}{(\nu+h)!}\cos h(\varphi-\varphi')\,P_{\nu,h}(\cos\beta)\,P_{\nu,h}(\cos\beta'),\end{aligned}$$

wenn $\cos\vartheta = \cos\beta\cos\beta' + \sin\beta\sin\beta'\cos(\varphi-\varphi')$ gesetzt ist.

Tragen wir diese Entwicklung in die Formel (9) ein, und führen die Integration gliedweise aus, so entsteht eine Reihe der Form (13), und zwar sind die Q_ν durch die Integrale

$$(15) \qquad Q_\nu = \frac{R^{n-2}}{\omega_n} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^\nu \int\int \psi_\nu(\cos\vartheta) f\, d\omega$$

gegeben, also wiederum durch homogene Polynome vom Grade ν, die selbst der Potentialgleichung genügen. Diese Potenzreihe ist alsdann in jeder Kugel $\varrho \leqq R - \delta$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Eine weitere Folgerung ist das *Spiegelungsprinzip: Wenn eine in einem Gebiet harmonische Funktion auf einem ebenen oder kugelförmigen Teil des Randes stetig die Werte Null annimmt, so läßt sich die Funktion durch Spiegelung über diesen Teil des Randes hinaus analytisch fortsetzen.* Zum Beweise dürfen wir uns auf ein ebenes bzw. geradliniges Randstück S beschränken, welches Rand eines halbkugel- bzw. halbkreisförmigen Gebietes H ist, in dem die harmonische Funktion u sich regulär verhält mit den Randwerten Null auf S. Durch Spiegelung der Halbkugel H an S und Spiegelung der Werte von u auf H in die entgegengesetzt gleichen Werte erhält man ein Kugel- bzw. Kreisgebiet K. Die durch diese Randwerte auf K bestimmte in K reguläre Potentialfunktion U stimmt auf H mit u überein und besitzt in spiegelbildlich zu S symmetrischen Punkten entgegengesetzt gleiche Werte, verschwindet also insbesondere auf S. Daher haben U und u auf dem Rande von H gleiche Werte und sind somit innerhalb H identisch, was unsere Behauptung bestätigt.

Eine weitere Anwendung ist der *Weierstraßsche Konvergenzsatz.*

Eine Folge von in G regulären und in $G + \Gamma$ stetigen Potentialfunktionen u_n, deren Randwerte f_n auf Γ gleichmäßig konvergieren, konvergiert auch im Innern gleichmäßig, und zwar gegen eine Potentialfunktion mit den Randwerten $f = \lim f_n$.

Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt direkt aus dem Satz vom Maximum und Minimum. Denn mit u_n ist auch die Differenz $u_n - u_m$ zweier Funktionen der Folge bei beliebigem n und m eine in G reguläre und in $G + \Gamma$ stetige Potentialfunktion und nimmt somit ihr Maximum und Minimum am Rande an. Für alle Punkte des abgeschlossenen Gebietes $G + \Gamma$ gilt also die Ungleichung

$$|u_n - u_m| \leqq \text{Max.}\, |f_n - f_m|,$$

woraus sofort die behauptete gleichmäßige Konvergenz in G und die Annahme der Randwerte $f = \lim f_n$ folgt. Daß die Grenzfunktion u in G der Potentialgleichung genügt, können wir aus dem Poissonschen Integral erkennen. In der Tat, sei K eine beliebige ganz in G gelegene Kugel vom Radius R und bezeichnen wir mit $\bar{u}_n$ bzw. $\bar{u}$ die Randwerte auf K, so gilt im Innern von K für jedes u_n und somit auch für u mit

den Randwerten u die Integralformel

$$u = \frac{R(R^2 - \varrho^2)}{4\pi} \iint \frac{\bar{u}\, d\omega}{(\varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos\vartheta)^{3/2}}$$

aus der sofort folgt, daß u in K Potentialfunktion ist. Ein weiterer sich hier unmittelbar ergebender Konvergenzsatz ist der *Satz von Harnack:*

Konvergiert eine nirgends abnehmende oder nirgends zunehmende Folge von in G regulären harmonischen Funktionen in einem einzigen Punkte von G, so konvergiert sie in allen Punkten von G, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen inneren Teilgebiet.

Wir beschränken uns hier und auch später auf drei bzw. zwei Dimensionen, ohne dadurch die Allgemeinheit der Schlüsse zu beeinträchtigen.

Es genügt, den Beweis für eine nirgends abnehmende Folge zu führen. Wir betrachten bei beliebigem m und $n > m$ die alsdann nicht negative Differenz $\varphi = u_n - u_m$ und beschreiben um den Konvergenzpunkt P eine noch ganz in G gelegene Kugel K_a vom Radius a. Ist Q irgendein anderer Punkt dieser Kugel und $\varrho < a$ sein Abstand vom Mittelpunkte P, so folgt aus der Harnackschen Ungleichung die Ungleichung

$$0 < \varphi(Q) < \frac{a+\varrho}{a-\varrho}\, \varphi(P), \tag{16}$$

aus der sich sofort die gleichmäßige Konvergenz der Folge u_n in jeder Kugel vom Radius $r \leqq a - \delta$ ergibt. Da sich nun jedes abgeschlossene innere Teilgebiet von G durch endlich viele ganz in G liegende Kugeln von geeignetem Radius $r < a$ überdecken läßt, so erkennen wir durch Fortsetzung unserer Schlußweise die obige Behauptung. Daß schließlich die Grenzfunktion in G Potentialfunktion ist, folgt aus dem Satz von WEIERSTRASS.

Von grundlegender Bedeutung ist der Satz:

Ist $\{u(x)\}$ eine in G gleichgradig beschränkte Menge von in G regulären Potentialfunktionen, d. h. gilt für alle u gleichzeitig

$$|u(x)| \leqq M,$$

so sind in jedem abgeschlossenen inneren Teilgebiet von G auch die Ableitungen $\{u_x\}$ und $\{u_y\}$ *gleichgradig beschränkt.*

Zum Beweise betrachten wir eine im Innern von G gelegene Kugel K vom Radius a, dem Mittelpunkt P und der Oberfläche O. Da mit u auch u_x Potentialfunktion ist, so gilt der Mittelwertsatz

$$u_x(P) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint u_x\, do$$

und der daraus leicht folgende Mittelwertsatz

$$u_x(P) = \frac{3}{4\pi a^3} \iiint\limits_K u_x \, dg$$

für das Kugelinnere (vgl. § 3).

Durch partielle Integration erhalten wir

$$u_x(P) = \frac{3}{4\pi a^3} \iint u \frac{\partial x}{\partial \nu} do$$

und daraus wegen $\left|\frac{\partial x}{\partial n}\right| \leqq 1$ und $|u| \leqq M$ die Abschätzung

$$(17) \qquad |u_x(P)| \leqq \frac{3M}{a}.$$

Ebenso gilt natürlich

$$(18) \qquad |u_y(P)| \leqq \frac{3M}{a}.$$

Es sei nun G_a ein abgeschlossenes Teilgebiet von G, dessen Punkte von Γ einen Abstand $> a$ besitzen; dann gelten für alle Punkte P von G_a die obigen Ungleichungen gleichzeitig, woraus die Aussage unseres Satzes unmittelbar folgt.

Eine direkte Konsequenz dieses Resultats ist der folgende *Auswahlsatz (Satz von der „Kompaktheit")*:

Aus einer gleichgradig beschränkten Menge von in G regulären Potentialfunktionen, läßt sich stets eine Teilfolge $u_n(x)$ auswählen, die in jedem abgeschlossenen inneren Teilgebiet G' von G gleichmäßig gegen eine Potentialfunktion konvergiert.

Denn infolge der gleichgradigen Beschränktheit auch der Ableitungen von u in jedem festen inneren abgeschlossenen Teilgebiet ist die Menge $\{u(x)\}$ dort gleichgradig stetig, womit die Auswahlmöglichkeit gesichert ist (vgl. hierzu Bd. I, 2. Aufl., Kap. II, § 2). Wiederum schließen wir aus dem Konvergenzsatz von WEIERSTRASS, daß die Grenzfunktion u in G Potentialfunktion ist. Insbesondere ergibt sich aus unseren Betrachtungen: *Konvergenz einer Folge von gleichmäßig beschränkten harmonischen Funktionen muß in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßige Konvergenz sein und daher im Limes wieder eine harmonische Funktion liefern.*

§ 3. Der Mittelwertsatz und Anwendungen.

1. Homogene und unhomogene Mittelwertgleichung. Wir haben bereits mehrfach den Mittelwertsatz der Potentialtheorie betrachtet:

Für jede in einem Gebiet G reguläre Potentialfunktion u ist der Mittelwert über eine beliebige ganz in G gelegene Kugeloberfläche Ω_R vom Radius R gleich dem Wert u_0 der Funktion im Mittelpunkte der Kugel:

$$(1) \qquad u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u \, d\Omega_R.$$

Aus (1) folgt unmittelbar ein entsprechender *Mittelwertsatz für das Kugelinnere*. Denn da (1) für alle R besteht, sofern nur die zugehörigen Kugelflächen nicht aus G herausragen, so ergibt sich nach Multiplikation mit R^2 und Integration in den Grenzen 0 und a

$$u_0 = \frac{3}{4\pi a^3} \iiint\limits_{K_a} u\, dg, \tag{2}$$

d. h., *der Mittelwert über das Innere einer ganz in G gelegenen Kugel ist gleich dem Wert u_0 im Mittelpunkte der Kugel.*

Auch für die Lösungen der unhomogenen Poissonschen Gleichung $\Delta u = -4\pi\mu$ besteht ein für beliebige Kugeln gültiges Mittelwerttheorem; wir gelangen zu ihm durch eine einfache Spezialisierung der in § 1, 3 abgeleiteten Greenschen Formel (30'). Wählen wir dort als Grundgebiet eine Kugel K_R mit dem Radius R um den Punkt P als Mittelpunkt und setzen

$$w = -\frac{1}{R}, \qquad \text{also} \qquad v = \frac{1}{r} - \frac{1}{R},$$

so entsteht die Identität

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R = u_0 + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{K_R} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \Delta u\, dg, \tag{3}$$

gültig für jede stetige, mit stetigen ersten und stückweise stetigen zweiten Ableitungen versehene Funktion $u(x, y, z)$. Für Lösungen der Poissonschen Gleichung folgt somit der Mittelwertsatz:

Jede in G reguläre Lösung der Gleichung $\Delta u = -4\pi\mu$ erfüllt für eine beliebige ganz in G gelegene Kugel K_R die Relation

$$u_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega_R + \iiint\limits_{K_R} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \mu\, dg. \tag{4}$$

Wie im Spezialfall $\mu \equiv 0$, so können wir auch hier durch Integration nach R zu einer Gleichung für das Kugelinnere gelangen; nach leichter Rechnung folgt

$$u_0 = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_{K_R} u\, dg + \frac{1}{2R^3} \iiint\limits_{K_R} \frac{(R-r)^2(2R+r)}{r} \mu\, dg. \tag{5}$$

Analoge Sätze bestehen in der Ebene:

Jede in G reguläre Lösung der Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = -2\pi\mu$ erfüllt für einen beliebigen ganz in G gelegenen Kreis K_R die Relationen

$$u_0 = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\Gamma_R} u\, ds + \iint\limits_{K_R} \mu \log\frac{R}{r}\, dg \tag{6}$$

$$u_0 = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K_R} u\, dg + \frac{1}{R^2} \iint\limits_{K_R} \left(R^2 \log\frac{R}{r} - \frac{R^2 - r^2}{2}\right) \mu\, dg. \tag{7}$$

Allgemein im n-dimensionalen Raum: *Jede in G reguläre Lösung der Gleichung $\Delta u = -\omega_n \mu$ erfüllt für eine beliebige ganz in G gelegene Kugel K_R die Relationen*

$$(6') \quad u_0 = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int \cdots \int_{\Omega} u \, d\Omega_R + \frac{1}{n-2} \int\int \cdots \int \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right) \mu \, d g$$

$$(7') \quad u_0 = \frac{\;}{\omega_n R^n} \int\int_{K_R} \cdots \int u \, d g - \omega_n \int\int \cdots \int \psi(r, R) \mu \, d g,$$

wobei in der letzten Gleichung

$$(7'') \quad \Psi(r, R) = \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) + \frac{1}{2 R^{n-2}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \right]$$

gesetzt ist.

Es sei bemerkt, daß wir die Gleichungen (5), (7) und (7′) auch unmittelbar aus den Greenschen Formeln (31), (34), (35) von § 1 gewinnen können, indem wir für v die Funktion

$$v = \gamma(r) - \gamma(R) + \frac{1}{2 R^n} (r^2 - R^2)$$

mit

$$\gamma(r) = \frac{1}{(n-2) r^{n-2}}$$

eintragen, die auf der Kugeloberfläche Ω_R nebst ihrer normalen Ableitung verschwindet und in K_R der Gleichung

$$\Delta v = \frac{n}{R^n}$$

genügt.

2. Die Umkehrung der Mittelwertsätze. Es besteht die bemerkenswerte Tatsache, daß die obigen Mittelwertsätze für die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungen charakteristisch sind. Wir beweisen zunächst die folgende *Umkehrung des Mittelwertsatzes der Potentialtheorie:*

Eine Funktion $u(x, y, z)$ sei in einem Gebiete G stetig und erfülle für jede ganz in G gelegene Kugel K_R die Mittelwertrelation

$$u_0 = \frac{1}{4 \pi R^2} \int\int_{\Omega_R} u \, d\Omega_R .$$

Dann ist u in G harmonische Funktion.

1. Zu einem einfachen Beweise gelangen wir vermöge der Poissonschen Integralformel (vgl. § 2, 2 Formel (9)), die uns die Lösung der Randwertaufgabe von $\Delta u = 0$ für die Kugel liefert. Denn zunächst folgt durch die gleiche Schlußweise wie in § 1, 3, daß in einem abgeschlossenen Teilgebiet G' von G das Maximum und Minimum der Funktion u in G' stets am Rande von G' angenommen wird, und daraus wiederum, daß es nur eine einzige Funktion u geben kann, die auf Γ' gegebene Randwerte besitzt und im Innern von G' die Mittelwertgleichung (1) erfüllt. Es sei nun G' eine ganz in G gelegene Kugel und v

die Potentialfunktion, die auf Γ' mit u übereinstimmt. Diese durch das Poissonsche Integral bestimmte Funktion besitzt aber als Potentialfunktion die Mittelwerteigenschaft (1) und muß somit nach der obigen Bemerkung mit u in G' identisch sein. Hieraus folgt, daß u im Innern jeder in G gelegenen Kugel und daher überall in G die Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt.

2. Auch ohne Benutzung der Poissonschen Integralformel läßt sich die Umkehrung des Mittelwertsatzes leicht direkt beweisen. Unter der Voraussetzung, daß u zweimal stetig in G differenzierbar ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus der Identität

$$\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega - u_0 = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)\Delta u\, dg.$$

Denn dividieren wir beide Seiten durch R^2 und lassen R gegen 0 konvergieren, so konvergiert die rechte Seite wegen der Stetigkeit von Δu gegen den Wert

$$\Delta u_0 \lim_{R\to 0}\frac{1}{4\pi R^2}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right) dg = \frac{1}{6}\Delta u_0,$$

die linke verschwindet nach Voraussetzung für alle R, d. h. es ist $\Delta u_0 = 0$. Unser Satz ist somit bewiesen, wenn wir nachweisen, daß u in G zweimal stetig differenzierbar ist.

Es sei K eine Kugel vom Radius a und G_a ein Teilgebiet von G, für dessen Punkte die umbeschriebene Kugel K jeweils noch ganz in G liegt. Die Relation (1) besteht dann in G_a gewiß für alle Kugeln vom Radius $R \leqq a$; multiplizieren wir bei festem Mittelpunkt (1) mit $R^2 f(R)$ wobei $f(R)$ eine integrierbare, aber sonst willkürliche Funktion sein kann und integrieren nach R von 0 bis a, so folgt

$$C u_0 = \iiint\limits_{K} f(r)\, u\, dg \tag{8}$$

mit $C = 4\pi\int\limits_0^a r^2 f(r)\, dr$.

Wählen wir sodann für f eine gerade, nur im Bereich $-a \leqq R \leqq a$ von Null verschiedene Funktion, die für alle R stetige Ableitungen bis zur N^{ten} Ordnung besitzt, und setzen $K(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, so können wir (8) in der Form

$$C u(x, y, z) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\, u(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{9}$$

als unendliches Integral schreiben. Da K beliebig oft differenzierbar gewählt werden kann, so folgt aus (9): Eine stetige Funktion u, die die Mittelwerteigenschaft (1) besitzt, ist im Innern von G beliebig oft stetig differenzierbar. Nach der Bemerkung am Anfang ist also u Potentialfunktion.

In dem hiermit bewiesenen Satz wird vorausgesetzt, daß die Mittelwerteigenschaft (1) für *jede* ganz in G gelegene Kugel erfüllt sei, wobei G ein beliebiges endliches oder unendliches Gebiet des Raumes sein kann. Machen wir jedoch hinsichtlich G die schärfere Voraussetzung, daß es sich um ein endliches und abgeschlossenes Gebiet handelt, so zeigt sich, daß die Mittelwerteigenschaft für *jede* Kugel als Voraussetzung unwesentlich ist. In der Tat gilt der folgende Satz:

Es sei G ein Raumgebiet, für welches die Randwertaufgabe der Gleichung $\Delta u = 0$ für beliebige stetige Randwerte lösbar sei. Eine Funktion u sei in $G + \Gamma$ stetig und erfülle in jedem inneren Punkt von G die Mittelwertgleichung

$$u_0 = \frac{1}{4\pi h^2} \iint\limits_{\Omega_h} u \, d\Omega \tag{10}$$

wenigstens für eine einzige ganz in $G + \Gamma$ gelegene Kugel vom Radius $h(P) > 0$ um P als Mittelpunkt. Dann ist u in G Potentialfunktion.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß h als Funktion von x, y, z im übrigen völlig willkürlich sein kann, also z. B. beliebig unstetig sein mag.

Der Beweis ergibt sich durch eine etwas andere Schlußweise, als wir im ersten Beweis des vorhergehenden Satzes angewandt haben. Wir betrachten die abgeschlossene Menge F derjenigen Punkte von G, in denen u gleich dem Maximum M ist. Im Punkte P_0 von F werde der kleinste Abstand der Punkte F von Γ angenommen. Wäre nun P_0 ein innerer Punkt von G, so gäbe es eine ganz in G gelegene Kugel vom Radius $h(P_0) > 0$ um P_0 als Mittelpunkt, für die die Mittelwertgleichung gilt und auf der infolgedessen $u = M$ sein müßte. Entgegen der Annahme würde es also Punkte von F geben, die näher an Γ liegen als P_0. Es folgt, daß P_0 auf Γ liegt. Ebenso erkennt man die Annahme des Minimums auf dem Rande und somit die eindeutige Bestimmtheit der Funktion u durch die Randwerte auf Γ. Ist nun v die Potentialfunktion, die auf Γ mit u übereinstimmt und als Potentialfunktion natürlich die Bedingung (10) erfüllt, so folgt $u \equiv v$ innerhalb G.

Die in unseren Umkehrungssätzen enthaltene Voraussetzung der Stetigkeit von u ist in den obigen Beweisen und deren Ergebnis nicht unwesentlich; jedenfalls können wir allgemein nicht erwarten, daß die Stetigkeit von u bereits in der Mittelwerteigenschaft enthalten ist, selbst dann nicht, wenn diese Eigenschaft für jede Kugel besteht. In der Tat lassen sich für $n = 1$, d. h. für die Gleichung

$$u(x) = \frac{1}{2h} \left(u(x+h) + u(x-h)\right) \tag{11}$$

nichtlineare unstetige Funktionen u konstruieren, die für beliebige x und h diese Gleichung erfüllen[1].

---

[1] Hamel: Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. Bd. 60 (1905) S. 459—462.

Wenn allgemeiner die Mittelwertseigenschaft nur für einen einzigen Radius $h(P)$ vorausgesetzt wird, so ist auch die Forderung, daß $G+\Gamma$ ein endliches abgeschlossenes Gebiet sei, wesentlich. Für ein unendliches Gebiet z. B. lassen sich bereits in dem Spezialfall $h=$ konst. $=l$ stetige nichtharmonische Funktionen angeben, die überall die Gleichung

$$u_0=\frac{1}{4\pi l^2}\iint u\,d\Omega \tag{12}$$

erfüllen. Nehmen wir z. B. an, daß u nur von x abhängt, so geht (12), wie man leicht erkennt, in die Integralgleichung

$$u(x)=\frac{1}{2l}\int\limits_{x-l}^{x+l}u(\xi)\,d\xi \tag{13}$$

über.

Durch den Ansatz $u(x)=e^{i\gamma x}$ erhalten wir spezielle Lösungen dieser Gleichung, wenn γ der transzendenten Gleichung

$$\frac{\sin\gamma l}{\gamma l}=1 \tag{14}$$

genügt. Außer der Lösung $\gamma=0$ besitzt diese Gleichung unendlich viel komplexe Wurzeln $\gamma=\alpha+i\beta$, dargestellt durch die Schnittpunkte der Kurven

$$\frac{\sin\alpha l}{\alpha l}=\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\beta l};\quad \cos\alpha l=\frac{\beta l}{\mathfrak{Sin}\,\beta l}$$

in der α,β-Ebene. Auch die reellen Funktionen $u=e^{-\beta x}\cos\alpha x$ und $u=e^{-\beta x}\sin\alpha x$ genügen alsdann der Gleichung (13); nur für $\alpha=\beta=0$ ergibt sich eine Potentialfunktion.

Die Voraussetzung, daß u im *abgeschlossenen* Gebiet G stetig sei, ist auch im Fall eines endlichen Gebietes G wesentlich. Ein einfaches Beispiel für eine nur im offenen Intervall stetige Funktion $u(x)$, die in jedem Punkte x des Gebietes die eindimensionale Mittelwertgleichung

$$u(x)=\frac{1}{2h}\left(u(x+h)+u(x-h)\right) \tag{15}$$

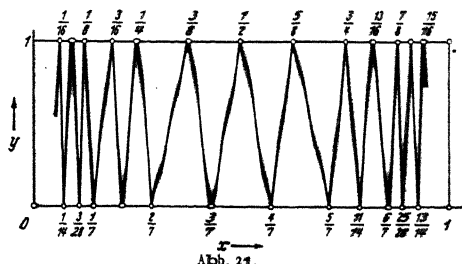
für ein zugehöriges $h(x)>0$ erfüllt und nicht linear ist, ist in Abb. 21 gekennzeichnet[1].

Diese Funktion ist im Intervall $0<x<1$ stetig, stückweise linear und läuft zickzackförmig zwischen den Geraden $y=0$ und $y=1$ hin und her. Die auf der oberen Geraden liegenden Spitzen mögen die Abszissen a_ν, die auf der unteren Geraden liegenden die Abszissen b_ν haben. Beide Folgen häufen sich in den Endpunkten $x=0$ und $x=1$. In der Umgebung jedes Intervallpunktes, der nicht mit einem der Punkte a_ν oder b_ν zusammenfällt, ist $u(x)$ linear und besitzt somit gewiß die Mittelwerteigenschaft (15) für ein bestimmtes $h(x)$ — sogar für

[1] Nach einer mündlichen Bemerkung von Herrn MAX SHIFFMAN.

unendlich viele h. Wählen wir nun die Folge a_ν so, daß zu jedem a_ν zwei Punkte $a_\alpha < a_\nu$ und $a_\beta > a_\nu$ existieren, für welche $a_\nu = \frac{1}{2}(a_\alpha + a_\beta)$ gilt, so erfüllt $u(x)$ auch in den oberen Spitzen die Relation (15), und zwar mit $h(a_\nu) = a_\beta - a_\nu = a_\nu - a_\alpha$. Wählen wir ferner b_ν in der gleichen Weise, jedoch so, daß b_ν mit a_μ für kein ν und μ zusammenfällt und so, daß in jedes Intervall zwischen zwei benachbarten a_ν genau ein b_μ fällt, so entsteht in der in Abb. 21 gekennzeichneten Weise eine für $0 < x < 1$ stetige Funktion $u(x)$, die die Eigenschaft (15) besitzt und doch nicht linear ist.

Abb. 21.

Die Konstruktion zweier Folgen a_ν und b_ν der geschilderten Art ist aber in mannigfacher Weise möglich, z. B. wie in Abb. 21 durch die symmetrisch zu $x = \frac{1}{2}$ gelegenen Punkte mit den Abszissen

$$a = \begin{matrix} \frac{1}{2^\nu}, & \frac{\quad}{2^{\nu+2}} \\ 1 - \frac{1}{\quad}, & 1 - \frac{\quad}{{}^{\nu+2}} \end{matrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

auf $y = 1$ und durch die ebenfalls zu $x = \frac{1}{2}$ symmetrischen Punkte

$$b = \begin{matrix} \frac{1}{7}\frac{1}{2^\nu} & \frac{2}{7 \cdot 2^\nu} \\ 1 - \frac{1}{7}\frac{1}{2^\nu} & 1 - \frac{3}{7}\frac{1}{2^\nu} \end{matrix} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

auf der Geraden $y = 0$.

Auch der allgemeine Mittelwertsatz für die unhomogene Poissonsche Gleichung läßt eine Umkehrung zu:

Es sei u eine stetige und μ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion in G. Für jede in G liegende Kugel K gelte die Gleichung

$$(16) \qquad u_0 = \frac{1}{4\pi R^2}\iint_\Omega u\, d\Omega + \iiint_K \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\mu\, dg$$

oder die äquivalente integrierte Gleichung (5). *Dann genügt u in G der Poissonschen Gleichung $\Delta u = -4\pi\mu$.*

Wir bemerken zunächst, daß, falls μ in G lediglich stetig ist, das durch R^2 dividierte Raumintegral in (16) mit $R \to 0$ gegen den Wert

$$\mu_0 \lim_{R \to 0} \frac{4\pi}{R^2}\int^R \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) r^2\, dr = \frac{4\pi}{6}\mu_0$$

konvergiert; infolgedessen muß auch der Grenzwert

$$\Theta(u_0) = \lim_{R \to 0} \frac{6}{R^2} \left\{ \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\Omega_R} u \, d\Omega - u_0 \right\} \tag{17}$$

überall in G existieren, und zwar gilt

$$\Theta(u_0) = -4\pi\mu_0 . \tag{18}$$

Wenn u zweimal stetig differenzierbar ist, so ist, wie wir früher auf S. 252 bereits bemerkten,

$$(u) = \Delta u . \tag{19}$$

Unser Satz ist also bewiesen, falls wir u als zweimal stetig differenzierbar nachweisen können. Wir zeigen allgemein: *Ist u in G stetig und μ in G stückweise stetig differenzierbar und genügt u für jede in G liegende Kugel K der Mittelwertgleichung* (4) *bzw.* (5), *so ist u in G zweimal stetig differenzierbar.* Zum Beweise dieser Tatsache verfahren wir ähnlich wie im Spezialfalle $\mu = 0$. Wir wählen wiederum eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $f(R)$, multiplizieren die im Gebiete G_a für einen festen Punkt P gebildete Gleichung (16) mit $4\pi R^2 f(R)$ und integrieren in den Grenzen 0 und a. Nach leichter Rechnung folgt

$$C u = \iiint_K u f(r) \, dg + \iiint \mu F(r) \, dg \tag{20}$$

mit

$$C = 4\pi \int_0 r^2 f(r) \, dr$$

und

$$F(r) = 4\pi \int_r^a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) R^2 f(R) \, dR = \frac{C}{r} - \frac{4\pi}{r} \int_0^r R^2 f(R) \, dR - 4\pi \int_r^a R f(R) \, dR .$$

Setzen wir wieder

$$K(x, y, z) = f(r), \qquad (r \leqq a)$$

$$= 0, \qquad (r \geqq a)$$

und ferner

$$H(x, y, z) = \frac{4\pi}{r} \int^r R^2 f(R) \, dR + 4\pi \int^a R f(R) \, dR, \qquad (r \leqq a)$$

$$\frac{C}{r} \qquad (r \geqq a)$$

so können wir durch geeignete Wahl von $f(R)$ erreichen, daß K und H überall stetige Ableitungen bis zur N^{ten} Ordnung besitzen. Wir erhalten dann für u die Darstellung

$$(21)\quad Cu=\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\, u(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$
$$-\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} H(x-\xi, y-\eta, z-\zeta)\, \mu(\xi,\eta,\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + C\iiint\limits_{G} \frac{\mu}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Die beiden ersten Integrale rechts besitzen Ableitungen bis zur N^{ten} Ordnung, das dritte Integral ist das Potential der stetigen Raumbelegung μ und ist nach dem Resultat von § 3,1 in G zweimal stetig differenzierbar. Somit ist die Funktion u selbst in G_a zweimal stetig differenzierbar und genügt nach der Bemerkung am Anfang dort der Gleichung $\Delta u = -4\pi\mu$. Da a beliebig klein gewählt werden kann, so gilt diese Tatsache überall im Innern von G.

Die entsprechenden Umkehrungssätze gelten im n-dimensionalen Raum und folgen unmittelbar aus dem ähnlich wie oben zu beweisenden Satz: *Ist u in G stetig und μ in G stückweise stetig differenzierbar und genügt u für jede in G liegende Kugel K den Gleichungen* (6′) *oder* (7′) *bzw.* (6) *oder* (7), *so ist u in G zweimal stetig differenzierbar.*

3. Die Poissonsche Gleichung für Potentiale von Raumbelegungen. Wir können den zuletzt bewiesenen Umkehrungssatz benutzen, um dem Beweis für die *Poissonsche Gleichung* $\Delta u = -4\pi\mu$, falls u das Potential einer Massenbelegung μ von G ist, eine neue Wendung zu geben und die Aussagen zu verschärfen.

Es sei $\mu(x, y, z)$ eine in G stückweise stetige Funktion und

$$(22)\qquad u=\iiint\limits_{G} \frac{\mu}{r}\, dg$$

das Potential der Massenbelegung μ. Wir denken uns für den Augenblick außerhalb G die Belegung μ durch $\mu = 0$ fortgesetzt. Es sei ferner P_0 ein beliebiger Punkt des Raumes und K eine beliebige Kugel vom Radius R um P_0 als Mittelpunkt.

Da u überall stetig ist, können wir über das Kugelinnere integrieren und übrigens die Integration unter dem Integralzeichen in (22) ausführen. Es ergibt sich

$$\iiint\limits_{K} u\, dg = \iiint\limits_{G} \mu(\xi,\eta,\zeta)\, F(r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

wobei $F(r) = \iiint\limits_{K} \frac{dg}{r}$ das Potential der mit der Masse 1 gleichmäßig belegten Kugel K ist, also

$$(23)\qquad \begin{aligned} F(r) &= \frac{4\pi}{3}\,\frac{R^3}{r}, && (r \geqq R) \\ &= 2\pi\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right). && (r \leqq R) \end{aligned}$$

Setzen wir die Werte (23) ein, so folgt

$$(24)\quad \iiint\limits_K u\,dg = \frac{4\pi}{3} R^3 \iiint\limits_{G^*} \frac{\mu}{r}\,dg + 2\pi \iiint\limits_K \left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right)\mu\,dg\,.$$

G^* ist das von K nicht überdeckte Teilgebiet von G. Wegen

$$\iiint\limits_{G^*} \frac{\mu}{r}\,dg = u - \iiint\limits_K \frac{\mu}{r}\,dg$$

erhalten wir die Gleichung

$$\frac{4\pi}{3} R^3 u = \iiint\limits_K u\,dg - 2\pi \iiint\limits_K \left(R^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{R^3}{r}\right)\mu\,dg$$

oder

$$u = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_K u\,dg + \frac{1}{2R^3} \iiint\limits_K \frac{(R-r)^2\,(2R+r)}{r}\,\mu\,dg\,,$$

d. h. gerade die Mittelwertgleichung (5).

Das Potential einer stückweise stetigen Massenbelegung erfüllt für jede Kugel die Mittelwertgleichung (5) *und daher auch die äquivalente Gleichung* (4).

Mit Rücksicht auf das Resultat am Schluß von Nr. 2 folgt sodann:

Ist μ in G stetig, so existiert für das Potential (22) *überall in G der Ausdruck*

$$\Theta(u) = \lim_{R\to 0} \frac{6}{R^2}\left\{\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega - u_0\right\},$$

und zwar gilt

$$(25)\qquad \Theta(u) = -4\pi\mu\,.$$

Ist μ in G stückweise stetig differenzierbar, so ist $\Theta(u) = \Delta u$ und somit $\Delta u = -4\pi\mu$.

4. Mittelwertsätze für andere elliptische Differentialgleichungen. Die Mittelwertsätze für die Laplacesche und Poissonsche Gleichung ließen sich unmittelbar aus der Identität

$$(26)\qquad \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega = u_0 + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{K_R}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\Delta u\,dg$$

ablesen, welche für jede stetige, mit stetigen ersten und stückweise stetigen zweiten Ableitungen versehene Funktion u besteht. Wir können statt dieser Identität leicht eine allgemeinere gewinnen, die zu einer Taylorschen Entwicklung des Mittelwertes

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\,d\Omega$$

als Funktion von R bei festem Mittelpunkt P_0 führt.

Wir gehen aus von der Greenschen Formel

$$(27)\qquad C\,u_0 = \iiint\limits_K (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dg\,,$$

wobei K eine beliebige Kugel vom Radius R um P_0 ist, v die Form

$$v(r) = \frac{C}{4\pi r} + w(r) \tag{27'}$$

mit zweimal stetig differenzierbarem $w(r)$ für $r \leq R$ besitzt und endlich auf der Oberfläche Ω_R der Kugel

$$v = \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \tag{27''}$$

gilt; für u kann jede zweimal stetig differenzierbare Funktion genommen werden.

Wir setzen voraus, daß u in $K + \Omega_R$ stetige Ableitungen bis zur $2m + 2^{\text{ten}}$ Ordnung besitzt und verstehen unter $\Delta^\nu u$ den ν-fach iterierten Laplaceschen Differentialausdruck, also z. B. $\Delta^1 u = \Delta u$, $\Delta^2 u = \Delta\Delta u$ usw. Für alle $\nu \leqq m$ gilt alsdann die Identität

$$C\Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K (\Delta^\nu u \Delta v - v\Delta^{\nu+1} u)\, dg. \tag{28}$$

Es sei ferner $v_1, v_2, \ldots$ eine Folge von Funktionen der obigen Art, definiert durch die Differentialgleichungen

$$\Delta v_{\nu+1} = v''_{\nu+1} + \frac{2}{r} v'_{\nu+1} = v_\nu \tag{29}$$

und die Randbedingungen (27'') sowie durch die Anfangsfunktion

$$v_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{R-r}{Rr}. \tag{30}$$

Man bestätigt leicht, daß sich als Lösungen dieses Rekursionssystems die Funktionen

$$v_\nu = \frac{1}{4\pi(2\nu+1)!}\frac{(R-r)^{2\nu+1}}{Rr} \tag{31}$$

ergeben, die alle die Form (27') mit $C_\nu = \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}$ besitzen.

Ersetzen wir sodann v in (28) durch v_ν, so folgt

$$C_\nu \Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K (v_{\nu-1}\Delta^\nu u - v_\nu \Delta^{\nu+1} u)\, dg \tag{32}$$

und daraus, wenn wir die für $\nu = 1, 2, \ldots, m$ aufgeschriebenen Gleichungen summieren:

$$\sum_{\nu=1}^{m} C_\nu \Delta^\nu u_0 = \iiint\limits_K (v_0 \Delta u - v_m \Delta^{m+1} u)\, dg.$$

Unter Berücksichtigung von (26) und (31) erhalten wir also

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{\Omega_R} u\, d\Omega = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!}\Delta^\nu u_0 \\ - \frac{1}{4\pi(2m+1)!}\iiint\limits_{K_R} \frac{(R-r)^{2m+1}}{Rr}\Delta^{m+1} u\, dg, \end{aligned} \tag{33}$$

eine Identität, die für jede in G $2m+2$mal stetig differenzierbare Funktion u und jede in G gelegene Kugel K gültig ist[1].

Wenn u in G beliebig oft differenzierbar ist und das Restglied mit wachsendem m gegen Null konvergiert, so entsteht aus (33) die unendliche Reihe

$$M(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\Omega_R} u \, d\Omega = \sum_0 \frac{R^{2\nu}}{(2\nu+1)!} \Delta^\nu u_0. \tag{34}$$

Dies ist z. B. der Fall, wenn $\Delta^m u$ von einem bestimmten m an identisch in G verschwindet; dann bricht die Entwicklung (34) mit $\nu = m-1$ ab:

Jede in G reguläre, d. h. mit stetigen Ableitungen bis zur $2m^{ten}$ Ordnung versehene Lösung der Differentialgleichung $\Delta^m u = 0$ erfüllt in einer beliebigen in G gelegenen Kugel die Mittelwertgleichung

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint u \, d\Omega = \sum^{m-1} \frac{\Delta^\nu u_0}{(2\nu+1)!} R^{2\nu}. \tag{35}$$

Beispielsweise gilt für Lösungen der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ das Mittelwerttheorem:

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint u \, d\Omega = u_0 + \frac{R^2}{6} \Delta u_0. \tag{36}$$

Zu einer weiteren Anwendung gelangen wir für Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + cu = 0$. Denn hier ist

$$\Delta^\nu u = (-1)^\nu c^\nu u$$

und somit, da das Restglied wegen $\Delta^{m+1} u = (-1)^{m+1} c^{m+1} u$ mit wachsendem m gegen Null konvergiert,

$$M(R) = u_0 \sum^{\infty} \frac{(-1)^\nu c^\nu}{(2\nu+1)!} R^{2\nu} = u_0 \frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}$$

Für jede in G reguläre Lösung der Gleichung $\Delta u + cu = 0$ besteht die Mittelwertgleichung

$$\frac{1}{4\pi R^2} \iint u \, d\Omega = u_0 \frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}, \tag{37}$$

gültig für eine beliebige Kugel in G.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich in der Ebene und allgemein im n-dimensionalen Raume durchführen.

[1] Vgl. hierzu P. PIZETTI: Sulla media dei valori che una funzioni dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera. Rendiconti Lincei (5) Bd. 18 (1909) S. 309—316.

In der Ebene erhalten wir so die Identität

$$(38)\qquad M(R)=\frac{1}{2\pi R}\int_{\Omega} u\,ds=\sum_{0}^{m}\left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu}\frac{\Delta^{\nu}u_0}{(\nu!)^2}+\iint_K v_m\,\Delta^{m+1}u\,dg\,,$$

wobei v_m aus der Rekursionsformel

$$(38')\qquad \begin{aligned} v_{\nu+1}&=\int^{R}\varrho\,v_\nu(\varrho)\log\frac{\varrho}{r}\,d\varrho\\ v_0&=\frac{1}{2\pi}\log\frac{R}{r}\end{aligned}$$

zu bestimmen ist.

Im n-dimensionalen Raume gilt

$$(39)\qquad M(R)=\frac{1}{\Omega}\iint_{\Omega} u\,d\Omega=\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{m}\left(\frac{R}{2}\right)^{2\nu}\frac{\Delta^{\nu}u_0}{\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)}+\iiint_K v_m\,\Delta^{m+1}u\,dg$$

mit dem Rekursionssystem für $v_m(r)$:

$$(39')\qquad \begin{aligned} v_{\nu+1}&=\frac{1}{(n-2)\,r^{n-2}}\int^{R}\varrho\,v_\nu(\varrho)\,(\varrho^{n-2}-r^{n-2})\,d\varrho\\ v_0&=\frac{1}{(n-2)\,\omega_n}\left(\frac{1}{r^{n-2}}-\frac{1}{R^{n-2}}\right).\end{aligned}$$

Wie vorhin folgt aus diesen Formeln der folgende Satz: *Jede in G reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta u+cu=0$ erfüllt in einer beliebigen Kugel in G die Mittelwertgleichung*

$$(40)\qquad \frac{1}{\Omega}\iint u\,d\Omega=u_0\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)J_{\frac{n-2}{2}}(R\sqrt{c})}{\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}=u_0\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\left(\frac{R\sqrt{c}}{2}\right)^{\nu}}{\nu!\,\Gamma\left(\nu+\frac{n}{2}\right)}$$

Dabei ist $J_\nu(x)$ die ν^{te} Besselsche Funktion.

In der Ebene gilt speziell

$$(41)\qquad \frac{1}{2\pi R^2}\int u\,ds=u_0\,J_0\,(R\sqrt{c})\,.$$

Für ungerade n ist der Faktor $p(R)$ von u_0 ausdrückbar durch die Ableitungen der Funktion $\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}$, und zwar gilt (vgl. Bd. I, Kap. VII, S. 423)

$$p(R)=\frac{(-1)^{\frac{n-3}{2}}\,2^{n-2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\;\frac{d^{\frac{n-3}{2}}}{d(R^2c)^{\frac{n-3}{2}}}\;\frac{\sin R\sqrt{c}}{R\sqrt{c}}$$

§ 4. Die Randwertaufgabe.

1. Vorbemerkungen. Stetige Abhängigkeit von den Randwerten und vom Gebiet. Wir gehen nunmehr zur Lösung der *Randwertaufgabe* über. Die *eindeutige Bestimmtheit* dieser Lösung, d. h. den Satz: Es gibt höchstens eine in G reguläre harmonische Funktion, die auf Γ vorgeschriebene stetige Randwerte f annimmt, haben wir bereits früher bewiesen. Ebenso haben wir gesehen, daß die Lösung der Randwertaufgabe *stetig von den Randwerten* abhängt: *Ist f_ν eine Folge von stetigen Randbelegungen, die auf Γ gleichmäßig gegen f konvergiert, so konvergiert die Folge der zugehörigen Lösungen u_ν im Innern von G gegen eine Potentialfunktion u mit den Randwerten f.* Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Konvergenzsätzen von § 2, 3. Es genügt also die Lösbarkeit der Randwertaufgabe z. B. für solche Randwerte f zu beweisen, welche durch die Werte eines Polynoms in $x_1, \ldots, x_n$ auf Γ festgelegt werden. Denn dann kann durch Grenzübergang die Randwertaufgabe für beliebige stetige Randwerte gelöst werden. Gemäß den Überlegungen von § 2, 1 ist es somit zur Lösung der Randwertaufgabe ausreichend, die *Greensche Funktion* K zu konstruieren.

Wir beschränken uns bei der Konstruktion auf die Dimensionen $n = 2$ und $n = 3$. Das Resultat wird sein:

Die Greensche Funktion läßt sich im Falle $n = 2$ konstruieren für jedes Gebiet G, begrenzt von einer endlichen Anzahl von stetigen Kurven Γ, so daß jeder Punkt von Γ Endpunkt einer geradlinigen Strecke ist, welche im übrigen ganz außerhalb G liegt.

Im Falle $n = 3$ läßt sich die Greensche Funktion konstruieren für jedes Gebiet G, begrenzt von einer endlichen Anzahl von stetigen Flächen Γ, so daß jeder Punkt von Γ Eckpunkt eines im übrigen ganz außerhalb von G liegenden Tetraeders ist.

In Kapitel VII werden wir alsdann die Randwertaufgabe erneut, und zwar unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen und unter anderen Gesichtspunkten behandeln.

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf ein beschränktes Gebiet G. Für ein nicht beschränktes Gebiet G erhalten wir alsdann die Greensche Funktion, indem wir zunächst durch Spiegelung an einem geeigneten Kreis bzw. einer Kugel das Gebiet G in ein beschränktes Gebiet G' verwandeln. Auf Grund des Satzes von § 1, S. 225 ergibt sich dann aus der Greeenschen Funktion für G' sofort die Greensche Funktion für G.

Auch die Konstruktion der Greenschen Funktion für ein Gebiet von mehr oder weniger allgemeiner Gestalt können wir erheblich vereinfachen, indem wir die *Abhängigkeit der Greenschen Funktion vom Gebiete G* untersuchen und eine entsprechende Stetigkeitsaussage beweisen. Wir betrachten eine monoton gegen G konvergierende Folge von Gebieten G_ν derart, daß jedes G_ν das vorhergehende Gebiet $G_{\nu-1}$ als Teilgebiet enthält und ferner

jeder feste innere Punkt von G von einem gewissen ν an in allen G_ν liegt. Dann gilt der folgende Satz:

a) Besitzt jedes Gebiet G_ν eine Greensche Funktion K_ν und das Grenzgebiet G die Greensche Funktion K, so konvergiert die Folge K_ν in $G+\Gamma$ gleichmäßig gegen K[1].

Von größerer Bedeutung ist jedoch eine allgemeinere Konvergenzaussage für den Fall, daß die Existenz der Greenschen Funktion für das Grenzgebiet G nicht von vornherein bekannt ist, so daß wir alsdann diese Greensche Funktion K durch einen entsprechenden Grenzübergang konstruieren können. Dies gelingt auf Grund der folgenden Verfeinerung des Satzes a).

b) Wenn die Gebietsfolge G_ν wie oben monoton gegen G konvergiert und zu jedem G_ν die zugehörige Greensche Funktion K_ν existiert, so konvergiert die Folge K_ν im Innern von G gegen eine Grenzfunktion

$$K = \lim K_\nu.$$

Diese Grenzfunktion K ist die Greensche Funktion des Gebietes G unter folgenden Voraussetzungen:

Im Falle von zwei Dimensionen: *Es gibt zu jedem Randpunkt P von G eine endliche geradlinige Strecke, welche in P endigt und außerhalb G liegt*[2].

Im Falle von drei Dimensionen: *Es gibt zu jedem Randpunkt P von G ein außerhalb G gelegenes Tetraeder* (das beliebig spitz sein mag), *mit einer Spitze in P.*

Zum Beweise der beiden obigen Sätze gehen wir von folgender Bemerkung aus. Die Funktionen K_ν und gleichfalls die durch Subtraktion der Singularitätenfunktion γ entstehenden in G_ν regulären harmonischen Funktionen $K_\nu - \gamma$ bilden eine monotone Folge. Denn sei ν so groß, daß der gewählte Singularitätenpunkt Q in G_ν liegt, dann sind für $\mu > \nu$ die Randwerte der in G_ν regulären Potentialfunktionen $K_\mu - K_\nu$ auf Γ_ν und somit diese Funktionen in G_ν nicht negativ. Ferner gilt aus demselben Grunde im Falle a)

$$K_\nu \leqq K, \quad \text{also auch} \quad K_\nu - \gamma \leqq K - \gamma.$$

Im Falle b) gibt es zum mindesten eine Kugel, welche ganz außerhalb G liegt. Ist K^* die Greensche Funktion für das Außengebiet dieser

---

[1] In dem nicht zu G_ν gehörigen Teil von G denke man sich K_ν etwa durch $K_\nu \equiv 0$ fortgesetzt.

[2] Es sei bemerkt, daß im Falle $n = 2$ die folgenden Überlegungen leicht auf den allgemeineren Fall ausgedehnt werden können, daß sich in P an Stelle einer geradlinigen Strecke ein Polygonzug anlegen läßt, welcher aus endlich oder abzählbar vielen Strecken besteht, so daß also mit anderen Worten die Randkurve Γ eine beliebige Jordankurve sein kann. Da jedoch in Kap. VII die Randwertaufgabe auf andere Weise direkt für eine solche allgemeine Begrenzung durchgeführt wird, sei diese Verallgemeinerung hier übergangen.

Kugel und Q als Singularität, so gilt nunmehr

$$K_\nu \leqq K^* \quad \text{und} \quad K_\nu - \gamma \leqq K^* - \gamma\,,$$

d. h. in beiden Fällen ist die monoton wachsende Folge $K_\nu - \gamma$ beschränkt und infolgedessen in G konvergent; nach dem Konvergenzsatze von § 2,3 ist die Grenzfunktion $H = \lim K_\nu$ in G harmonisch. Natürlich gilt $H \geqq 0$ und wegen $K_\nu \leqq K$ im Falle a) auch $H \leqq K$. Da aber K die Randwerte Null besitzt, so gilt das gleiche für die Grenzfunktion H, d. h. im Falle a) ist $H = K$, die Greensche Funktion des Grenzgebietes G.

Um Satz b) zu beweisen, nehmen wir als Resultat der Überlegungen von Nr. 2 vorweg, daß wir die Greensche Funktion für das Außengebiet einer geradlinigen Strecke in der Ebene und für das Außengebiet eines Tetraeders im Raume konstruieren können. Es sei nun K^* die Greensche Funktion einer solchen Strecke (bzw. eines solchen Tetraeders), die in der in b) formulierten Weise in einem Randpunkt P_0 von G angelegt werden kann. Unsere obigen Überlegungen liefern unmittelbar für jeden Punkt von G:

$$0 \leqq H(P) \leqq K^*(P)\,,$$

woraus wegen $K^*(P_0) = 0$ genau wie früher folgt, daß in P_0 der Randwert $H(P_0) = 0$ angenommen wird. Gemäß unseren Voraussetzungen besitzt also H überall die Randwerte Null und ist daher die Greensche Funktion des Grenzgebietes G.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß die obigen Resultate und Überlegungen keineswegs auf einfach zusammenhängende Gebiete beschränkt sind, sondern sich ohne wesentliche Veränderung auf *mehrfach zusammenhängende Gebiete* übertragen.

Wir werden nunmehr in der nächsten Nummer die Konstruktion der Greenschen Funktion K für verhältnismäßig spezielle Gebiete $G_\nu = G$ durchführen, mit denen wir jedoch hinreichend allgemeine Gebiete monoton approximieren können. Auf Grund unserer Ergebnisse folgt daraus die Existenz der Greenschen Funktion auch für die approximierten Gebiete. Wir benutzen zu diesem Zweck das *alternierende Verfahren von* H. A. SCHWARZ.

2. Lösung der Randwertaufgabe mit Hilfe des alternierenden Verfahrens. Das alternierende Verfahren ist ein einfacher konvergenter Prozeß, welcher erlaubt, die Randwertaufgabe für ein Gebiet B zu lösen, wenn dieses Gebiet die Vereinigungsmenge von zwei Gebieten G und G' (oder auch von endlich vielen solchen Gebieten) ist, für welche wir die Lösbarkeit des Randwertproblems bei beliebigen stetigen Randwerten schon voraussetzen dürfen. Dabei nehmen wir an, daß die Begrenzung von G und G' sich aus endlich vielen Bestandteilen mit stetiger Tangente bzw. stetiger Tangentialebene zusammensetzt. Wir setzen ferner voraus, daß sich die Ränder von G und G' gegenseitig unter einem

von Null verschiedenen Winkel, und zwar nicht in Eckpunkten bzw. längs Kanten von Γ oder Γ' schneiden. Da wir beispielsweise die Randwertaufgabe für Kreise und Halbebenen, bzw. Kugeln und Halbräume durch das Poissonsche Integral lösen können, so erlaubt das alternierende Verfahren unmittelbar die Lösung für Gebiete, welche Vereinigungsmengen von endlich vielen Kreisen, Halbebenen, bzw. Kugeln und Halbräumen sind, die sich teilweise überdecken. Die Bildung der Vereinigungsmengen B wird durch die beiden nachstehenden Abb. 22 und 23 erläutert, von denen die zweite zeigt, wie man durch Vereinigung von einfach zusammenhängenden Gebieten auch zweifach zusammenhängende Gebiete erhalten und dementsprechend die Randwertwerte auch für solche Gebiete lösen kann.

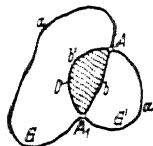



Abb. 22.

Da für das Verfahren kein wesentlicher Unterschied besteht, ob die Überdeckung über einem oder mehreren getrennten Gebieten erfolgt, stellen wir die Betrachtung an dem in Abb. 23 dargestellten Fall an, wo G und G' nur ein einziges gemeinsames Gebiet D besitzen. Der Rand Γ von G sei aus den Bestandteilen a und b zusammengesetzt, wobei b in G' liegt und a der zu b komplementäre Teil von Γ ist; entsprechend sei a' und b' für das Gebiet G' definiert. Wir nehmen an, daß auf dem Rande $a + a' = A$ von B stetige Randwerte vorgegeben sind, die absolut genommen unterhalb einer Schranke M liegen.

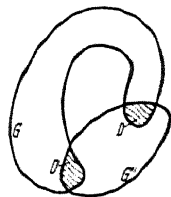



Abb. 23.

1. Das alternierende Verfahren besteht nun in folgendem Prozeß. Wir ergänzen die auf a gegebenen Randwerte in stetiger Weise durch willkürliche, absolut unterhalb M gelegene Werte auf b und lösen mit den so auf Γ definierten stetigen Randwerten die Randwertaufgabe für G; die Lösung u_1 besitzt auf b' Werte, welche mit den auf a' vorgegebenen Werten zusammen eine stetige Randwertverteilung auf Γ' liefert. Mit diesen Randwerten lösen wir die Randwertaufgabe für G' und erhalten eine Funktion u_1'. Diese ihrerseits besitzt auf b Werte, welche wiederum mit den Randwerten auf a eine stetige Randwertbelegung von G bildet. Die Lösung der entsprechenden Randwertaufgabe sei u_2. Indem wir so alternierend fortfahren, gelangen wir zu einer Folge von Potentialfunktionen $u_1, u_2, \ldots$ in G und zu einer entsprechenden Folge u_1', $u_2', \ldots$ in G'. Allgemein gilt dabei

$$\text{auf } b'\colon \quad u_\nu' = u_\nu, \qquad \text{also} \quad u_{\nu+1} - u_\nu = u_{\nu+1}' - u_\nu'$$
$$\text{und auf } b\colon \quad u_\nu' = u_{\nu+1}, \qquad \text{also} \quad u_{\nu+1} - u_\nu = u_\nu' - u_{\nu-1}'.$$

Wir behaupten nunmehr: Die Funktionen u_ν in G und u_ν' in G' konvergieren gleichmäßig gegen Potentialfunktionen u und u', welche in

dem gemeinsamen Gebiet D identisch sind. Diese Grenzfunktionen definieren eine im ganzen Gebiet reguläre Potentialfunktion, die das Randwertproblem für B löst.

Der Beweis beruht auf dem folgenden *Hilfssatz: Es sei unter den obigen Voraussetzungen über G und G' die Funktion v eine in G reguläre harmonische Funktion, welche auf a verschwindet und auf b der Ungleichung*

$$0 \leqq |v| \leqq 1$$

genügt. Dann gibt es eine feste positive Konstante $q < 1$, *die nur von der Konfiguration der Gebiete G und G' abhängt, so daß längs b' überall die Ungleichung*

$$|v| \leqq q$$

besteht. Entsprechendes gilt natürlich auch für G', und wir können für q eine beiden Gebieten gemeinsame Konstante wählen.

Indem wir den Beweis dieses Hilfssatzes an das Ende dieser Nummer verschieben, können wir nun leicht den Konvergenzbeweis für das alternierende Verfahren zu Ende führen. Wir bezeichnen mit M_ν das Maximum von $|u_{\nu+1} - u_\nu| = |u'_{\nu+1} - u'_\nu|$ auf b' und mit M'_ν entsprechend das Maximum von $|u_{\nu+1} - u_\nu| = |u'_\nu - u'_{\nu-1}|$ auf b. Identifizieren wir die Funktion v unseres Hilfssatzes für G mit $\frac{u_{\nu+1} - u_\nu}{M'_\nu}$, so folgt sofort

$$M_\nu \leqq q\, M'_\nu .$$

Ebenso finden wir

$$M'_\nu \leqq q M_{\nu-1}$$

und daher

$$M_\nu \leqq q^2 M_{\nu-1} .$$

Also konvergieren die Größen M_ν bzw. M'_ν gegen Null, und zwar nicht schlechter als die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem festen Koeffizienten $q^2 < 1$.

Hieraus folgt aber sofort die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$u_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u_{\nu+1} - u_\nu) = \lim_{n \to \infty} u_n = u$$

in $G + \Gamma$ und der entsprechenden Reihe

$$u'_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (u'_{\nu+1} - u'_\nu) = \lim_{n \to \infty} u'_n = u'$$

in $G' + \Gamma'$. u und u' sind demgemäß in G bzw. G' Potentialfunktionen, welche auf a bzw. a' die dort vorgeschriebenen Randwerte haben. Für das gemeinsame Gebiet D, das von b und b' begrenzt wird, gilt auf b' stets $u'_\nu - u_\nu = 0$, während auf b diese Differenz $u'_\nu - u_\nu = u'_\nu - u'_{\nu-1}$ gleichmäßig gegen Null strebt. Also stimmen die Grenzfunktionen u und u' in D überein und definieren zusammen eine in B regulär harmonische Funktion, welche die Randwertaufgabe löst.

Wenn wir unser Verfahren endlich oft wiederholen, so erhalten wir den folgenden Satz: *Ist G die Vereinigungsmenge einer endlichen Anzahl von Gebieten $G_1, \ldots, G_n$, die sich teilweise überdecken, und deren stückweise glatte Ränder sich nirgends berühren, so läßt sich die Randwertaufgabe für G lösen, falls sie für jedes G_ν einzeln gelöst werden kann.*

Insbesondere erkennen wir die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für jedes Gebiet, welches sich mit endlich vielen Kreisen oder Halbebenen bzw. Kugeln oder Halbräumen überdecken läßt. Ist z. B. G die ganze Ebene mit Ausnahme einer geradlinigen Strecke $0 \leqq x \leqq 1$, so können wir dieses Gebiet als Vereinigungsmenge der vier Halbebenen

$$x < 0,\ x > 1,\ y < 0,\ y > 0$$

auffassen und für jede dieser Halbebenen die Randwertaufgabe einzeln durch das Poissonsche Integral lösen. Das alternierende Verfahren liefert dann unmittelbar die Lösung für G. Im dreidimensionalen Raume gilt dasselbe für das Außengebiet eines Tetraeders, welches als Vereinigungsmenge von vier Halbräumen aufgefaßt werden kann.

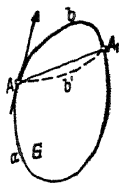
Abb. 24.

Beachten wir nun, daß jedes beliebige Gebiet als Grenzgebiet einer monoton wachsenden Gebietsfolge G_ν erhalten werden kann, deren jedes aus einer endlichen Anzahl von Kreisen bzw. Kugeln besteht, so erkennen wir unter Berücksichtigung von Satz b aus Nr. 1 den allgemeinen Satz:

In der Ebene existiert die Greensche Funktion und daher die Lösung der Randwertaufgabe für jedes Gebiet G, bei dem sich jeder Randpunkt von außen her durch eine geradlinige Strecke erreichen läßt. Im Raume gilt das gleiche für alle Gebiete G, für die jeder Randpunkt Eckpunkt eines im übrigen außerhalb G gelegenen Tetraeders ist [1].

2. *Beweis des Hilfssatzes.* Zum Beweise des Hilfssatzes betrachten wir zunächst den Fall von zwei Dimensionen (Abb. 24). Wir bilden das Potential einer Doppelbelegung des Bogens b mit der Dichte 1, d. h. den Ausdruck

$$w(P) = w(x, y) = \int \frac{\partial \log r}{\partial \nu} ds,$$

welcher den Winkel darstellt, unter dem der Bogen von P aus erscheint. Diese im Innern von G reguläre harmonische Funktion hat im Innern

[1] Beiläufig sei bemerkt, daß das geschilderte alternierende Verfahren, durchgeführt an mehreren Gebieten, die unter ständiger Wiederholung zyklisch durchlaufen werden, im wesentlichen mit dem von POINCARÉ betrachteten *Balayageverfahren* identisch ist. Der Unterschied gegen das Balayageverfahren besteht lediglich darin, daß von POINCARÉ sofort abzählbar viele Kreise oder Kugeln zugrunde gelegt werden, die in einer bestimmten Reihenfolge unter ständiger Wiederholung durchlaufen werden. Das hier gegebene Beweisverfahren allerdings ist von dem üblichen Beweis der Balayagemethode verschieden.

der Randbogen a und b stetige Randwerte. Nähert sich ein Randpunkt auf dem Bogen a dem Bogenendpunkt A, so streben die zugehörigen Randwerte w gegen einen Grenzwert R_{A_-}, welcher gleich dem Winkel zwischen der Sekante AA_1 und der nach b weisenden Tangente in A ist. Der entsprechende Grenzwert R_{A_+} der Randwerte auf b ist dagegen gleich dem Winkel zwischen AA_1 und der anderen nach a weisenden Richtung der Tangente in A, d. h. es gilt die Relation

$$R_{A_+} - R_{A_-} = \pi.$$

Nähert man sich vom Gebietsinnern dem Randpunkt A auf irgendeinem Strahl, der mit der nach b weisenden Tangente in A den Winkel α einschließt, so erhält man als Grenzwert die lineare Kombination

$$\frac{\alpha}{\pi} R_{A_+} + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) R_{A_-}.$$

Hieraus erkennen wir schließlich, daß für eine beliebige gegen A konvergierende Punktfolge P_ν in G die zugehörigen Funktionswerte $w(P_\nu)$ nur Häufungswerte besitzen können, die zwischen R_{A_+} und R_{A_-} gelegen sind. Entsprechende Tatsachen gelten natürlich für den anderen Bogenendpunkt A_1.

Nunmehr betrachten wir eine Randbelegung ϱ, welche auf b den konstanten Wert π besitzt und auf a verschwindet. Sind $\overline{w}$ die Randwerte von w, so bestimmt die Differenz $\overline{w} - \varrho$ stetige Randwerte auf $\Gamma = a + b$, zu denen nach Voraussetzung eine in G reguläre harmonische Funktion Ω gehört. Infolgedessen ist die Funktion

$$S(P) = \frac{w - \Omega}{\pi}$$

eine in G beschränkte und im Innern reguläre harmonische Funktion, die auf a die Randwerte Null und auf b die Randwerte 1 besitzt. Auf Grund der vorangehenden Betrachtungen über w erkennen wir, daß S bei Annäherung an A oder A_1 vom Gebietsinnern stets nur Häufungswerte zwischen 0 und 1 besitzen kann und daß sich bei Annäherung unter dem obigen Winkel α der Randwert $\frac{\alpha}{\pi}$, also ein Wert kleiner als 1 ergibt.

Ist nunmehr b' der in A und A_1 unter den Winkeln α und α_1 endigende Randbogen des Gebietes G', so gilt überall auf b' die Ungleichung

$$S \leqq q < 1.$$

Denn andernfalls gäbe es dort eine Punktfolge P_ν mit $S(P_\nu) \to 1$. Diese Punktfolge kann sich — wie wir genau wie beim Beweis des Satzes vom Maximum und Minimum erkennen — im Innern von b' nirgends häufen. Ein Häufungspunkt in A oder A_1 aber ist unmöglich, da sich nach dem obigen dort die Grenzwerte $\frac{\alpha}{\pi} < 1$ bzw. $\frac{\alpha_1}{\pi} < 1$ einstellen müssen.

Wir bilden nun mit der Funktion v unseres Hilfssatzes die Differenz $S - v = \Lambda$, deren Randwerte auf a verschwinden und auf b sicherlich nicht negativ sind. Diese in G reguläre harmonische Funktion kann weder im Innern von G irgendwo negativ werden, noch bei Annäherung an einen inneren Punkt der Bogen a oder b negative Grenzwerte liefern. Bei Annäherung an einen der Bogenendpunkte A und A_1 besitzt Λ dieselben Häufungswerte wie S und diese müssen zwischen Null und Eins liegen. Überall im abgeschlossenen Gebiet G gilt also $S - v \geqq 0$, insbesondere folgt auf dem Bogen b':

$$v \leqq S \leqq q.$$

Dieselbe Betrachtung für die Summe $S + v$ durchgeführt liefert $S + v \geqq 0$ in G und somit zusammengefaßt auf b'

$$|v| \leqq S \leqq q < 1.$$

Unser Hilfssatz ist hiermit bewiesen.

Der Beweis hat den Vorteil, unmittelbar auf drei und mehr Dimensionen übertragbar zu sein, wenn man als Funktion w das Dipolpotential einer Flächenbelegung des Randes mit der Dichte 0 bzw. 1 wählt.

3. Die Integralgleichungsmethode für Gebiete mit hinreichend glatten Rändern. Eine vom alternierenden Verfahren und der Balayagemethode wesentlich verschiedene Methode für spezielle Gebietstypen ist die *Fredholmsche Integralgleichungsmethode*, welche eine Vertiefung und Erweiterung einer älteren Methode für konvexe Gebiete von E. NEUMANN darstellt. Die Randwertaufgabe wird hierbei auf eine Fredholmsche Integralgleichung 2. Art zurückgeführt. Indem wir darauf verzichten, die Methode unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen zu entwickeln, nehmen wir — zunächst für den Fall der Ebene — an, daß die Randkurve Γ durch Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ darstellbar sei, welche stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich besitzen.

Wir versuchen, die gesuchte Potentialfunktion $u(x, y)$ in der Form

$$u(x, y) = \int_\Gamma \sigma(t) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} dt, \qquad \left(\gamma = \log \frac{1}{r}\right) \tag{1}$$

als Potential einer Doppelbelegung $\sigma(s)$ des Randes Γ darzustellen. Infolge der Voraussetzung über Γ besitzt dieses Integral auch einen Sinn, falls $P(x, y)$ ein Punkt des Randes Γ ist. Denn denken wir uns auf Γ die Punkte durch die Bogenlänge s festgelegt, so wird dort

$$u(s) = \int_\Gamma \sigma(t) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial \nu} dt \tag{2}$$

und hier konvergiert der Ausdruck

$$K(s, t) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial \nu} = \frac{\cos \alpha}{\pi r} = \frac{1}{\pi} \frac{d\varphi}{dt} \tag{3}$$

(vgl. Abb. 25) mit $t \to s$ gegen den Wert $\frac{1}{2\pi} k(s)$; dabei ist $k(s)$ die Krümmung der Randkurve im Punkte s, und als solche zweimal stetig differenzierbar. Der Kern $K(s,t)$ selbst besitzt somit stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung.

Wir setzen voraus, daß $\sigma(s)$ eine stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge s sei. Konvergiert nun P vom Gebietsinnern gegen den Randpunkt P_0, so konvergiert nach dem in § 1, 4 abgeleiteten Sprungsatz das Potential $u(P)$ gegen den Randwert $u_i(P_0) = u(P_0) - \pi\sigma(P_0)$ oder wegen (2) gegen den Wert

$$u_i(P_0) = -\pi \int_\Gamma K(s,t)\,\sigma(t)\,dt - \pi\sigma(s). \tag{4}$$

Es liegt nun nahe diesen Gedankengang umzukehren und bei gegebenen Randwerten $u_i(P_0) = f(s)$ die Belegung $\sigma(s)$ aus der Integralgleichung

$$\sigma(s) = -\int K(s,t)\,\sigma(t)\,dt - \frac{1}{\pi} f(s) \tag{5}$$

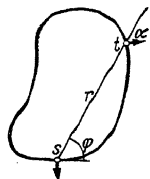



Abb. 25.

zu bestimmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir dabei nach Nr. 1 die Randwerte $f(s)$ als stetig differenzierbar voraussetzen. Ist $\sigma(s)$ eine Lösung dieser Integralgleichung, so genügt ihr Potential

$$u = \int_\Gamma \sigma(t) \frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\,dt$$

im Innern von G der Potentialgleichung. Infolge der Differenzierbarkeit von $f(s)$ und von $K(s,t)$ ist auch die Belegung $\sigma(s)$ stetig differenzierbar, d. h. die Voraussetzungen des Sprungsatzes für die Ebene aus § 1, 4 sind erfüllt. Hiernach nimmt bei Annäherung an Γ das Potential u die Randwerte

$$-\pi \int_\Gamma K(s,t)\,\sigma(t)\,dt - \pi\sigma(s) = f(s)$$

an und löst also die gestellte Randwertaufgabe.

Für die Integralgleichung (5) gelten nun die in Bd. I, Kap. 3 bewiesenen *Fredholmschen Sätze*; sie besagen für unser Problem, daß es zu jedem stetig differenzierbaren $f(s)$ eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion $\sigma(s)$ gibt, die der Integralgleichung (5) genügt, vorausgesetzt, daß die zugehörige *homogene Integralgleichung*

$$\sigma(s) = -\int_\Gamma K(s,t)\,\sigma(t)\,dt \tag{6}$$

nur die triviale Lösung $\sigma \equiv 0$ besitzt. Mit anderen Worten: Der Existenzbeweis für unsere speziellen Gebiete ist geführt, falls wir noch beweisen, daß unter den Eigenwerten der homogenen Gleichung

$$\lambda v(s) = \int_\Gamma K(s,t)\,v(t)\,dt \tag{7}$$

niemals der Eigenwert $\lambda = -1$ auftreten kann.

Im Falle eines *konvexen stetig gekrümmten Randes* ist dies eine unmittelbare Folge der Relation

$$\int_\Gamma K(s, t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{dt}\, dt = 1$$

und der aus der Konvexität folgenden Ungleichung

$$K(s, t) = \frac{\cos\alpha}{\pi r} \geqq 0 .$$

Denn ist M das Maximum von $|v|$ auf Γ, so gilt

$$|\lambda|\, |v| \leqq M \int K(s, t)\, dt = M$$

und daher für $|v| = M$

$$|\lambda|\, M \leqq M .$$

Das Gleichheitszeichen kann dabei nur gelten, wenn v konstant ist. Im Falle $v \not\equiv 0$ ist $M \neq 0$ und somit

$$|\lambda| \leqq 1,$$

und zwar gilt $|\lambda| = 1$ nur für konstante v. Zur Eigenfunktion $v =$ konst. gehört aber der Eigenwert $\lambda = +1$, d. h. wir erhalten die Ungleichung, $-1 < \lambda \leqq +1$, die den Wert $\lambda = -1$ ausschließt.

Für den Fall eines nicht konvexen Randes beachten wir, daß auf Grund unserer Voraussetzungen der Kern $K(s, t)$ zweimal stetig differenzierbar ist, woraus die gleiche Eigenschaft für alle Eigenfunktionen der Gleichung

$$\lambda\, v(s) = \int K(s, t)\, v(t)\, dt$$

folgt. Ist nun $\sigma(s)$ eine Lösung der Gleichung

$$-\sigma(s) = \int K(s, t)\, \sigma(t)\, dt, \tag{6}$$

so nimmt infolge der Sprungrelationen von § 1, 4 das Potential

$$u(x, y) = \int_\Gamma \sigma(t)\, \frac{\partial\gamma}{\partial\nu}\, dt \tag{8}$$

auf Γ die inneren Randwerte

$$u_i(s) = \int_\Gamma \sigma(t)\, \frac{\partial\gamma(s, t)}{\partial\nu}\, dt - \pi\sigma(s) = 0$$

an und verschwindet nach dem Eindeutigkeitssatz im Innern von G überhaupt identisch. Auch die inneren normalen Ableitungen von $u(x, y)$ auf Γ verschwinden folglich überall.

Wir betrachten nun das Potential (8) außerhalb G. Nach dem Sprungsatz für die Ebene von § 1, 4, dessen Voraussetzungen in unserem Fall erfüllt sind, erhalten wir auf Γ die äußeren Randwerte

$$u_a(s) = \int \sigma(t)\, \frac{\partial\gamma(s, t)}{\partial\nu}\, dt + \pi\sigma = 2\pi\sigma(s)$$

und die äußeren normalen Ableitungen $\frac{\partial u_a}{\partial \nu} = 0$; im Unendlichen verschwindet u wie $1/r$.

Hieraus aber folgt (vgl. § 1, S. 233), daß u auch außerhalb G identisch verschwindet und daher insbesondere auf Γ die äußeren Randwerte

$$u_a(s) = 2\pi\sigma(s) = 0$$

annimmt. Jede Lösung der Gleichung (6) verschwindet somit identisch: $\lambda = -1$ kann kein Eigenwert der homogenen Integralgleichung

$$\lambda\, v(s) = \int\limits_{\Gamma} K(s, t)\, v(t)\, dt$$

sein. Damit ist alsdann der Existenzbeweis für die Lösung der Randwertaufgabe bei unseren speziellen Gebietstypen G geführt.

Eine ähnliche Betrachtung ist im Raume möglich, wobei jedoch — um die Anwendung der Fredholmschen Theorie zu ermöglichen — der nicht quadratisch integrierbare Kern $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}$ durch den quadratisch integrierbaren iterierten Kern zu ersetzen ist.

Grundsätzlich ist zur Integralgleichungsmethode zu bemerken, daß sie trotz ihrer Eleganz dem vorher entwickelten Verfahren unterlegen ist, weil schon das Auftreten einer gewöhnlichen Ecke Singularitäten des Kernes K zur Folge hat, durch welche die Anwendung der Fredholmschen Theorie ausgeschlossen wird.

4. Weitere Bemerkungen zur Randwertaufgabe.

Im Fall der Ebene liefern die obigen Methoden die Lösung des Randwertproblems für jedes von einer beliebigen Jordankurve begrenzte Gebiet. Für den Fall von drei Dimensionen bereits liegen jedoch die Verhältnisse wesentlich komplizierter, insofern es Gebiete gibt, für welche die Randwertaufgabe im strengen Sinne nicht mehr lösbar ist, d. h. die wirkliche Annahme der Randwerte in allen Randpunkten bei vorgeschriebenen stetigen Randwerten nicht mehr erwartet werden kann. Diese Tatsache wird durch das folgende *Gegenbeispiel von* LEBESGUE illustriert.

Wir berechnen zunächst das Potential einer Massenverteilung, die auf dem zwischen 0 und 1 gelegenen Abschnitt der x-Achse mit der Liniendichte $\tau(x) = x$ konzentriert sei. Setzen wir $\varrho^2 = y^2 + z^2$, so ist

$$u(x, y, z) = \int\limits_0^1 \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + \varrho^2}} = A(x, \varrho) - 2x \log \varrho .$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$A(x, \varrho) = \sqrt{(1-x)^2 + \varrho^2} - \sqrt{x^2 + \varrho^2} + x \log \left| \left(1 - x + \sqrt{(1-x)^2 + \varrho^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 + \varrho^2}\right) \right|$$

gesetzt.

Bei beliebiger Annäherung an den Nullpunkt nähert sich $A(x, \varrho)$ stetig dem Werte 1, der Grenzwert des Ausdrucks $-2x \log \varrho$ hingegen hängt wesentlich von der Art der Annäherung ab. Nähern wir uns dem Nullpunkt z. B. auf der Fläche $\varrho = |x|^n$, so konvergiert $-2x \log \varrho$ bei beliebigem n gegen Null, u also gegen den Wert 1. Nähern wir uns jedoch auf der Fläche $\varrho = e^{-\frac{c}{2x}}$; $c > 0$, $x > 0$, die im Nullpunkt eine „unendlich scharfe" Spitze besitzt, so konvergiert $-x \log \varrho$ gegen c, das Potential u also gegen $1 + c$. Dies bedeutet, daß alle Äquipotentialflächen $u = 1 + c$; $c > 0$ im Nullpunkt zusammenlaufen, und zwar derart, daß alle Ableitungen der Kurve $\varrho = f(x)$, aus welcher diese Flächen durch Rotation um die x-Achse entstehen, im Nullpunkt verschwinden. In Abb. 26 ist die Gestalt einer solchen Fläche $u = 1 + c$ gekennzeichnet.

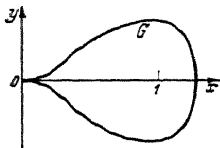



Abb. 26.

Wählen wir nun als Grundgebiet das von einer solchen Äquipotentialfläche $u = 1 + c$, $c > 0$ begrenzte Gebiet G und stellen für G und die Randwerte $u = 1 + c$ das äußere Randwertproblem, so wird die Lösung durch die oben gegebene Funktion $u(x, y, z)$ geliefert. Aus unseren obigen Überlegungen folgt aber, daß diese Lösung bei geeigneter Annäherung an den Nullpunkt gegen jeden zwischen 1 und $1 + c$ gelegenen Wert konvergieren kann.

Abb. 27.

Durch Spiegelung an der Kugel

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}$$

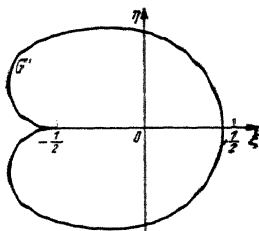
können wir schließlich aus diesem Beispiel ein entsprechendes Beispiel für ein inneres Problem gewinnen. Hierbei geht G in ein Gebiet G' des ξ, η, ζ-Raumes über, das im Punkte $\xi = -\frac{1}{2}$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ eine unendlich scharfe innere Spitze besitzt (vgl. Abb. 27). Die Randwerte $1 + c$ gehen in die auf Γ' stetigen Randwerte

$$v = \frac{1 + c}{2r}, \qquad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

über; die Lösung des für diese Randwerte und das Gebiet G' gestellten inneren Randwertproblems ist durch die in G' reguläre Potentialfunktion

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2r} u\left(\frac{\xi}{4r^2} + \frac{1}{2}, \frac{\eta}{4r^2}, \frac{\zeta}{4r^2}\right)$$

gegeben. Wiederum kann sich bei geeigneter Annäherung an den Punkt $\xi = -\frac{1}{2}$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ als Grenzwert für v jeder beliebige Wert zwischen 1 und $1 + c$ einstellen.

Wir werden in Kap. VII, § 4 zeigen, daß in der Tat die Forderung der exakten Randwertannahme in jedem Randpunkt bei drei und

mehr Dimensionen mehr ist, als wir der Natur der Sache nach erwarten dürfen. Wir werden dementsprechend die Forderung der exakten Randwertannahme durch die schwächere Forderung der *Randannahme im Mittel* ersetzen, welche allein schon ausreicht, um die Lösung eindeutig festzulegen. Nur im speziellen Fall von zwei Dimensionen stellt diese Forderung auch die wirkliche Annahme der Randwerte in jedem Randpunkt sicher.

§ 5. Randwertaufgaben für allgemeinere elliptische Differentialgleichungen; eindeutige Bestimmtheit der Lösungen.

Obwohl $\Delta u = 0$ für die elliptische Differentialgleichung typisch ist, bedarf es zu einer allgemeineren Theorie elliptischer Differentialgleichungen selbst unter Beschränkung auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung vieler neuer Überlegungen, die über den Rahmen dieses Buches hinausgehen würden. Daher beschränken wir uns unter Hinweis auf die umfangreiche Literatur [1] hier nur auf die kurze Darstellung einiger Hauptpunkte bezüglich der Randwertaufgaben bzw. Konstruktion spezieller Lösungen. Wir behandeln zunächst das Eindeutigkeitsproblem, d. h. die Frage, unter welchen Bedingungen die Lösung der Randwertaufgabe eindeutig bestimmt ist.

1. Lineare Differentialgleichungen. Es sei $L[u] = 0$ die lineare elliptische Differentialgleichung

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + cu = 0, \tag{1}$$

wobei zur Abkürzung $u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ gesetzt ist. Die Koeffizienten $a_{ik} = a_{ki}$, b_i, c seien in einem beschränkten Gebiet G des n-dimensionalen Raumes stetige Funktionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Die quadratische Form in den Parametern $\xi_1, \ldots, \xi_n$

$$\sum a_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\, \xi_i \xi_k$$

[1] Vgl. hierzu das Referat von LICHTENSTEIN: Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, 3 Heft 8. — Die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen wird in großer Allgemeinheit in den Arbeiten von E. E. LEVI und GEORGES GIRAUD entwickelt; diese Arbeiten enthalten eine weitgehende Übertragung der Resultate der Potentialtheorie auf allgemeine elliptische Differentialgleichungen. LEVI, E.E.: Palermo Rend. Bd. 24 (1907) S. 275—317. — GIRAUD, G.: Sur le problème de DIRICHLET généralisé. Equations non linéaires à m variables. Ecole Normale Bd. 43 (1926) S. 1—128. — Sur le problème de DIRICHLET générale 2. Mem. Ecole Normale Bd. 46 (1929) S. 131—145. — Sur certains problèmes non linéaires de NEUMANN et sur certains problèmes non linéaires mixtes. Ecole Normale Bd. 49 (1932) S. 1—103. Ferner sei hingewiesen auf neuere Arbeiten von GIRAUD, SCHANDER, LERAY, über welche z. B. das Zentralblatt für Mathematik orientiert.

sei in allen Punkten $x_1, \ldots, x_n$ von G positiv definit. Dann gilt der folgende *Eindeutigkeitssatz:*

Unter der Voraussetzung $c \leqq 0$ *gibt es höchstens eine Lösung der Gleichung* (1), *die in* G *stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, in* $G + \Gamma$ *stetig ist und auf dem Rande* Γ *von* G *vorgeschriebene Randwerte annimmt*[1].

Mit anderen Worten: Eine auf Γ verschwindende Lösung der Gleichung $L[u] = 0$ verschwindet identisch in G.

Wir setzen zunächst $c < 0$ voraus und beweisen unter dieser Annahme: *Eine auf dem Rande* Γ *verschwindende Lösung der Gleichung* $L[u] = 0$ *kann im Innern von* G *kein positives Maximum besitzen.*

In der Tat, besitzt u in einem inneren Punkt $P(x_1, \ldots, x_n)$ des Gebietes G ein positives Maximum, so verschwinden dort alle ersten Ableitungen u_i, und die Matrix der zweiten Ableitungen

$$u_{ik}(P) = b_{ik}$$

ist die Matrix einer nirgends positiven quadratischen Form. Der Differentialausdruck L besitzt also im Punkte P die Form

$$L[u] = S + cu,$$

wobei $S = \sum a_{ik} b_{ik}$ die Spur des Produktes der beiden Matrizen (a_{ik}) und (b_{ik}) ist. Diese Spur S kann nun nicht positiv sein. Denn transformieren wir (a_{ik}) durch eine orthogonale Transformation in die Diagonalmatrix (p_i) mit $p_i > 0$ und (b_{ik}) durch die gleiche Transformation in die Matrix (β_{ik}), so bleibt der Wert S gegenüber dieser Transformation invariant und es gilt

$$S = \sum_i p_i \beta_{ii}.$$

Da mit (b_{ik}) auch die Matrix (β_{ik}) die Matrix einer nirgends positiven quadratischen Form ist, so gilt $\beta_{ii} \leqq 0$ und somit $S \leqq 0$. Wegen $c < 0$ und $u(P) > 0$ besteht daher in P die Ungleichung $L[u] < 0$ im Gegensatz zu der Annahme, daß u Lösung der Gleichung $L[u] = 0$ ist. Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Wenden wir schließlich dieses Resultat auf die Funktion $-u$ an, so folgt, daß u in G auch kein negatives Minimum annehmen kann; daher folgt aus $u = 0$ auf Γ: *u verschwindet identisch in G.*

Der Fall $c \leqq 0$ läßt sich durch den folgenden Kunstgriff von PICARD auf den Fall $c < 0$ zurückführen. Wir setzen mit einem Faktor z

$$u = z(x_1, \ldots, x_n)\, v(x_1, \ldots, x_n)$$

und erhalten für v eine Differentialgleichung der Form

$$z \sum a_{ik} v_{ik} + z \sum \beta_i v_i + v\left(c z + \sum a_{ik} z_{ik} + \sum b_i z_i\right) = 0, \tag{2}$$

[1] Ohne die Bedingung $c \leqq 0$ können wir im allgemeinen sicher keine Eindeutigkeit erwarten, wie wir sofort aus der Differentialgleichung $\Delta u + cu = 0$ erkennen, falls c einer der positiven Eigenwerte bei der Randbedingung $u = 0$ ist.

wobei β_i gewisse in G stetige Ortsfunktionen sind. Wählen wir für z die Funktion

$$z = C - e^{\mu x_1},$$

so ergibt sich

$$\sum a_{ik} v_{ik} + \sum \beta_i v_i + c^* v = 0 \tag{3}$$

mit

$$c^* = c - \frac{1}{z} (a_{11} \mu^2 + b_1 \mu) e^{\mu x_1}.$$

Da $a_{11} > 0$ ist, so können wir die Konstanten C und μ derart wählen, daß in G überall $c^* < 0$ und $z > 1$ gilt. Aus unserem früheren Resultat folgt sodann, daß v und also auch $u = zv$ in G identisch verschwindet. Damit ist der obige Eindeutigkeitssatz völlig bewiesen.

2. Quasilineare Differentialgleichungen. Die Überlegungen bzw. Resultate der vorigen Nummer können durch einen einfachen auch sonst vielfach verwendeten Kunstgriff auf allgemeinere quasilineare Differentialgleichungen ausgedehnt werden.

Wir betrachten die quasilineare Differentialgleichung

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + d = 0. \tag{4}$$

Die Koeffizienten a_{ik} und d seien stetig differenzierbare Funktionen der Variabeln $x_1, \ldots, x_n$; $u_1, \ldots, u_n$, also von u selbst nicht explizit abhängig.

Es gibt höchstens eine Lösung von (4), *die auf Γ vorgeschriebene Randwerte annimmt und für die im Innern überall die Matrix (a_{ik}) positiv definit ist.*

Der Einfachheit halber führen wir unsere Überlegungen für den Fall $n = 2$ durch, betrachten also die Gleichung

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d = 0, \tag{5}$$

wobei die Funktionen a, b, c, d in G stetig differenzierbar von den Größen x, y, u_x, u_y abhängen.

Wir nehmen zum Beweise an, daß zwei Lösungen u und v existieren, deren Differenz $\omega = u - v$ dann am Rande Γ verschwindet. Setzen wir zur Abkürzung

$$a[u] = a(x, y, u_x, u_y)$$
$$a[v] = a(x, y, v_x, v_y)$$

usw., so ist

$$\begin{aligned} L[u] - L[v] &= L[v + \omega] - L[v] \\ &= a[u]\,\omega_{xx} + 2b[u]\,\omega_{xy} + c[u]\,\omega_{yy} + \{a[v+\omega] - a[v]\}\, v_{xx} \\ &\quad + 2\{b[v+\omega] - b[v]\}\, v_{xy} + \{c[v+\omega] - c[v]\}\, v_{yy} + d[v+\omega] \\ &\quad - d[v] = 0. \end{aligned}$$

Wenden wir auf die Differenzen

$$a[v+\omega] - a[v] = a(x, y, v_x + \omega_x, v_y + \omega_y) - a(x, y, v_x, v_y)$$

usw. den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an, so ergibt sich für ω in G eine Relation der Form

$$a\,\omega_{xx} + 2b\,\omega_{xy} + c\,\omega_{yy} + \alpha\,\omega_x + \beta\,\omega_y = 0, \tag{6}$$

wobei die Funktionen a, b, c, α, β stetige Ortsfunktionen in G sind, deren Gestalt natürlich von den Funktionen u und v abhängig ist[1].

Für die Gleichung (6) gelten nun die Betrachtungen und Resultate von Nr. 1. Unter der Bedingung $ac - b^2 > 0$ verschwindet somit die auf Γ verschwindende Funktion ω in G identisch. Damit ist dann unser Satz bewiesen.

3. Ein Satz von Rellich über die Differentialgleichung von Monge-Ampère. Als Beispiel für den Fall einer nicht quasilinearen Differentialgleichung behandeln wir schließlich die Randwertaufgabe für die *Differentialgleichung von Monge-Ampère:*

$$L[u] = E(u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2) + A\,u_{xx} + 2B\,u_{xy} + C\,u_{yy} + D = 0. \tag{7}$$

Die Koeffizienten E, D, A, B, C seien in G stetig von x und y abhängig und der Ungleichung

$$AC - B^2 - ED > 0 \tag{8}$$

unterworfen. Es besteht dann der Eindeutigkeitssatz[2]:

Es gibt höchstens zwei Lösungen der Gleichung (7), die auf Γ dieselben Randwerte annehmen.

Beweis: Ist u eine Lösung der Gleichung (7), so gilt wegen (7) und (8) die Ungleichung

$$(E\,u_{xx} + C)(E\,u_{yy} + A) - (E\,u_{xy} - B)^2 > 0. \tag{9}$$

Daraus folgt, daß der Ausdruck $(E\,u_{xx} + C)(E\,u_{yy} + A)$ stets größer als Null sein muß, daß also keiner der beiden Faktoren in G verschwinden kann. Entweder sind beide stets größer oder beide stets kleiner als Null. Der obige Satz ist hiernach bewiesen, wenn wir zeigen: Es gibt höchstens eine Lösung des Randwertproblems, für die überall in G

$$E\,u_{xx} + C > 0 \quad (\text{also auch } E\,u_{yy} + A > 0) \tag{10}$$

gilt und ferner höchstens eine Lösung, für die

$$E\,u_{xx} + C < 0 \quad (\text{also auch } E\,u_{yy} + A < 0) \tag{11}$$

gilt. Es genügt, den Fall (10) zu behandeln.

Nehmen wir an, daß zwei Lösungen u und v des Randwertproblems existieren, die beide die Ungleichung (10) erfüllen, so bestehen für die Differenz $\omega = u - v$ die beiden Gleichungen

[1] Die Betrachtung einer solchen linearen Differentialgleichung, welcher ω genügt und in welcher die Koeffizienten als bekannte Ortsfunktionen anzusehen sind, ist gerade der eingangs erwähnte einfache Kunstgriff.

[2] Rellich, F.: Math. Ann. Bd. 107 (1933) S. 505f.

$$0 = L[\omega + v] - L[v] = E(\omega_{xx}\omega_{yy} - \omega_{xy}^2) + (E v_{xx} + C)\,\omega_{yy} + (E v_{yy} + A)\,\omega_{xx} - 2(E v_{yx} - B)\,\omega_{xy}$$

$$0 = L[u] - L[u - \omega] = -E(\omega_{xx}\omega_{yy} - \omega_{xy}^2) + (E u_{xx} + C)\,\omega_{yy} + (E u_{yy} + A)\,\omega_{xx} - 2(E u_{xy} - B)\,\omega_{xy},$$

woraus durch Addition die Relation

$$P\,\omega_{xx} - 2\,Q\,\omega_{xy} + R\,\omega_{yy} = 0 \tag{12}$$

für ω entsteht. Hierbei sind die Koeffizienten

$$P = E v_{yy} + A + E u_{yy} + A; \qquad Q = E v_{xy} - B + E u_{xy} - B;$$
$$R = E v_{xx} + C + E u_{xx} + C$$

stetige Ortsfunktionen in G. Die quadratische Form

$$P\xi^2 - 2\,Q\,\xi\,\eta + R\,\eta^2$$

ist nun als Summe zweier positiv definiter quadratischer Formen selbst positiv definit. Genau wie in Nr. 1 und Nr. 2 folgt nunmehr aus (12) und der Randbedingung $\omega = 0$ das identische Verschwinden von ω in G und damit die Aussage des obigen Satzes.

Aus einfachen Beispielen geht hervor, daß wir *im allgemeinen* wirklich mit der *Existenz von zwei verschiedenen Lösungen* rechnen müssen. So besitzt das Randwertproblem für

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 4$$

mit der Randbedingung auf dem Einheitskreis

$$u = 0 \tag{13}$$

die Lösungen

$$u = x^2 + y^2 - 1 \quad \text{und} \quad v = 1 - x^2 - y^2.$$

Für die erste Lösung ist dabei $E u_{xx} + C = 2$, für die zweite $E v_{xx} + C = -2$.

Wenn dagegen die Funktion E in irgendeinem Punkte P von G verschwindet, so kann es höchstens eine Lösung des Randwertproblems geben. Denn in P gilt alsdann $E u_{xx} + C = C(P)$ und somit wegen der Konstanz des Vorzeichens von $E u_{xx} + C$ in G überall $\operatorname{sign}(E u_{xx} + C) = \operatorname{sign} C(P)$. D. h. dieses Vorzeichen ist für alle Lösungen u dasselbe [1].

---

[1] Beiläufig sei in diesem Zusammenhange noch die bemerkenswerte Tatsache erwähnt, daß sich die Monge-Ampèresche Differentialgleichung aus einem einfachen *Variationsproblem* gewinnen läßt. Wir sehen dabei von dem Zusatzbestandteil $A u_{xx} + 2 B u_{xy} + C u_{yy}$ ab und betrachten die Gleichung

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = p(x, y). \tag{14}$$

Wie man leicht verifiziert, ist (14) die Eulersche Gleichung zu dem Variationsausdruck

$$J[u] = \iint_G [u_x^2 u_{yy} - 2\,u_x u_y\,u_{xy} + u_y^2\,u_{xx} - 4\,p u]\,dx\,dy.$$

§ 6. Die Integralgleichungsmethode zur Lösung elliptischer Differentialgleichungen.

Auch im Falle allgemeiner elliptischer Differentialgleichungen lassen sich Integralgleichungen angeben, deren Auflösung mit dem entsprechenden *Differentialgleichungsproblem* äquivalent ist. Insbesondere ergeben sich aus diesem Zusammenhang auf Grund der Fredholmschen Sätze Aussagen über die Existenz von speziellen Lösungen und Methoden zur Behandlung von Randwertproblemen. Wir beschränken uns auch hier auf eine Darstellung der charakteristischen Züge solcher Methoden. Dementsprechend sei die Theorie nur für den Fall zweier unabhängiger Variabler durchgeführt, und zwar für lineare Differentialgleichungen. Wir dürfen dabei nach Kap. III, § 1 die Differentialgleichung in der Form

$$L[u] = \Delta u + a u_x + b u_y + c u = f(x, y) \tag{1}$$

voraussetzen. a, b, c und f seien in einem beschränkten Gebiet G stetig und stetig differenzierbar.

1. Konstruktion von Lösungen überhaupt. Grundlösungen. Wenn die Koeffizienten a, b, c und die Funktion f analytisch von den Variabeln x, y abhängen, so kann die Frage, ob (1) überhaupt Lösungen besitzt, einfach durch den Potenzreihenansatz beantwortet werden (vgl. Kap. I, § 7). Setzen wir jedoch von den Koeffizienten nur Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit in G voraus, so ist bereits die Existenz einer einzigen Lösung der Differentialgleichung (1) ein Problem, dessen Beantwortung neue Methoden erfordert. Eine solche Methode ist die *Integralgleichungsmethode von* E. E. LEVI.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\psi(x, y; \xi, \eta) = -\log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = -\log r. \tag{2}$$

Diese Funktion, die wir als *Parametrix oder Singularitätenfunktion*[1] bezeichnen, besitzt im Punkte $x = \xi$, $y = \eta$ die zu L gehörige charakteristische Singularität (vgl. § 1,1), genügt aber nicht der Differentialgleichung (1). Für beliebige $\varrho(x, y)$ wird also auch das Integral

$$u = \iint_G \psi(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{3}$$

keine Lösung darstellen; trotzdem aber können wir durch spezielle Wahl einer stetigen und stetig differenzierbaren Funktion $\varrho(x, y)$ stets erreichen, daß (3) oder allgemeiner

$$u = \omega(x, y) + \iint_G \psi(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{4}$$

die Gleichung (1) erfüllt. $\omega(x, y)$ sei dabei in G stetig und mit stetigen Ableitungen bis zur dritten Ordnung versehen, im übrigen aber willkürlich.

---

[1] HILBERT, D.: Göttinger Nachr. 1910 S. 1—65, insbesondere S. 8—34; ferner Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig 1912, insbesondere S. 219—242 und die dort zitierten Arbeiten von E. E. LEVI.

Um dies zu beweisen, gehen wir mit dem Ansatz (4) in die Gleichung $L[u] = f$ ein; infolge der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über ϱ ist nach § 1,2

$$\Delta u = \Delta \omega - 2\pi \varrho$$

und ferner

$$L[u] = L[\omega] - 2\pi \varrho + \iint_G (a\psi_x + b\psi_y + c\psi)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(5) \quad \begin{cases} K(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} [a\psi_x + b\psi_y + c\psi] \\ \qquad - \frac{1}{2\pi}\left[a(x, y)\frac{x-\xi}{r^2} + b(x, y)\frac{y-\eta}{r^2} + c(x, y)\log r\right] \end{cases}$$

und

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi}(L[\omega] - f),$$

so ergibt sich für ϱ die *Integralgleichung*

$$(6) \qquad \varrho(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + g(x, y).$$

Auf diese Integralgleichung läßt sich die Fredholmsche Theorie nicht unmittelbar anwenden, da der Kern (5) im Punkte $x = \xi$, $y = \eta$ wie $1/r$ unendlich wird und somit nicht quadratisch integrierbar ist. Man erkennt jedoch leicht die quadratische Integrierbarkeit des iterierten Kerns

$$K_2(x, y; \xi, \eta) = \iint_G K(x, y; s, t)\, K(s, t; \xi, \eta)\, ds\, dt.$$

Wir betrachten also statt (6) zunächst die iterierte Integralgleichung

$$(7) \qquad \varrho(x, y) = \iint_G K_2(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + h(x, y)$$

mit

$$h = g + \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, g(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Für sie ist die Anwendung der Fredholmschen Sätze möglich.

Die zu (7) gehörige homogene Integralgleichung

$$(8) \qquad \varrho(x, y) = \iint_G K_2(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

kann eine nicht identisch verschwindende Lösung ϱ nur besitzen, wenn

$$\iint_G \iint_G K_2^2(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta \geqq 1$$

gilt. Wählen wir also das Gebiet G hinreichend klein, so daß der Wert des Integrals links kleiner als 1 wird, so besitzt (8) nur die Lösung $\varrho \equiv 0$.

Die Funktion $g(x, y) = \frac{1}{2\pi}(L[\omega] - f)$ ist in G stetig und stetig differenzierbar; dasselbe gilt daher nach dem in § 1,2 bewiesenen Satz auch für die Funktion $h(x, y)$.

Hiernach erkennen wir aus den Fredholmschen Sätzen: *Für hinreichend kleine Gebiete G existiert bei beliebigem h eine Lösung der Integralgleichung (7).* Diese Lösung ist ebenso wie h stetig differenzierbar und erfüllt auch die ursprüngliche Integralgleichung (6). In der Tat setzen wir für den Augenblick

$$v = g + \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

so bedeutet (7)

$$\varrho = \iint_G K(v - g)\, d\xi\, d\eta + h.$$

Durch Multiplikation mit K und Integration folgt

$$v - g = \iint_G K_2 (v - g)\, d\xi\, d\eta + \iint_G K h\, d\xi\, d\eta$$

oder

$$v = \iint_G K_2\, v\, d\xi\, d\eta + h,$$

d. h. v genügt ebenfalls der Gleichung (7) und muß wegen der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung also mit ϱ übereinstimmen; $v = \varrho$ liefert aber die Integralgleichung (6).

Bilden wir nun mit Hilfe von $\varrho(x, y)$ den Ausdruck

$$u = \omega + \iint_G \psi(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

so ist

$$L[u] = L[\omega] + 2\pi \left\{ \iint_G K \varrho\, d\xi\, d\eta - \varrho \right\} = f,$$

d. h. u ist eine in G mit stetigen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung versehene Lösung von (1), die noch von der willkürlichen Funktion ω abhängt. *Damit ist die Existenz von Lösungen unserer Differentialgleichung in einem hinreichend kleinen Gebiet G gezeigt.*

Setzen wir speziell

$$\omega = -\log\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

und wählen für G ein hinreichend kleines Gebiet G^* um den Punkt x_0, y_0, aus dem dieser Punkt durch einen kleinen Kreis vom Radius δ ausgeschlossen ist, so erhalten wir nach dem obigen Resultat in G^* Lösungen der Form

$$u^*(x, y) = -\log\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \iint_{G^*} \psi(x, y; \xi, \eta)\, \varrho^*(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Man zeigt leicht, daß im Limes $\delta \to 0$ die Belegung ϱ^* gegen eine Funktion ϱ konvergiert, derart, daß

$$\iint_G \psi(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

überall in dem Grenzgebiet $G = \lim G^*$ stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Die Funktion

$$(9) \qquad \begin{aligned} \gamma(x, y; x_0, y_0) = {} & -\log\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ & + \iint_G \psi(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \end{aligned}$$

genügt dann überall in G außer im Punkte $x = x_0$, $y = y_0$ der Gleichung $L[u] = f$; da ferner $\gamma - \log 1/r$ überall in G regulär ist, so ist $\gamma(x, y; x_0, y_0)$ *Grundlösung zur Gleichung* (1).

2. Die Randwertaufgabe. Die Lösbarkeit der für die Differentialgleichung

$$L[u] = f \tag{10}$$

gestellten *Randwertaufgabe* kann nunmehr — mit Hilfe der in Nr. 1 konstruierten Grundlösung — in genauer Analogie zu der Integralgleichungsmethode bewiesen werden, die wir in § 4,3 für $\Delta u = 0$ dargestellt haben. Setzen wir jedoch hier die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, also die Existenz der Greenschen Funktion $K(P, Q)$ des Gebietes G als bewiesen voraus, so kann die Randwertaufgabe der Gleichung (10) einfacher durch ähnliche Überlegungen wie in Nr. 1 behandelt werden.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir auf Γ die Randwerte $u = 0$. Wir versuchen, die Lösung der Gleichung (10) durch das Integral

$$u = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{11}$$

darzustellen; dabei ist $K(x, y; \xi, \eta)$ die Greensche Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$ für das Gebiet G und ϱ eine stetige und stetig differenzierbare Funktion in G. Wir setzen dann

$$H(x, y; \xi, \eta) = a K_x + b K_y + c K \tag{12}$$

und nehmen weiterhin an, daß H in G eine Ungleichung der Form

$$|H(x, y; \xi, \eta)| < \frac{\alpha}{r} \qquad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right) \tag{13}$$

erfüllt, wobei α eine positive von x, y, ξ, η nicht abhängige Konstante ist. Dann folgt

$$L[u] = \iint_G H(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - \varrho(x, y)$$

und daher für ϱ die Integralgleichung

$$\varrho = -f + \iint_G H(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{14}$$

Wir betrachten wieder die aus (14) durch Iteration entstehende Integralgleichung

$$\varrho = -h + \iint_G H_2(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{15}$$

mit

$$h = f + \iint_G H(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Aus (13) entnehmen wir leicht die Ungleichung

$$|H_2(x, y; \xi, \eta)| < \alpha_0 |\log r| + \beta_0 \tag{16}$$
$$(\alpha_0, \beta_0 > 0 \text{ von } x, y; \xi, \eta \text{ nicht abhängig})$$

und damit die quadratische Integrierbarkeit des Kernes H_2. Wird also das Gebiet G so klein gewählt, daß

$$\iint_G \iint_G H_2^2(x, y; \xi, \eta)\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta < 1$$

gilt, so liefern die Fredholmschen Sätze die Existenz einer Lösung $\varrho(x, y)$ von (15). Wie früher schließen wir, daß diese Lösung auch der ursprünglichen Integralgleichung (14) genügt; sie ist wegen (16) in G stetig differenzierbar, falls dies für $h(x, y)$ der Fall ist. Die Differenzierbarkeit von h schließlich ist eine einfache Folge der Differenzierbarkeit von f und der Ungleichung (13). Genau wie in Nr. 1 erkennen wir sodann, daß

$$u(x, y) = \iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, \varrho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

die Gleichung $L[u] = f$ erfüllt und ebenso wie K auf dem Rande verschwindet; d. h. $u(x, y)$ löst die gestellte Randwertaufgabe.

Die Voraussetzung (13) läßt sich leicht in Form einer Bedingung für die Greensche Funktion K aussprechen. Es sei G^* ein G umfassendes Gebiet derart, daß der Rand Γ^* von Γ eine Entfernung größer als eine feste positive Zahl σ besitzt. Ist K^* die Greensche Funktion dieses Gebietes G^*, so gilt in G überall die Ungleichung

$$(17) \qquad 0 < K < K^*.$$

Im Innern von G gilt ferner

$$|2\pi K^* + 2\pi \log r| \leqq 2\pi |\log M|;$$

hierbei ist $|\log M|$ das Maximum des Ausdrucks $\left|\log \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right|$, welches sich ergibt, wenn x, y das Gebiet G und ξ, η den Rand Γ^* durchläuft. Somit folgt in G

$$0 < K^* < p\,|\log r| + q$$

und infolge (17) um so mehr

$$(18) \qquad 0 < K < p\,|\log r| + q.$$

Dabei sind p und q von x, y, ξ, η unabhängige positive Konstante.

Bestehen daher für K in G noch die weiteren Ungleichungen

$$(19) \qquad |K_x(x, y; \xi, \eta)| < \frac{C}{r}; \quad |K_y(x, y; \xi, \eta)| < \frac{C}{r},$$

wobei die Konstante C von x, y, ξ, η nicht abhängt, so folgt aus (12), (18) und (19) sofort die Bedingung (13). Hiermit können wir nunmehr das Resultat aussprechen:

Erfüllt in einem hinreichend klein gewählten Gebiet G die zugehörige Greensche Funktion $K(x, y; \xi, \eta)$ der Gleichung $\Delta u = 0$ Ungleichungen (19), so besitzt die Gleichung

$$L[u] = f(x, y)$$

stets eine auf dem Rande Γ von G verschwindende Lösung $u(x, y)$.

Die Bedingung (19) geht hier als Voraussetzung über die Gestalt des Grundgebietes G ein. In speziellen Fällen läßt sie sich verifizieren. Ist z. B. G der Einheitskreis, so ist nach § 2,2

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \log \frac{(\varrho^2 x - \xi)^2 + (\varrho^2 y - \eta)^2}{\varrho^2 [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]} \qquad (\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2)$$

und daher

$$K_x = -\frac{1}{2\pi} \frac{x-\xi}{r^2} + \frac{\varrho^2 (\varrho^2 x - \xi)}{2\pi (\varrho^2 x - \xi)^2 + (\varrho^2 y - \eta)^2}.$$

Hieraus folgt leicht

$$|K_x| \leqq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{\varrho^2}{\sqrt{(\varrho^2 x - \xi)^2 + (\varrho^2 y - \eta)^2}} \right.$$

oder

$$|K_x| \leqq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{\xi}{\varrho^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\eta}{\varrho^2}\right)^2}} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right).$$

Im Innern des Einheitskreises gilt $r < \varrho r_1$ und daher wegen $\varrho \leqq 1$ die Ungleichung $r < r_1$, also $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r}$. So folgt endlich

$$|K_x| \leqq \frac{1}{\pi r}$$

und analog

$$|K_y| \leqq \frac{1}{\pi r}.$$

Allgemeiner läßt sich zeigen, daß die Bedingung (19) für jedes Gebiet G mit *stetig gekrümmter Randkurve* besteht[1].

Einen anderen Zugang zu der Theorie der elliptischen Differentialgleichungen bieten wiederum die *direkten Methoden der Variationsrechnung*, wie wir in Kap. VII zeigen werden, wenn sich diese Differentialgleichungen aus einem Variationsproblem gewinnen lassen, d. h. für den Fall selbstadjungierter Differentialgleichungen der Form

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} + c u = 0. \tag{20}$$

Die in diesem Paragraphen skizzierten Methoden besitzen demgegenüber den Vorteil, an diese Beschränkung nicht gebunden zu sein, sondern erlauben, die aus (18) durch Hinzunahme willkürlicher Glieder erster Ordnung entstehenden nicht selbstadjungierten Gleichungen sofort mitzubehandeln.

Anhang zum vierten Kapitel.

1. Verallgemeinerung der Randwertaufgabe. Sätze von Wiener. Obwohl im Sinne strenger Annahme der Randwerte die Randwertaufgabe in drei oder allgemeiner in mehr Dimensionen nicht für beliebige beschränkte Gebiete lösbar ist, bleibt die Lösbarkeit in einem

[1] Siehe hierzu: LICHTENSTEIN, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II 3, Heft 8.

allgemeineren Sinne bestehen. Wir fassen die Randwertaufgabe als das Problem auf, einer auf Γ gegebenen stetigen Randfunktion f im Innern von G eine Potentialfunktion zuzuordnen. Eine solche Zuordnungsmöglichkeit, wobei nicht der stetige Anschluß an die Randwerte verlangt wird, ergibt sich auf Grund des folgenden *Grenzwertsatzes von* WIENER [1].

Es sei G ein beschränktes Gebiet des m-dimensionalen Raumes, Γ seine Randfläche und $f(P)$ eine in $G+\Gamma$ stetige Funktion. Es sei G_n eine Folge von Gebieten mit den Rändern Γ_n, die gegen G konvergieren, und für welche die Randwertaufgabe lösbar sei; jedes G_n sei Teilgebiet des folgenden G_{n+1}. Dann konvergiert die Folge der zugehörigen Lösungen u_n ($\Delta u_n = 0$ in G_n, $u_n = f$ auf Γ_n) in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von G gleichmäßig gegen eine Potentialfunktion u. Diese Grenzfunktion ist unabhängig von der speziellen approximierenden Folge G_n und unabhängig von den Funktionswerten $f(P)$ im Innern von G.

Ein genau analoges Resultat gilt für die entsprechende *äußere Randwertaufgabe*, insbesondere für den Spezialfall $u = 1$ auf Γ, wobei das Potential einer auf Γ verteilten elektrischen Ladung gesucht wird. Natürlich können wir in Anbetracht der Allgemeinheit von Γ nicht erwarten, daß die zugehörige Ladungsverteilung auf Γ durch eine Flächendichte gekennzeichnet werden und alsdann das Potential u außerhalb G durch das Flächenpotential der Ladung dargestellt werden kann. Indessen zeigt sich nach WIENER, daß die Einführung von *Stieltjesschen Integralen* eine solche Darstellung ermöglicht:

Es sei $u(P)$ die den Randwerten $u = 1$ zugeordnete Potentialfunktion im Außengebiet von G. Dann existiert eine in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ anwachsende Funktion $M(P)$ derart, daß außerhalb G

$$u(P) = \int \overset{\infty}{\ldots} \int d\,M(P) \tag{1}$$

gilt. $M(P)$ kennzeichnet die Ladungsverteilung. Die Gesamtladung

$$C = \int \underset{-\infty}{\overset{\infty}{\ldots}} \int d\,M(P)$$

heißt die *Kapazität des Gebietes* G.

Die in der beschriebenen Weise den Randwerten $f(P)$ zugeordnete Potentialfunktion nimmt möglicherweise bei Annäherung an einen Randpunkt P nicht den Grenzwert $f(P)$ an. Ein solcher Randpunkt heiße *irregulär*. *Regulär* heiße ein Randpunkt P, wenn mit $P_\nu \to P$ die Relation $u(P_\nu) \to f(P)$ besteht, und zwar bei beliebiger Annäherung und für jede stetige Randfunktion f.

[1] WIENER, NORBERT: Certain Notions in Potential Theory. J. Math. Physics Bd. 3 (1924) S. 24—51. — The Dirichlet Problem. J. Math. Physics Bd. 3 (1924) S. 127—146.

Ein hinreichendes Kriterium für die Regularität eines Randpunktes ergibt sich aus den Überlegungen von § 4,1: Ein Randpunkt P ist regulär, wenn sich in P mit P als Scheitel ein Tetraeder anlegen läßt, dessen Inneres außerhalb von G liegt.

Ein *notwendiges und hinreichendes Kriterium* wird in dem folgenden Satz von WIENER ausgesprochen: *Es sei λ eine positive Zahl < 1 und γ_n die Kapazität der Menge aller Punkte Q, die nicht zu G gehören und zwischen den Kugelschalen*

$$\lambda^n \leqq \overline{PQ} \leqq \lambda^{n-1} \tag{2}$$

um P als Mittelpunkt liegen. Dann ist P regulär oder irregulär, je nachdem die Reihe

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\gamma_\nu}{\lambda^\nu} \tag{3}$$

divergiert oder konvergiert.

2. Nichtlineare Differentialgleichungen. a) Die in manchen mathematischen und physikalischen Problemen auftretende Randwertaufgabe der Differentialgleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = e^u \qquad (u = f \text{ auf } \Gamma) \tag{4}$$

läßt sich[1] in der folgenden Weise lösen. Es sei $w(x, y)$ die Lösung der Randwertaufgabe $\Delta w = 0$; $w = f$ auf Γ. Dann genügt die Funktion $v = u - w$ der Differentialgleichung

$$\Delta v - e^w v = e^w (e^v - v) \tag{5}$$

und besitzt auf Γ die Randwerte $v = 0$. Ist nun $K(x, y; \xi, \eta)$ die in G nirgends negative Greensche Funktion der Gleichung $\Delta v - e^w v = 0$, so ergibt sich für v sofort die nichtlineare Integralgleichung

$$v = -\iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, e^w (e^v - v)\, d\xi\, d\eta; \tag{6}$$

ihre Lösung läßt sich durch sukzessive Approximation in der Form

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -\iint_G K(x, y; \xi, \eta)\, e^w (e^{v_n} - v_n)\, d\xi\, d\eta \\ v_0 &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

als Grenzfunktion der Folge v_n gewinnen.

Zunächst folgt wegen $K \geqq 0$ und $v_1 = -\iint K e^w d\xi\, d\eta = -S < 0$ durch Induktion $v_n < 0$; denn ist $v_{n-1} < 0$, so gilt $e^{v_{n-1}} - v_{n-1} > 0$ und somit wegen (7) auch $v_n < 0$. Ebenso ergibt sich aus $v_1 - v_0 < 0$ und

$$v_{n+1} - v_n = -\iint_G K e^w \left[v_{n-1} - v_n + e^{v_{n-1}}(e^{v_n - v_{n-1}} - 1)\right] \tag{7'}$$

wiederum durch Induktion die Ungleichung

$$v_{n+1} - v_n < 0.$$

[1] Vgl. BIEBERBACH: Göttinger Nachr. 1912 S. 599—602.

Denn nehmen wir an: $v_n - v_{n-1} < 0$, so ist

$$1 - e^{v_n - v_{n-1}} < v_{n-1} - v_n$$

und daher

$$v_{n-1} - v_n + e^{v_{n-1}}\left(e^{v_n - v_{n-1}} - 1\right) > (v_{n-1} - v_n)(1 - e^{v_{n-1}}).$$

Die rechte Seite aber ist wegen $v_{n-1} < 0$ und $v_{n-1} - v_n < 0$ positiv. Somit folgt aus (7'): $v_{n+1} - v_n < 0$. Ferner erhalten wir nunmehr aus (7'):

$$v_n - v_{n+1} < \iint_G K\, e^{w}(v_{n-1} - v_n)\, d\xi\, d\eta$$

und hieraus, wenn wir mit M_n das Maximum von $v_n - v_{n-1}$ und mit S_0 das Maximum von S in $G + \Gamma$ bezeichnen, die Ungleichung

$$M_n \leqq M_{n-1}\, S_0 .$$

Somit folgt

$$0 < v_n - v_{n+1} \leqq M_1\, S_0^{n-1} = S_0^n$$

und daraus die Konvergenz der Folge v_n unter Benutzung von $S = \iint_G K\, e^{\omega}\, d\xi\, d\eta < 1$. Die Grenzfunktion genügt der Integralgleichung (6) und folglich auch der Differentialgleichung (4) mit den Randwerten Null.

b) In ähnlicher Weise läßt sich allgemeiner die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für die Differentialgleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{8}$$

nachweisen, sobald das *Grundgebiet G hinreichend klein* gewählt ist. Es genügt, den Beweis für die Randwerte $u = 0$ zu führen. f sei eine stetige und stetig differenzierbare Funktion seiner fünf Argumente. Es sei $K(x, y; \xi, \eta)$ die Greensche Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$. Wir bilden gemäß der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -\iint K(x, y; \xi, \eta)\, f\left(\xi, \eta, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial \xi}, \frac{\partial u_n}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta \\ u_0 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

sukzessive die Folge $u_0, u_1, \ldots$. Es seien μ und L zwei positive Zahlen, derart, daß $f(x, y, v, v_x, v_y) \leqq \mu$ gilt, sobald v den Ungleichungen $|v| \leqq L$, $|v_x| \leqq L$, $|v_y| \leqq L$ genügt. Sind diese Ungleichungen für u_n erfüllt, so folgt aus (9):

$$|u_{n+1}| \leqq a\mu$$

$$\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right| \leqq a\mu$$

$$\left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right| \leqq a\mu,$$

wobei a das Maximum der Ausdrücke

$$\iint K\, d\xi\, d\eta, \quad \iint |K_x|\, d\xi\, d\eta, \quad \iint |K_y|\, d\xi\, d\eta$$

in G bedeutet und offenbar mit dem Flächeninhalt von G gegen Null strebt. Wählen wir also G so klein, daß $a \leqq \frac{L}{n}$ gilt, so folgt

$$|u_{n+1}| \leqq L, \qquad \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\right| \leqq L, \qquad \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\right| \leqq L.$$

Diese Ungleichungen gelten somit für alle u_n, da sie für $u_0 = 0$ gelten.

Setzen wir ferner

$$D_n(x, y) = |u_{n+1} - u_n| + \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y}\right|$$

so erkennt man aus (9) leicht die Relation

$$D_{n+1}(x, y) \leqq \iint_G K^*(x, y; \xi, \eta)\, D_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{10}$$

wobei K^* eine gewisse positive Funktion ist, deren Integral

$$\iint_G K^*(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

wiederum mit dem Flächeninhalt von G gegen Null konvergiert. Bei hinreichend kleinem G gilt $\iint K^*\, d\xi\, d\eta \leqq S < 1$ und somit

$$M_n < M_0 S^n, \tag{11}$$

wenn M_n das Maximum des Ausdrucks D_n in G bezeichnet. Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen u_n, $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ im Gebiet G. Die Grenzfunktion u genügt der Integralgleichung

$$u(x, y) = -\iint K(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\zeta)\, d\xi\, d\eta. \tag{12}$$

Ähnlich zeigt man die Konvergenz auch der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}$ und erkennt alsdann aus (12) das Bestehen der Differentialgleichung (8) und die Annahme der Randwerte $u = 0$ auf Γ.

c) Für *nichtlineare Differentialgleichungen in der allgemeinen Form*

$$N[u] = F(r, s, t, p, q, u, x, y) = 0, \tag{13}$$

wobei F eine in einem achtdimensionalen Gebiet stetige und stetig differenzierbare Funktion ihrer acht Argumente sei, läßt sich ein sinnvolles Randwertproblem in der folgenden Weise formulieren.

Es existiere eine Lösung $u(x, y)$ der Gleichung (13) — ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde $u \equiv 0$ als Lösung angenommen —, für welche (13) elliptisch, d. h. die quadratische Form $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$ sei in G positiv definit, ist. Dabei ist

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_{u\equiv 0} \qquad B = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{u\equiv 0} \qquad C = \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{u\equiv 0} \tag{14}$$

Wir fragen: *Gibt es bei hinreichend kleinem ε eine Lösung der Gleichung* (13), *die auf Γ die Randwerte $u = \varepsilon\varphi(x, y)$ annimmt, wobei $\varphi(x, y)$ eine willkürliche, in $G + \Gamma$ stetige Funktion ist?*

Zur Beantwortung dieser Frage wählt man das folgende *sukzessive Approximationsverfahren*. Wir setzen

$$(15)\qquad a = \frac{\partial F}{\partial p}\Big|_{u=0}, \qquad b = \frac{\partial F}{\partial q}\Big|_{u=0}, \qquad c = \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{u=0}$$

und betrachten die mit den Koeffizienten (14) und (15) gebildete lineare elliptische Differentialgleichung

$$(16)\qquad L_0[u] = A\,u_{xx} + 2\,B u_{xy} + C u_{yy} + a u_x + b u_y + c\,u = 0.$$

(Jacobische Differentialgleichung).

Es sei $u_0(x, y)$ die als existierend vorausgesetzte Lösung dieser Gleichung, die auf Γ die Randwerte $u_0 = \varepsilon\varphi$ annimmt.

Mit Hilfe von u_0 bestimmen wir die Koeffizienten

$$(17)\qquad \begin{array}{lll} A_1 = \dfrac{\partial F}{\partial r} & B_1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial s} & C_1 = \dfrac{\partial F}{\partial t}\Big|_{u=u} \\ a_1 = \dfrac{\partial F}{\partial p} & b_1 = \dfrac{\partial F}{\partial q}\Big|_{u} & c_1 = \dfrac{\partial F}{\partial u} \end{array}$$

und suchen eine auf Γ verschwindende Lösung w_1 der unhomogenen Differentialgleichung

$$(18)\qquad L_1[u] = A_1 u_{xx} + 2\,B_1 u_{xy} + C_1 u_{yy} + a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 u = N[u_0].$$

Wir setzen $u_1 = u_0 + w_1$ und bilden in analoger Weise mit Hilfe von u_1 die Koeffizienten $A_2, \ldots, c_2$. w_2 sei die Lösung der Gleichung $L_2[u] = N[u_1]$ mit den Randwerten $w_2 = 0$ auf Γ und $u_2 = u_1 + w_2$.

Dann kann durch hinreichend kleine Wahl von ε und G erreicht werden, daß die Fortsetzung des Verfahrens zu stets lösbaren linearen Randwertproblemen führt und daß alsdann die entsprechende Folge u_n gegen eine Grenzfunktion u konvergiert, die der Gleichung (13) und der Randbedingung $u = \varepsilon\varphi$ genügt[1].

Lehrbuchliteratur zum vierten Kapitel.

PICARD: Traité d'analyse. Paris.
GOURSAT: Cours d'analyse, insbesondere Band 2 und 3. Paris.
POINCARÉ: Potentiel Newtonien. Paris.
KELLOGG: Potential, Theory, Bd. 21 dieser Sammlung.

[1] Unter der Annahme, daß F in seinen Argumenten analytisch und Γ eine analytische Kurve ist, wird der Beweis bei GIRAUD erbracht: GIRAUD: Sur le problème de DIRICHLET. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. Bd. 43

Fünftes Kapitel.

Hyperbolische Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

Während elliptische Differentialgleichungen im allgemeinen physikalischen Gleichgewichtszuständen entsprechen, werden Schwingungen und Ausbreitungsvorgänge durch hyperbolische Differentialgleichungen dargestellt — den Grenzfall der parabolischen Differentialgleichungen lassen wir hier beiseite — wobei dann als eine der beiden unabhängigen Veränderlichen die Zeit t auftritt (vgl. Kap. III, § 7).

Wiederum spielt bei diesen hyperbolischen Differentialgleichungen der *Begriff der Charakteristiken* eine entscheidende Rolle, den wir hier und im VI. Kapitel für Differentialgleichungsprobleme höherer Ordnung analog zu den Ausführungen von Kapitel II, Anh. § 1, Differentialgleichungen erster Ordnung betreffend, entwickeln wollen.

Bei zwei unabhängigen Veränderlichen werden wir *charakteristische Kurven* sowie zugehörige *charakteristische Streifen erster und höherer Ordnung* zu betrachten haben; bei $n > 2$ *charakteristische Mannigfaltigkeiten* bzw. *Streifenmannigfaltigkeiten von* $n-1$ *Dimensionen* und in diesen Mannigfaltigkeiten wiederum *charakteristische Strahlen* ähnlich wie in Kapitel II für Differentialgleichungen erster Ordnung. Im vorliegenden V. Kapitel behandeln wir den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen, welcher einer systematischen und vollständigen Behandlung ebenso zugänglich ist wie der Fall von Differentialgleichungen erster Ordnung. Es wird sich zeigen, daß wir die Existenz und die *Konstruktion der Lösungen des Anfangswertproblems* ganz allgemein mit Hilfe des *Piccardschen Iterationsverfahrens* sichern können, und daß damit zugleich auch die Frage nach der *Eindeutigkeit der Lösungen* und nach ihrem *Abhängigkeitsgebiet* beantwortet wird. Zwar ist dadurch nicht mehr wie bei Differentialgleichungen erster Ordnung eine Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen geleistet. Da jedoch auch der Existenzbeweis und die Konstruktion der Lösungen für gewöhnliche Differentialgleichungen am einfachsten mit Hilfe des Piccardschen Iterationsverfahrens durchgeführt werden, so kann die hier gegebene Lösung als prinzipiell ebenso einfach wie eine Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen gelten.

Bevor wir diese Lösungstheorie allgemein entwickeln, wollen wir im ersten Teil dieses Kapitels den Charakteristikenbegriff von verschiedenen Seiten her beleuchten.

§ 1. Die Charakteristiken bei quasilinearen Differentialgleichungen.

1. Definition der Charakteristiken. Wir betrachten für die Funktion $u(x, y)$ mit den Ableitungen

$$u_x = p, \quad u_y = q, \quad u_{xx} = r, \quad u_{xy} = s, \quad u_{yy} = t$$

den Differentialausdruck

$$L[u] = ar + bs + ct \tag{1}$$

bzw. die Differentialgleichung

$$L[u] + d = ar + bs + ct + d = 0, \tag{2}$$

wobei a, b, c, d in dem zugrunde gelegten Bereich gegebene Funktionen der Größen x, y, u, p, q sind und grundsätzlich hier, wie auch sonst im folgenden, vorausgesetzt wird, daß alle vorkommenden Funktionen und Ableitungen stetig sind, soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist. Wir wollen nunmehr die in Kapitel III, § 2 bei der Transformation auf Normalform eingeführten charakteristischen Parameter ξ, η unabhängig von der dortigen Herleitung in ihrer Bedeutung kennzeichnen, indem wir ähnlich wie in Kapitel II von dem Anfangswertproblem ausgehen.

Es sei $u(x, y)$ eine Funktion, welche wir lediglich längs einer Kurve C bzw. eines Streifens erster Ordnung C_1 betrachten. Ein solcher Streifen sei gegeben in Parameterdarstellung mit dem Parameter λ durch die Kurve C: $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $u = u(\lambda)$ und längs dieser Kurve die Koeffizienten einer Tangentialebene $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, welche der Streifenrelation

$$\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y} \tag{3}$$

unterworfen sind, wobei der Punkt Differentiation nach dem Parameter λ bedeutet. $u(x, y)$ sei irgendeine gegebene Funktion, welche diesen Streifen erster Ordnung C_1 enthält. Wir setzen voraus, daß längs C gilt

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0.$$

Gelegentlich ist es auch zweckmäßig, den Streifen C_1 durch eine Grundkurve C_0 der x, y-Ebene, gegeben durch $\varphi(x, y) = 0$ zu definieren — also durch eine Kurve der x, y-Ebene —, und auf ihr eine „Belegung“ u, p, q vorzuschreiben, welche der obigen Streifenrelation (3) genügt, wenn die Grundmannigfaltigkeit mit Hilfe eines Parameters λ wie oben dargestellt wird. Wir nehmen dabei an, daß die Kurve $\varphi = 0$ in der x, y-Ebene ebenso wie C auf der Fläche $u = u(x, y)$ ein Gebiet $\varphi < 0$ von einem Gebiet $\varphi > 0$ trennt.

Unser Ausgangspunkt ist nun die folgende Frage: *Was besagt die Differentialgleichung* (2) *längs C_1 für die höheren Ableitungen von u?* Insbesondere: *Sind durch Vorgabe des Streifens erster Ordnung C_1 längs*

dieses Streifens vermöge der Differentialgleichung (2) *auch die Ableitungen zweiter Ordnung von u und die höheren Ableitungen von u bestimmt?*

Beachten wir, daß auch für die Ableitungen p, q längs des Streifens C_1 die Streifenrelationen $\dot p = r\dot x + s\dot y$, $\dot q = s\dot x + t\dot y$ bestehen, so erhalten wir sofort die drei Relationen

$$\begin{aligned} a r + b s + c t &= -d \\ \dot x r + \dot y s \quad &= \dot p \\ \dot x s + \dot y t \quad &= \dot q; \end{aligned} \tag{4}$$

also ein System von drei linearen Gleichungen für r, s, t längs C_1, und es ergibt sich sofort als Resultat die folgende grundlegende *Alternative:*

Entweder es gilt für jeden Punkt P von C:

$$\Delta = \begin{matrix} b \\ y \\ \dot x \end{matrix} = a\dot y^2 - b\dot x\dot y + c\dot x^2 \neq 0,$$

dann heißt C_1 ein *allgemeiner Streifen* und es sind längs C_1 die zweite Ableitungen r, s, t eindeutig bestimmt. Oder es ist in einem Punkt P von C:

$$\Delta = a\dot y^2 - b\dot x\dot y + c\dot x^2 = 0. \tag{5}$$

Ein solcher Punkt P des Streifens, in welchem diese sog. *charakteristische Bedingung* besteht, heißt ein *Ausnahmepunkt* des Streifens.

Im folgenden sei vorausgesetzt, daß entweder der *ganze* betrachtete Streifen allgemein ist oder *ganz* aus Ausnahmepunkten besteht. Für einen solchen Streifen besteht zwischen den linken Seiten und also auch den rechten Seiten der Gleichungen (4) eine lineare Beziehung mit Koeffizienten, die nur von x, y, u, p, q abhängen. Diese lineare Beziehung stellt längs C_1 eine neue Bedingung für p, q dar, welche erfüllt sein muß, damit C_1 überhaupt zu einem „*Integralstreifen*" zweiter Ordnung C_2 ergänzt werden kann. Wir nennen einen solchen Integralstreifen zweiter Ordnung C_2, d. h. einen Streifen, welcher der Charakteristikenbedingung (5) *und* der Differentialgleichung (2) genügt, einen *charakteristischen Streifen zweiter Ordnung*, den zugehörigen Streifen erster Ordnung C_1 einen *charakteristischen Streifen erster Ordnung* oder schlechthin einen charakteristischen Streifen; sein Träger C heiße *charakteristische Kurve* und deren Projektion C_0 *charakteristische Grundkurve.*

Längs dieses charakteristischen Streifens C_1 sind die höheren Ableitungen r, s, t nicht mehr eindeutig bestimmt, sondern nur bis auf eine willkürliche additive Lösung der zu (4) gehörigen homogenen Gleichungen.

Dagegen sind längs eines allgemeinen Streifens nicht nur die Ableitungen zweiter Ordnung, sondern auch alle weiteren Ableitungen eindeutig festgelegt. Um z. B. die dritten Ableitungen r_x, s_x, t_x zu erhalten,

differenziere man die Differentialgleichungen nach x und benutze die Streifenbedingungen für die nunmehr schon als bekannt vorausgesetzten Ableitungen r und s längs des Streifens. Dann ergeben sich für die drei gesuchten Größen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a\,r_x + b\,s_x + c\,t_x &= \cdots \\ \dot{x}\,r_x + \dot{y}\,s_x \qquad &= \dot{r} \\ \dot{x}\,s_x + \dot{y}\,t_x &= \dot{s}, \end{aligned}$$

deren rechte Seiten bekannt sind und deren linke Seiten die nicht verschwindende Determinante Δ besitzen.

Wir fassen zusammen: *Entweder ist der Ausgangsstreifen C_1 allgemein, dann bestimmt die Differentialgleichung längs ihm eindeutig die zweiten und höheren Ableitungen von u. Oder C_1 enthält Ausnahmepunkte, welche der Charakteristikenbedingung* (5) *genügen; besteht C_1 ganz aus Ausnahmepunkten, so läßt sich C_1 zu einem Integralstreifen C_2 nur dann ergänzen, wenn längs C_1 noch eine weitere Bedingung erfüllt ist. Der Streifen C_1 heißt dann charakteristisch und seine Ergänzung zu einem Integralstreifen ist nicht mehr eindeutig.*

Betrachten wir z. B. die Differentialgleichung $u_{xy} = 0$ und den Ausgangsstreifen C_1 gegeben durch $x = \lambda$, $y = 0$, $u = 0$, $p = \text{konst.}$, $q = f(\lambda)$. Der Streifen enthält nur Ausnahmepunkte und die Differentialgleichung längs des Streifens besagt $q_x = 0$. Es muß also der Streifen noch der weiteren Einschränkung $q = \text{konst.}$ unterworfen sein, damit er sich zu einem Integralstreifen ergänzen läßt. Mit anderen Worten: unter den betrachteten Ausnahmestreifen sind lediglich die ebenen Streifen charakteristisch.

Man kann zu der Charakteristikenbedingung noch durch die folgende leichter auf n unabhängige Veränderliche verallgemeinerungsfähige Betrachtung gelangen, wobei wir den Streifen C_1 durch seine Grundmannigfaltigkeiten $\varphi(x, y) = 0$ gegeben denken (vgl. I, Anh. § 1 und III, § 2). Wir nennen einen Differentialausdruck zweiter Ordnung längs C_1 einen *inneren Differentialausdruck* oder einen *in C_1 liegenden Ausdruck*, wenn er durch Differentiationsprozesse aus den Daten von C_1 allein gewonnen werden kann. Z. B. ist der Differentialausdruck $u_{xy} = q_x$ in dem soeben betrachteten Streifen $x = \lambda$, $y = 0$, $u = 0$, $p = 0$, $q = f(\lambda)$ ein solcher innerer Ausdruck. Wir stellen nun die folgende Vorfrage: Welche Bedingungen muß unser quasilinearer Differentialausdruck (1) erfüllen, damit er längs C_1 ein innerer Ausdruck wird? Die Antwort lautet: Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß längs C_1 die *Charakteristikenbedingung*

$$a\,\varphi_x^2 + b\,\varphi_x\varphi_y + c\,\varphi_y^2 = Q(\varphi, \varphi) = 0 \tag{6}$$

für die „*charakteristische Form*“ $Q(\varphi, \varphi)$ besteht.

Beweis: Wir führen statt x, y neue Koordinaten $\eta = \varphi(x, y)$ und $\lambda = \psi(x, y)$ ein; d. h. λ ist längs C_1 mit dem oben eingeführten Parameter identisch, während φ eine aus C_1 „herausführende Variable" ist. Dann wird für irgendeine Funktion $u(x, y)$

$$u_{xx} = u_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + 2u_{\varphi\psi}\varphi_x\psi_x + u_{\psi\psi}\psi_x^2 + u_\varphi\varphi_{xx} + u_\psi\psi_{xx}$$
$$u_{xy} = u_{\varphi\varphi}\varphi_x\varphi_y + u_{\varphi\psi}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + u_{\psi\psi}\psi_x\psi_y + u_\varphi\varphi_{xy} + u_\psi\psi_{xy}$$
$$u_{yy} = u_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 + 2u_{\varphi\psi}\varphi_y\psi_y + u_{\psi\psi}\psi_y^2 + u_\varphi\varphi_{yy} + u_\psi\psi_{yy}$$

und daher, wenn $Q(\varphi, \psi)$ die Polarform der quadratischen Form Q bedeutet:

$$(7) \qquad L[u] = u_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi) + 2u_{\varphi\psi}Q(\varphi, \psi) + u_{\psi\psi}Q(\psi, \psi) + u_\varphi L[\varphi] + u_\psi L[\psi].$$

Längs C_1 bedeutet Differentiation nach $\psi = \lambda$ innere Differentiation, während die Differentiation nach φ die aus C_1 hinausführende Differentiation ist (vgl. Kap. II, Anh. § 1). Längs C_1 sind u und die ersten Ableitungen von u bekannt, sowie alle Ableitungen zweiter Ordnung, welche sich aus Ableitungen erster Ordnung durch Differentiation nach $\lambda = \psi$ ergeben. Somit ist der einzige Term in $L[u]$, welcher nicht in C_1 liegende Ableitungen zweiter Ordnung enthält, der Ausdruck $u_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi)$. Daher ist die Bedingung $Q(\varphi, \varphi) = 0$ längs $\varphi = 0$ notwendig und hinreichend für die Charakterisierung von $L[u]$ als innerer Ausdruck, was behauptet wurde.

Nunmehr betrachten wir die Differentialgleichung

$$L[u] + d = 0$$

und erkennen wiederum unmittelbar die *Alternative:* Entweder es ist für jeden Punkt von C der Ausdruck $Q \neq 0$, dann ist längs C die hinausführende Ableitung $u_{\varphi\varphi}$ eindeutig bestimmt, und mit ihr sämtliche zweiten Ableitungen von u, oder es ist $Q = 0$, in einem Punkt P von C_1, dann bedeutet die Differentialgleichung $L + d = 0$ in dem Punkt von C_1 eine weitere Bedingung für die Streifengrößen. Besteht $Q = 0$ überall längs C_1 und betrachten wir längs dieses Streifens C_1 die Ableitungen von u als gegeben, so hat diese neue Bedingung die Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung für die Größen $u_\varphi = \varkappa$ als Funktion von $\psi = \lambda$ nämlich

$$(8) \qquad 2\varkappa_\lambda Q(\varphi, \psi) + \varkappa L[\varphi] + \cdots = 0,$$

wo die Punkte Ausdrücke bedeuten, welche längs des Streifens durch u, p, q und Differentiationsprozesse mit Bezug auf λ bekannt sind.

Naturgemäß ist die Charakteristikenbedingung in der Form (6) mit der in der Form (5) äquivalent. In der Tat ist $\varphi(x, y) = 0$ die Projektion der Kurve C auf die x, y-Ebene und somit

$$\varphi_x\dot{x} + \varphi_y\dot{y} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \varphi_x : \varphi_y = -\dot{y} : \dot{x}.$$

Die linke Seite von (6) stimmt daher bis auf einen Faktor mit der linken Seite von (5) überein.

Beiläufig bemerkt sind die Größen φ_x und φ_y, die sog. Tangentialkoordinaten der Kurve $\varphi = 0$, proportional zu den Richtungscosinus der Normale auf der Kurve, d. h. zu den Größen $\frac{\partial x}{\partial \nu}$ bzw. $\frac{\partial y}{\partial \nu}$, wobei $\frac{\partial}{\partial \nu}$ Differentiation nach der Normalrichtung ν bedeutet:

$$\frac{\partial x}{\partial \nu} = \frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \nu} = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}}.$$

Es sei hervorgehoben: *ein Streifen C_1 kann nur dann charakteristisch sein, wenn auf ihm*

$$4ac - b^2 \leqq 0$$

ist, weil sonst die Gleichungen (5) bzw. (6) nicht durch reelle Verhältnisse $\varphi_x : \varphi_y$ bzw. $\dot{x} : \dot{y}$ erfüllt werden können.

Wir führen folgende Definitionen ein: Der Differentialausdruck $a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy}$ heißt *hyperbolisch an einer Stelle* x, y, u, p, q des fünfdimensionalen (x, y, u, p, q)-Raumes, wenn dort

$$(9) \qquad 4ac - b^2 < 0$$

gilt; ebenso heißt er *hyperbolisch längs eines Streifens oder auf einer Fläche* $u = u(x, y)$ mit $p = u_x$, $q = u_y$, wenn dort überall die Bedingung (9) besteht.

Wir werden im folgenden stets voraussetzen, daß die Differentialausdrücke an den betreffenden Stellen usw. hyperbolisch sind.

Wenn der Differentialausdruck linear ist, hängt der hyperbolische Charakter nur von x, y, nicht aber von u, p, q ab; insbesondere sind dann die charakteristischen Grundkurven durch den Differentialausdruck unabhängig von u, p, q bestimmt.

Schließlich sei noch folgende wichtige Bemerkung erwähnt: *Die Charakteristikenbedingungen einer Differentialgleichung* (2) *sind invariant gegenüber beliebigen Transformationen der unabhängigen Veränderlichen x, y.*

Diese Tatsache folgt begrifflich sofort aus der Bedeutung der Charakteristikenbedingung als notwendiges und hinreichendes Kennzeichen des Charakters von $L[u]$ als inneren Ausdruckes auf C_1. Der Beweis ergibt sich aber auch rechnerisch folgendermaßen:

Es möge bei der Transformation von x, y in ξ, η gelten

$$u(x, y) = u(\xi, \eta), \qquad \varphi(x, y) = \varphi(\xi, \eta)$$

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} + d = \alpha u_{\xi\xi} + \beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \delta$$

wobei rechts die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Funktionen von $\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta$ sind. Dann gilt, wie man leicht nachrechnet,

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = \alpha\varphi_\xi^2 + \beta\varphi_\xi\varphi_\eta + \gamma\varphi_\eta^2,$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

2. Charakteristiken auf Integralflächen. Während wir uns bisher zur Präzisierung der begrifflichen Aussagen auf die Diskussion der Veränderlichen längs eines Streifens beschränkt haben, betrachten wir nunmehr den gesamten Verlauf einer Fläche $J: u = u(x, y)$, welche wir als Integralfläche der Differentialgleichung (2) annehmen. Längs dieser Integralfläche sind nicht nur u sondern auch $p = u_x$ und $q = u_y$ und somit auch die Koeffizienten a, b, c, d gegebene Funktionen von x und y. Wir setzen voraus, daß längs der ganzen betrachteten Integralfläche die Bedingung

$$4ac - b^2 < 0$$

gilt, d. h. daß sie vom hyperbolischen Typus ist. Dann definiert die Charakteristikenbedingung

$$a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0$$

zwei verschiedene reelle Werte $-\frac{\mu_1}{\lambda_1}$ bzw. $-\frac{\mu_2}{\lambda_2}$ für das Verhältnis $\dot{y} : \dot{x}$ und somit zwei verschiedene einparametrige Scharen charakteristischer Kurven auf der Integralfläche als Lösungen der entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mu_1}{\lambda_1} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\mu_2}{\lambda_2}.$$

Im elliptischen Fall $4ac - b^2 > 0$ gibt es keine solchen Charakteristiken. Im parabolischen Grenzfall $4ac - b^2 = 0$ fallen die beiden charakteristischen Scharen in eine einzige Schar zusammen.

Aus der in Nr. 1 diskutierten Bedeutung der charakteristischen Streifen entnehmen wir, daß keine anderen als charakteristische Streifen *Verzweigungsstreifen* einer Integralfläche sein können; dabei verstehen wir unter Verzweigungsstreifen einen Streifen, längs dessen sich zwei verschiedene Integralflächen berühren, so daß eine Integralfläche über den Streifen hinweg stetig und mit stetigen ersten Ableitungen in eine andere Integralfläche übergehen kann. Da längs eines nicht charakteristischen Integralstreifens auch die höheren Ableitungen eindeutig bestimmt sind, müssen auch Verzweigungsstreifen höherer Ordnung, längs deren sich verschiedene Integralflächen von höherer Ordnung berühren, charakteristisch sein. Ist für eine Differentialgleichung eine Integralfläche vom elliptischen Typus, so kann es auf ihr keine Verzweigungsstreifen geben. Setzen wir zudem noch voraus, daß die Differentialgleichung analytisch ist, und daß daher längs jedes Streifens auf der Integralfläche alle Ableitungen eindeutig bestimmt sind, so liegt die Vermutung nahe, daß jede derartige Lösung vom elliptischen Typus *eine analytische Funktion* sein muß. Einen Beweis hierfür werden wir im Anhang geben. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß jedenfalls nicht analytische Lösungen existieren, sobald Verzweigungsstreifen vorliegen, weil der analytische Charakter eine Mehrdeutigkeit bei der Fortsetzung eines Streifens zu einer Integralfläche ausschließt.

Wir betrachten zum Schluß nochmals die Charakteristikenbedingung auf der Integralfläche J in der Form

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0. \tag{6}$$

Sie hat die Gestalt einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für φ. Da jedoch diese Gleichung für die Funktion φ nur unter der Bedingung $\varphi = 0$ erfüllt zu sein braucht, ist sie zunächst noch keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, geht vielmehr, indem man aus $\varphi = 0$ die Größe y implizite als Funktion von x berechnet denkt, in die gewöhnliche Differentialgleichung (5) über. Andererseits, betrachten wir die Gleichung (6) als partielle Differentialgleichung für φ, und ist φ irgendeine Lösung, so ist nicht nur die eine Kurve $\varphi(x, y) = 0$ auf J charakteristisch, sondern es stellt die ganze Funktionen*schar* $\varphi = c =$ konst., eine einparametrige Schar von charakteristischen Kurven auf J dar; umgekehrt muß, wenn $\varphi =$ konst. eine solche Schar von Charakteristiken darstellt, die Funktion φ die obige Gleichung (6) als partielle Differentialgleichung befriedigen.

Betrachten wir beispielsweise die Differentialgleichung $u_{xy} = 0$. Die Charakteristikenbedingung lautet $\varphi_x\varphi_y = 0$ für $\varphi = 0$. Sie wird erfüllt von $\varphi = (x - a)(y - b)$ bei beliebigem a und b. Mit anderen Worten, das aus den Geraden $x = a$ und $y = b$ bestehende Geradenpaar ist eine charakteristische Grundkurve. Jedoch ist die Gleichung $\varphi_x\varphi_y = 0$ keineswegs identisch in x, y erfüllt, vielmehr gilt die Gleichung $\varphi_x\varphi_y = \varphi$. Da die Charakteristikenbedingung $\varphi_x\varphi_y = 0$ durch $\varphi = x$ oder $\varphi = y$ identisch erfüllt ist, so liefern die Kurvenscharen $x =$ konst. bzw. $y =$ konst. Scharen charakteristischer Kurven.

3. Charakteristiken als Unstetigkeitslinien. Wellenfronten. In Übereinstimmung mit der Auffassung der Charakteristiken als mögliche Verzweigungslinien von Integralflächen können wir zum Charakteristikenbegriff auch durch folgende Fragestellung gelangen: $u = u(x, y)$ sei eine Integralfläche J von (2) und auf ihr sei durch $\varphi(x, y) = 0$ eine Kurve C mit einem Streifen erster Ordnung C_1 bestimmt, wobei C ein Gebiet $\varphi > 0$ von einem Gebiet $\varphi < 0$ trennt. Wir fragen: *Wie muß die Kurve C beschaffen sein, damit u längs ihr sprunghafte Unstetigkeiten in den Ableitungen zweiter oder höherer Ordnung besitzen kann?* Dabei setzen wir voraus, daß innere Ableitungen längs $\varphi = 0$ stetig bleiben in folgendem Sinn: sind wie oben $\lambda = \psi$ und $\eta = \varphi$ Koordinaten auf J in einer Umgebung von C, wobei λ der Parameter auf C ist, so sollen alle Ableitungen von u, p, q nach λ beim Überschreiten von C stetig bleiben.

Wir bezeichnen mit (f) den Sprung einer Funktion f beim Überschreiten von C in Richtung wachsender Werte von φ. Nach Voraussetzung ist u_x stetig und ebenso die innere Ableitung (vgl. Kap. II, Anh. § 1) von u_x, gegeben durch $u_{xx}\varphi_y - u_{xy}\varphi_x$, ebenso wie die innere Ableitung von u_y, gegeben durch $u_{xy}\varphi_y - u_{yy}\varphi_x$. Wir haben somit für die Sprünge

die beiden Relationen

$$(u_{xx})\,\varphi_y - (u_{xy})\,\varphi_x = 0$$
$$(u_{xy})\,\varphi_y - (u_{yy})\,\varphi_x = 0,$$

aus denen sofort mit einem Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ folgt

$$(u_{xx}) = \varkappa\,\varphi_x^2, \qquad (u_{xy}) = \varkappa\,\varphi_x\,\varphi_y, \qquad (u_{yy}) = \varkappa\,\varphi_y^2.$$

Beiläufig bemerkt ist, wie man leicht erkennt: $\varkappa = (u_{\varphi\varphi})$. Betrachtet man nur die Differentialgleichung (2) in zwei Punkten P_1 und P_2 zu verschiedenen Seiten der Kurve C auf J, subtrahiert die beiden Gleichungen voneinander und läßt P_1 und P_2 in einen Punkt P von C rücken (Abb. 28), so heben sich die stetig bleibenden Terme bei der Subtraktion auf und es bleibt übrig

$$a\,(u_{xx}) + b\,(u_{xy}) + c\,(u_{yy}) = 0$$

oder gemäß unserem obigen Resultat nach Unterdrückung des Faktors $\varkappa$:

Abb. 28.

$$a\,\varphi_x^2 + b\,\varphi_x\,\varphi_y + c\,\varphi_y^2 = 0,$$

d. h. die charakteristische Relation. Unstetigkeiten der angegebenen Art können also in der Tat nur längs einer Charakteristik auftreten.

Zur physikalischen Deutung setzen wir $y = t$ und stellen uns unter $u(x, t)$ eine „Welle" vor, d. h. eine durch u charakterisierte Größe, die sich im x-Raum mit der Zeit t verändert. Wenn nun diese Welle längs der Charakteristik $\varphi(x, t) = 0$ eine Unstetigkeit besitzt, so denken wir uns $\varphi = 0$ aufgelöst in der Form $x = x(t)$ mit

$$x_t = -\frac{\varphi_t}{\varphi_x}.$$

Dann können wir die Unstetigkeitslinie $\varphi = 0$ in der (x, t)-Ebene deuten als einen Unstetigkeitspunkt x, welcher sich längs der x-Achse mit der Zeit t und der Geschwindigkeit x_t bewegt. Ist insbesondere auf der einen Seite der Kurve $\varphi = 0$ überall $u = 0$, während u auf der anderen Seite von Null verschieden sein kann, so erscheint der sich bewegende Unstetigkeitspunkt x als *Kopf* oder *Front der sich ausbreitenden Welle* u.

Der Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ wird dabei als das Maß dieser sich fortpflanzenden Unstetigkeit anzusehen sein.

Für diesen Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ gilt die folgende sehr bemerkenswerte Tatsache: *Der Faktor $\varkappa$ erfüllt längs der Charakteristik C eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung*, nämlich

$$\alpha\,\varkappa_\lambda + \beta\,\varkappa = 0,$$

wobei die Koeffizienten α und β durch

$$\alpha = 2\,Q(\varphi, \psi), \qquad \beta = L[\varphi] + Q_\varphi(\varphi, \varphi)$$

gegeben sind. Differenzieren wir nämlich die Differentialgleichung (2) nach ihrer Transformation auf φ und ψ in der Form (7) nach φ und schreiben sie für die zwei Punkte P_1 und P_2 wie oben, subtrahieren und lassen dann P_1 und P_2 gegen P streben, so ergibt sich unser Resultat unmittelbar, indem wir die charakteristische Bedingung $Q(\varphi, \varphi) = 0$ für $\varphi = 0$ berücksichtigen.

Aus dem Resultat folgt sofort, daß der Unstetigkeitsfaktor $\varkappa$ entweder nirgends oder überall längs des betrachteten Stückes der x-Achse verschwindet.

Zusätzlich sei folgendes bemerkt: Wir haben soeben Unstetigkeiten in den zweiten — oder auch höheren — Ableitungen betrachtet. Unstetigkeiten in den ersten Ableitungen können tatsächlich längs einer beliebigen allgemeinen Kurve C auftreten. Wir können nämlich C in zwei verschiedenen Weisen zu einem allgemeinen Streifen C_1 ergänzen, alsdann, wie wir im zweiten Teil dieses Kapitels sehen werden, das entsprechende Anfangswertproblem lösen und durch Zusammenfügung der einen Lösung auf der einen, mit der anderen Lösung auf der anderen Seite von C eine Lösung u mit unstetigen ersten Ableitungen längs C erhalten. Trotzdem werden wir sehen, daß auch für solche Unstetigkeiten erster Ordnung die Charakteristiken im Gegensatz zu beliebigen Kurven C eine ausgezeichnete Rolle spielen, vorausgesetzt daß in den Koeffizienten a, b, c, d höchstens die Funktion u aber nicht mehr die Ableitungen p und q auftreten (vgl. die entsprechenden allgemeinen Betrachtungen in Kapitel VI, § 2 und Anh. § 4). Hier sei nur hervorgehoben, daß auch dann für die Sprunggrößen

$$\varkappa = (u_\varphi)$$

eine entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$2\varkappa_\lambda Q(\varphi, \psi) + \varkappa L[\varphi] = 0$$

längs der Kurve C gilt, was in derselben Weise wie oben folgt.

§ 2. Charakteristiken für allgemeine Differentialgleichungsprobleme.

1. Allgemeine Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Übertragung unserer Resultate auf eine allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1}$$

ist einfach. Wir betrachten wiederum eine Kurve C im x, y, u-Raum, die wir zu einem Streifen erster Ordnung C_1 bzw. zu einem Streifen zweiter Ordnung C_2 ergänzt denken. Wir setzen von vornherein voraus, daß C_2 ein Integralstreifen ist, d. h. daß die zugehörigen Größen x, y, u, p, q, r, s, t der Gleichung $F = 0$ genügen. λ sei der Parameter längs

der Kurve C, deren Projektion C_0 auf die x, y-Ebene durch die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ gegeben sei. λ und φ denken wir uns als neue Koordinaten in der Umgebung der Grundkurve C_0 eingeführt. Wir können dann die Charakteristikenbedingung folgendermaßen gewinnen. Bei Einführung der neuen Koordinaten λ, φ, gehe die Funktion $u(x, y)$ über in $u(\lambda, \varphi)$ und möge gelten

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = G(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi}, u_{\varphi\varphi}).$$

Der Anfangsintegralstreifen C_2 heißt dann *charakteristisch*, wenn längs ihm durch die Differentialgleichung nicht auch alle höheren Ableitungen insbesondere die dritten Ableitungen von u bestimmt sind. Läßt sich aus der Differentialgleichung $G = 0$ längs des Streifens die zweite hinausführende Ableitung $u_{\varphi\varphi}$ berechnen, d. h. läßt sich die Differentialgleichung in die Form

$$u_{\varphi\varphi} = g(\lambda, \varphi, u, u_\lambda, u_\varphi, u_{\lambda\lambda}, u_{\lambda\varphi})$$

setzen, so gewinnen wir durch Differentiation nach φ die dritte Ableitung, $u_{\varphi\varphi\varphi}$, welche aus dem Streifen herausführt und mit ihr, wie man leicht sieht, alle weiteren dritten Ableitungen längs des Streifens C_2. Wollen wir diese Möglichkeit ausschließen, so müssen wir die Nichtauflösbarkeit der Gleichung $G = 0$ hinsichtlich $u_{\varphi\varphi}$ verlangen, d. h. es muß längs des Streifens die Gleichung

$$G_{u_{\varphi\varphi}} = 0$$

bestehen. Man findet leicht, daß sich diese Bedingung in die Form

$$F_r \varphi_x^2 + F_s \varphi_x \varphi_y + F_t \varphi_y^2 = 0 \tag{2}$$

setzen läßt. Die Gleichung (2) nennen wir die *charakteristische Bedingung*. Sie kennzeichnet einen Integralstreifen zweiter Ordnung als *charakteristischen Streifen*.

In einer etwas anderen Weise und mehr im Einklang mit den Überlegungen von § 1,1 gelangen wir zu der charakteristischen Bedingung folgendermaßen. Um längs des Anfangsstreifens C_2 die dritte Ableitung, etwa die Ableitungen r_x, s_x, t_x zu berechnen, differenzieren wir die Differentialgleichung $F = 0$ nach x und gelangen so mit der Abkürzung

$$[F]_x = F_p r + F_q s + F_u p + F_x$$

und unter Benutzung der Streifenrelationen zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F_r r_x + F_s s_x + F_t t_x &= -[F]_x \\ \dot{x} r_x + \dot{y} s_x \quad\quad &= \dot{r} \\ \dot{x} s_x + \dot{y} t_x &= \dot{s}. \end{aligned}$$

An dieses Gleichungssystem knüpfen sich genau dieselben Überlegungen wie die entsprechenden in § 1. *Wenn die Determinante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{x} \dot{y} + F_t \dot{x}^2$$

von 0 verschieden ist, dann haben wir es mit einem allgemeinen Integralstreifen zu tun, längs dessen die höheren Ableitungen eindeutig bestimmt sind. Verschwindet die Determinante längs des Streifens, dann heißt der Streifen charakteristisch, und es bestehen zwischen den rechten Seiten des linearen Gleichungssystems sowie des entsprechenden, welches durch Differentiation von (1) nach y entsteht, weitere, die Vorgaben längs des Integralstreifens einschränkende Bedingungen. Die charakteristische Bedingung

$$F_r\,\dot{y}^2 - F_s\,\dot{x}\,\dot{y} + F_t\,\dot{x}^2 = 0 \tag{2a}$$

ist, wenn die Grundkurve des Streifens durch $\varphi(x, y) = 0$ ausgedrückt wird, bis auf einen Faktor identisch mit der Bedingung (2).

Die Charakteristikenbedingung kann an einer Stelle eines Streifens C_2 nur dann erfüllt sein, wenn dort

$$4\,F_r F_t - F_s^2 \leqq 0$$

gilt. Analog wie bei quasilinearen Differentialausdrücken definieren wir nun wieder: An einer Stelle des achtdimensionalen (x, y, u, p, q, r, s, t)-Raumes heißt der Differentialausdruck F hyperbolisch, wenn dort unter Ausschluß des Gleichheitszeichens

$$4\,F_r F_t - F_s^2 < 0 \tag{3}$$

gilt. Für einen Streifen zweiter Ordnung bzw. für eine Fläche $u = u(x, y)$ mit $u_x = p, \ldots, u_{yy} = t$ heißt entsprechend der Differentialausdruck F hyperbolisch, wenn dort überall (3) gilt.

Wie im Spezialfall der quasilinearen Gleichungen müssen wir auch hier beachten, daß die Charakteristikenbedingung auf einer Integralfläche nur dann als partielle Differentialgleichung erster Ordnung für φ aufzufassen ist, wenn nicht nur eine einzelne charakteristische Kurve $\varphi = 0$, sondern eine ganze Schar $\varphi =$ konst. gekennzeichnet werden soll.

2. Differentialgleichungen höherer Ordnung. Bei einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für die Funktion $u(x, y)$ führen wir zur Abkürzung die Ausdrücke

$$p_\nu = \frac{\partial^n u}{\partial x^\nu \partial y^{n-\nu}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

ein. Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung können wir dann in der Form

$$F(x, y, u, \ldots, p_0, \ldots, p_n) = 0 \tag{4}$$

schreiben, wobei die Ableitungen niederer als n^{ter} Ordnung nicht ausdrücklich kenntlich gemacht sind. Zum Charakteristikenbegriff und zur Charakteristikenbedingung gelangen wir kurz folgendermaßen: Nehmen wir an, es sei $u = u(x, y)$ eine Integralfläche und auf ihr durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ eine ein Gebiet $\varphi > 0$ von einem Gebiet $\varphi < 0$ trennende Kurve C mit zugehörigem Streifen C_n von der n^{ten} Ordnung gegeben. λ sei ein Parameter in diesem Streifen. Wir führen

dann auf der Integralfläche $u(x, y)$ statt x, y wiederum λ und die aus C herausführende Variable φ als unabhängige Veränderliche ein. Schreiben wir wieder $u(\varphi, \lambda)$ anstatt $u(x, y)$ und bezeichnen mit

$$= \frac{\partial^n u}{\partial \varphi^n}$$

die aus dem Streifen C_n herausführende n^{te} Ableitung von u, so wird

$$p_\nu = \omega\, \varphi_x^\nu \varphi_y^{n-\nu} + \cdots,$$

wo die Punkte $\cdots$ Glieder bedeuten, in denen die n-fache hinausführende Ableitung ω nicht auftritt. Die gegebene Differentialgleichung (4) fassen wir jetzt als Differentialgleichung für $u(\varphi, \lambda)$ auf. Wenn nun längs C die Differentialgleichung (4) in die Form

$$\omega = f(\lambda, \varphi, u, \ldots)$$

gesetzt werden kann, wobei rechts ω selbst nicht mehr explizit auftritt, so können wir durch Differentiation nach φ die $n+1^{\text{te}}$ Ableitung ω_φ, die durch den Streifen C_n von vornherein nicht gegeben ist, sondern aus ihm herausführt, eindeutig bestimmen, und ebenso alle inneren Ableitungen $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung von u. Damit eine solche Bestimmung unmöglich ist — oder wie wir sagen wollen, damit C_n ein *charakteristischer Streifen* ist — ist notwendige Bedingung, daß längs des Streifens die Relation $F_\omega = 0$ identisch in λ besteht. In den alten Variablen geschrieben, geht diese Relation über in die fundamentale *Charakteristikenbedingung*

$$F_{p_n} \varphi_x^n + F_{p_{n-1}} \varphi_x^{n-1} \varphi_y + \cdots + F_{p_0} \varphi_y^n = 0. \tag{5}$$

Wir definieren: Ein Streifen mit der Grundkurve $\varphi = 0$ heißt charakteristisch, wenn erstens längs ihm die Relation (5) besteht und wenn er zweitens ein Integralstreifen ist.

Wir betonen: Diese Definition ist nicht mehr an die Voraussetzung geknüpft, daß der Streifen auf einer von vornherein gegebenen Integralfläche liegt. Es kann bei der Definition des charakteristischen Streifens dahingestellt bleiben, ob er sich in eine solche Integralfläche einbetten läßt, eine Frage, welche wir in § 8 im positiven Sinne beantworten werden.

Nunmehr kehren wir zur Betrachtung von charakteristischen Streifen auf einer gegebenen Integralfläche zurück. Die Relation (5) gilt auf der Integralfläche J: $u = u(x, y)$ für $\varphi = 0$ falls wir überall die Funktion $u(x, y)$ und die Werte ihrer Ableitungen eingesetzt denken, und noch die Zusatzbedingung $\varphi = 0$ stellen.

Denken wir die Kurve $\varphi = 0$ in der Form $y = y(x)$ geschrieben, so wird auf ihr $y' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, und die Charakteristikenrelation geht also über in

$$F_{p_n} y'^n - F_{p_{n-1}} y'^{n-1} + \cdots = 0, \tag{6}$$

eine *gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die charakteristische Kurve* C auf J. Umgekehrt liefert jede Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung eine charakteristische Kurve auf J.

Faßt man die Charakteristikenbedingung (5) als partielle Differentialgleichung für die Funktion $\varphi(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen auf, so wird jede Lösung derselben nicht nur eine einzige charakteristische Kurve C liefern, sondern vielmehr eine ganze Schar charakteristischer Kurven $\varphi(x, y) = c$ mit dem Parameter c auf J.

Es ist von vornherein plausibel, daß der Realitätscharakter der Wurzeln der algebraischen Gleichung in τ

$$F_{p_n}\tau^n - F_{p_{n-1}}\tau^{n-1} + \cdots (-1)^n F_{p_0} = 0 \tag{8}$$

für den Typus der Differentialgleichung längs der betreffenden Umgebung des Integralstreifens wesentlich sein wird. Hat diese algebraische Gleichung n reelle verschiedene Lösungen, so heißt sie *total hyperbolisch* oder *schlechthin hyperbolisch*, und zwar an einer Stelle des Raumes der Variablen $x, \ldots, p_n$ bzw. längs eines Streifens C_n oder auf der Fläche $u = u(x, y)$; wenn alle Lösungen imaginär und verschieden sind, so heißt sie *elliptisch*. Falls Lösungen zusammenfallen, so heißt sie *parabolisch oder parabolisch ausgeartet*. Auch Zwischenstufen verschiedener Art sind möglich, kommen jedoch für uns später nicht in Frage und werden hier übergangen.

3. Systeme von Differentialgleichungen. In derselben Art werden Charakteristikenbedingungen und Charakteristiken für *Systeme von Differentialgleichungen* definiert (vgl. III, § 4). Wir beschränken uns auf Systeme erster Ordnung und bemerken, daß die Betrachtungen sich leicht auch auf Systeme höherer Ordnung ausdehnen lassen, wobei allerdings nicht wesentlich höhere Allgemeinheit gewonnen wird. Zunächst betrachten wir den quasilinearen Fall an dem typischen Beispiel zweier Differentialgleichungen für zwei unbekannte Funktionen $u(x, y), v(x, y)$

$$\begin{cases} a_1 u_x + b_1 u_y + c_1 v_x + d_1 v_y + \cdots = 0 \\ a_2 u_x + b_2 u_y + c_2 v_x + d_2 v_y + \cdots = 0, \end{cases} \tag{9}$$

wobei die Koeffizienten $a_1, b_1\, c_1, d_1\;\; a_2, b_2, c_2, d_2$ gegebene stetige Funktionen von x, y, u, v sind und die Punkte Glieder ohne Ableitungen bedeuten. Es sei durch ein Funktionenpaar $u(x, y), v(x, y)$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems definiert. Durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ wird auf diesem Lösungssystem eine eindimensionale Mannigfaltigkeit C ausgezeichnet; in ihr führen wir den Parameter λ ein. An Stelle der unabhängigen Veränderlichen x, y denken wir uns wie früher φ und λ als unabhängige Veränderliche eingeführt. Unser Differentialgleichungssystem geht dann über in

$$\begin{aligned} &u_\varphi(a_1\varphi_x + b_1\varphi_y) + v_\varphi(c_1\varphi_x + d_1\varphi_y) + \cdots = 0 \\ &u_\varphi(a_2\varphi_x + b_2\varphi_y) + v_\varphi(c_2\varphi_x + d_2\varphi_y) + \cdots = 0, \end{aligned}$$

wobei wiederum die Punkte $\cdots$ Glieder ohne die hinausführenden Ableitungen u_φ, v_φ bedeuten.

Stellen wir uns nunmehr vor, daß die Anfangsmannigfaltigkeit C für unser Lösungssystem gegeben ist oder, wie wir es auch ausdrücken können, daß längs der Kurven $\varphi(x, y) = 0$ in der x, y-Ebene die Werte von u und v vorgegeben sind, so können wir dort u_φ und v_φ und somit alle weiteren aus C hinausführenden Ableitungen eindeutig berechnen, wenn nicht die Charakteristikenbedingung

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a_1\varphi_x + b_1\varphi_y & c_1\varphi_x + d_1\varphi_y \\ a_2\varphi_x + b_2\varphi_y & c_2\varphi_x + d_2\varphi_y \end{vmatrix} = 0$$

erfüllt ist. Alle übrigen Betrachtungen verlaufen analog dem Früheren. Die Charakteristikenbedingung geht, wenn wir die Kurve $\varphi(x, y) = 0$ durch eine Gleichung $y = y(x)$ darstellen, in eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, quadratisch in y', über. Faßt man die Charakteristikenbedingung als partielle Differentialgleichung für $\varphi(x, y)$ auf einer Integralfläche auf, so gibt jede ihrer Lösungen nicht nur eine, sondern eine einparametrige Schar von Charakteristiken $\varphi = c$.

Im linearen Falle, wenn die Koeffizienten $a_1, \ldots, d_2$ nicht von u und v abhängen, haben die Charakteristiken wiederum feste Grundkurven in der x, y-Ebene. Die Fallunterscheidung: hyperbolisch, elliptisch, parabolisch für das Differentialgleichungssystem hängt dann nicht mehr von dem individuellen Funktionensystem $u_1, \ldots, u_n$ ab.

Entsprechend liegen die Verhältnisse im allgemeinen Fall, wo n Funktionen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ mit den Ableitungen p_ν, q_ν gesucht und n Differentialgleichungen

$$(11)\qquad F^{(\nu)}(x, y, u_1, \ldots, u_n, p_1, \ldots, q_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gegeben sind. Die Charakteristikenbedingung lautet

$$(12)\qquad \left| F^{(\nu)}_{p_k}\varphi_x + F^{(\nu)}_{q_k}\varphi_y \right| = 0,$$

wobei die linke Seite die Determinante bedeutet, deren Term in der ν^{ten} Teile und k^{ten} Spalte $F^{(\nu)}_{p_k}\varphi_x + F^{(\nu)}_{q_k}\varphi_y$ ist. Die Charakteristikenbedingung ist so zu verstehen, daß auf einem vorgegebenen Lösungssystem $u_1, \ldots, u_n$ eine Charakteristik definiert ist durch die Relation $\varphi(x, y) = 0$, sobald die Charakteristikenbedingung unter der Voraussetzung $\varphi = 0$ befriedigt ist. Gilt die Charakteristikenbedingung als partielle Differentialgleichung auf einer Integralfläche für $\varphi(x, y)$, so liefert wiederum $\varphi(x, y) = c$ eine einparametrige Schar von Charakteristiken.

4. Invarianz der Charakteristiken gegenüber beliebigen Punkttransformationen. *Die Charakteristiken partieller Differentialgleichungen sind gegenüber Punkttransformationen invariant.* D. h. sie gehen bei einer

solchen Punkttransformation in die entsprechenden Charakteristiken der transformierten Differentialgleichung über. Zum Beweis genügt die Betrachtung des einfachsten Falles einer Differentialgleichung $F(u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0$, welche durch eine Transformation auf die neuen unabhängigen Variablen ξ, η in $G(u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}, \ldots) = 0$ übergeht. Die Invarianz folgt wiederum entweder unmittelbar aus der begrifflichen Bedeutung der charakteristischen Streifen, oder indem wir durch elementare Rechnung die Identität

$$F_{u_{xx}} \varphi_x^2 + F_{u_{xy}} \varphi_x \varphi_y + F_{u_{yy}} \varphi_y^2 = G_{u_{\xi\xi}} \varphi_\xi^2 + G_{u_{\xi\eta}} \varphi_\xi \varphi_\eta + G_{\eta\eta} \varphi_\eta^2$$

herleiten.

5. Beispiele aus der Hydrodynamik. Die Differentialgleichungen für die Bewegung einer *kompressiblen Flüssigkeit* bieten ein sehr instruktives Beispiel für den Charakteristikenbegriff. Wir betrachten hier den Fall einer *stationären Flüssigkeitsbewegung* in zwei Raumdimensionen x, y, während wir den Fall einer nichtstationären Bewegung und im Anschluß eine ausführlichere geometrische Diskussion auf Kapitel VI, S. 374 verschieben. Die ebene Flüssigkeit möge die von der Zeit unabhängigen Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y)$ und $v(x, y)$ und die Dichte $\varrho(x, y)$ besitzen. $p(\varrho)$ sei die gegebene Druckfunktion, wobei $p'(\varrho) = a^2$ die „Schallgeschwindigkeit" ist. Dann lauten die drei Differentialgleichungen für die drei zu bestimmenden Funktionen u, v, ϱ

$$(13) \qquad \begin{cases} \varrho u u_x + \varrho v u_y + p' \varrho_x = 0 \\ \varrho u v_x + \varrho v v_y + p' \varrho_y = 0 \\ \varrho(u_x + v_y) + u \varrho_x + v \varrho_y = 0 . \end{cases}$$

Sie bilden ein quasilineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Nach der allgemeinen Regel von Nr. 3 erhalten wir die *charakteristischen Mannigfaltigkeiten* $\varphi(x, y) = 0$ aus der Determinantenrelation

$$\begin{vmatrix} \varrho(u\varphi_x + v\varphi_y) & 0 & p'\varphi_x \\ 0 & \varrho(u\varphi_x + v\varphi_y) & p'\varphi_y \\ \varrho\varphi_x & \varrho\varphi_y & u\varphi_x + v\varphi_y \end{vmatrix} = 0,$$

die nach kurzer Rechnung in die folgende Gestalt übergeht

$$(14) \qquad (u\varphi_x + v\varphi_y)\{(u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\} = 0.$$

Die Charakteristiken sind also einmal gegeben durch die Relation

$$(15) \qquad u\varphi_x + v\varphi_y = 0,$$

Die entsprechenden charakteristischen Kurven $\varphi =$ konst. sind die *Stromlinien*, d. h. die Linien, welche von den Geschwindigkeitsvektoren erzeugt werden. Zweitens erhalten wir als Charakteristiken die Kurven $\varphi =$ konst., welche der Gleichung

$$(16) \quad (u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = \varphi_x^2(u^2 - p') + \varphi_y^2(v^2 - p') + 2\varphi_x\varphi_y uv = 0$$

genügen. Diese bilden dann und nur dann ein System von zwei einparametrigen Kurvenscharen, wenn für unsere Strömung der *hyperbolische Fall* eintritt, d. h. wenn

$$(u^2 - p')(v^2 - p') - u^2 v^2 = p'^2 - (u^2 + v^2) p' < 0$$

ist, oder wenn

$$p' < u^2 + v^2$$

wird, mit anderen Worten, wenn die *Strömungsgeschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit* wird.

Ein besonders einfaches Beispiel, das sich auch experimentell leicht veranschaulichen läßt, erhalten wir, wenn wir für die ebene Flüssigkeits- oder Gasströmung einen Näherungsansatz machen. Wir nehmen an, daß die Geschwindigkeit von einer konstanten, zur x-Achse parallelen Geschwindigkeit U nur wenig abweicht und daß die Dichte ϱ ebenfalls von einer konstanten Dichte P nur wenig verschieden ist:

$$u = U + \omega, \qquad v = \lambda, \qquad \varrho = P + \sigma,$$

wobei ω, σ, λ kleine Größen sind. Wir nehmen ferner an, daß die Flüssigkeitsbewegung in diesem Fall mit hinreichender Genauigkeit dargestellt werden kann, wenn wir in den Differentialgleichungen Produkte und höhere Potenzen der Größen ω, λ, σ und ihrer Ableitungen fortlassen. Dann wird unser ursprüngliches Differentialgleichungssystem zu ersetzen sein durch das folgende lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned} P U \omega_x + a^2 \sigma_x &= 0 \\ P U \lambda_x + a^2 \sigma_y &= 0 \\ U \sigma_x + P(\omega_x + \lambda_y) &= 0. \end{aligned}$$

Wir gewinnen sofort die Beziehung

$$\omega_{xy} = \lambda_{xx}$$

oder

$$\omega_y - \lambda_x = f(y),$$

welche den sog. „*Wirbelsatz*" ausdrückt, sowie das weitere System

$$\begin{aligned} \varkappa P \lambda_x + a \sigma_y &= 0 \\ (1 - \varkappa^2) a \sigma_x - \varkappa P \lambda_y &= 0, \end{aligned} \qquad \left(\varkappa = \frac{U}{a}\right)$$

aus welchem wir durch Elimination die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} (1 - \varkappa^2) \lambda_{xx} + \lambda_{yy} &= 0 \\ (1 - \varkappa^2) \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

erhalten. Diese Differentialgleichungen lassen sofort erkennen, daß der hyperbolische Fall vorliegt, wenn $\varkappa > 1$, also $U > a$ ist. Die Charakteristiken sind dann gerade Linien, welche gegen die x-Achse in einem Winkel α, dem sog. *Machschen Winkel*, mit $|\sin\alpha| = \frac{1}{\varkappa} = \frac{a}{U}$ geneigt sind.

Man kann dieses Beispiel physikalisch realisieren, indem man eine Flüssigkeits- oder Gasbewegung in einer Halbebene parallel zur Wand mit der Grundgeschwindigkeit U betrachtet und an einer Strecke AB der Wand eine kleine Rauhigkeit oder einen kleinen Buckel anbringt, welcher dort eine kleine Vertikalkomponente λ der Geschwindigkeit verursacht. In der Annahme, daß diese Bewegung durch unser angenähertes Differentialgleichungssystem dargestellt wird, wird dann diese Rauhigkeit sich in das Flüssigkeitsgebiet längs zweier in AB an die Wand stoßenden Parallelstreifen fortsetzen, welche gegen die Wand um den Winkel α geneigt sind. Tatsächlich kann man bei geeigneter Versuchsanordnung dieses Phänomen beobachten.

§ 3. Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet.

1. Grundsätzliches über Ausbreitungsvorgänge. Die Bedeutung der Charakteristiken kommt direkt zur Geltung bei allen Betrachtungen über Ausbreitungsvorgänge, gekennzeichnet durch hyperbolische Differentialgleichungsprobleme, wobei die Lösung u der Differentialgleichung die sich ausbreitende Größe ist. Bei solchen Vorgängen betrachtet man Anfangswertprobleme (vgl. Kap. III, § 7), und es ergibt sich nicht nur die Frage nach der Konstruktion der Lösungen — wie wir sie in §§ 5, 6, 7, 8 behandeln werden —, sondern weiter nach der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung durch die Anfangsdaten und nach dem Abhängigkeits- bzw. Wirkungsgebiet. Sind die Raumkoordinate x und die Zeit t die unabhängigen Veränderlichen und sind die Anfangsbedingungen etwa für $t = 0$ gestellt, so definieren wir:

Das *Abhängigkeitsgebiet* einer Stelle P mit den Koordinaten x, t ist diejenige Punktmenge auf der Anfangslinie $t = 0$, von welcher allein der Wert der Lösung u in P abhängt, in dem Sinne, daß Abänderung der Anfangsdaten außerhalb des Abhängigkeitsgebietes den Wert $u(P)$ nicht beeinflußt. Entsprechend definieren wir als *Einfluß*- oder *Wirkungs*gebiet eines Stückes L der Anfangslinie $t = 0$ denjenigen Bereich der Halbebene $t > 0$, außerhalb dessen sich die Werte von u nicht ändern, wenn man die Anfangsdaten nur längs des gegebenen Stückes L abändert. Mit anderen Worten, dasjenige Gebiet, für dessen sämtliche Punkte das Abhängigkeitsgebiet ganz zu dem gegebenen Stück L auf der Anfangslinie gehört. Endlich nennen wir *Fortsetzungs*gebiet eines Stückes L der Anfangslinie ein solches Gebiet der Ebene, in welchem durch die Anfangsdaten längs L die Lösung bestimmt ist. Offenbar ist das Komplementärgebiet des Fortsetzungsgebietes von L identisch mit dem Wirkungsgebiet des Komplementärgebietes von L.

Man erkennt sofort, daß diese Begriffsbildungen, bei welchen von Abänderung von Funktionen nur in einem Teile ihres Definitionsbereiches die Rede ist und welche aufs engste mit dem Charakter von Ausbreitungsvorgängen zusammenhängen, prinzipiell die Voraussetzung des

analytischen Charakters der Funktionen sinnlos wäre. Denn analytische Funktionen sind in ihrem Gesamtverlaufe schon bestimmt durch ihren Verlauf in einem beliebig kleinen Bereiche. Daher wäre es unsachgemäß, wenn wir uns bei der Konstruktion der Lösungen auf den allgemeinen Existenzsatz von Kapitel I, § 7 stützen wollten, wo analytischer Charakter der Differentialgleichung und der Anfangsbedingungen vorausgesetzt war.

In diesem § 3 wird sich nun für hyperbolische Differentialgleichungsprobleme zweiter Ordnung zeigen, daß man das Abhängigkeitsgebiet zu einem Punkte P erhält, indem man durch P die beiden charakteristischen Grundkurven bis zum Schnitt mit der Anfangslinie zieht; die Grundlinie L des so entstehenden dreiecksförmigen Gebietes stellt das gesuchte Abhängigkeitsgebiet dar, entsprechend dem schon in Kapitel III, § 7 explizite diskutierten Falle der einfachsten Differentialgleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

Dieses Dreiecksgebiet ist zugleich das Fortsetzungsgebiet seiner Grundlinie L. Denn es enthält alle diejenigen Punkte, deren Abhängigkeitsgebiet in L enthalten ist. Die beiden anderen („äußeren") Charakteristiken durch die Endpunkte von L begrenzen den Wirkungsbereich von L. Denn der so begrenzte Bereich besteht aus den Punkten, deren Abhängigkeitsgebiet mit L Punkte gemeinsam hat.

Um die Grundlinie L unseres Dreiecks als Abhängigkeitsgebiet der Spitze P nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß die Lösung der homogenen Differentialgleichung $L[u] = 0$ im Punkte P verschwindet, wenn die Anfangsdaten auf L Null sind. Denn wenn die Anfangsdaten zweier Lösungen von $L[u] = f$ nur außerhalb L voneinander verschieden sind, so ist die Differenz dieser Lösungen eine Lösung der homogenen Differentialgleichung mit Anfangswerten Null auf L, verschwindet also in P.

Diese Zusammenhänge zugleich mit der Konstruktion der Lösung des Anfangswertproblemes sind Gegenstand der folgenden Abschnitte dieses Kapitels; die entsprechenden Tatsachen für mehr Veränderliche[1] werden in Kapitel VI diskutiert werden.

2. Eindeutigkeitsbeweise. Im vorliegenden Paragraphen beweisen wir unter den hier dargelegten allgemeinen Gesichtspunkten die *eindeutige Bestimmtheit* der Lösungen von Anfangswertproblemen. Die Beweise beruhen auf der Betrachtung gewisser „*Energie-Integrale*", welche der Differentialgleichung zugeordnet sind und für welche wir ein einfaches Beispiel schon im Kapitel III, § 6 bei dem Eindeutigkeitsbeweis für die parabolische Wärmeleitungsgleichung kennengelernt haben. Bei den hyperbolischen Gleichungen wird der dort benutzte

[1] Während für zwei unabhängige Veränderliche x, t mathematisch die Rolle der beiden Veränderlichen in der Differentialgleichung nicht verschieden ist, besteht, wie wir in Kapitel VI sehen werden, für mehr Veränderliche ein grundsätzlicher Unterschied zwischen „raumartigen" Flächen mit „raumartigen" Koordinaten und zeitartigen Koordinaten.

Gedanke durch Heranziehung von Integrationsgebieten verfeinert, welche von Charakteristiken begrenzt sind[1]. Wir begnügen uns mit einem typischen Beispiel und verweisen im übrigen auf die weitergehenden Betrachtungen für mehrere Variable im nächsten Kapitel, § 4.

Der Eindeutigkeitssatz bei linearen Problemen besagt dann: *Bei den Anfangswerten Null auf einem Stück L der Anfangskurve hat die homogene Differentialgleichung nur die identisch verschwindende Lösung im Fortsetzungsbereich.*

Wir erläutern den Beweisgedanken zunächst an dem an sich trivialen Beispiel der Differentialgleichung für $u(x, t)$:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0. \tag{1}$$

Wir betrachten ein dreiecksförmiges Gebiet G der x, t-Ebene, welches begrenzt ist von einer Anfangskurve AB, die ihrerseits von keiner Charakteristik in mehr als einem Punkt getroffen wird, und von den zwei charakteristischen Linien PA und PB (Abb. 29). Unser Ziel ist zu zeigen: Wenn u und die Ableitungen u_x und u_t auf AB verschwinden, so verschwindet u identisch im ganzen Dreieck G. Zum Beweise schneiden wir durch eine horizontale Linie CD die Spitze unseres Dreiecks ab und betrachten das übrigbleibende Gebiet G'. Der Ausdruck

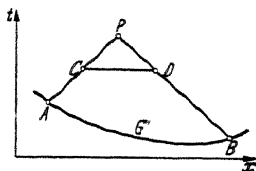



Abb. 29.

$$-2\,u_t(u_{xx} - u_{tt}) = -2(u_x u_t)_x + (u_x^2)_t + (u_t^2)_t$$

ist ein Divergenzausdruck; indem wir ihn über das Gebiet G' integrieren und die Differentialgleichung sowie die Anfangsbedingungen berücksichtigen, erhalten wir

$$0 = \iint_{G'} \left((u_x^2)_t + (u_t^2)_t - 2(u_x u_t)_x\right) dx\,dt$$

$$= \int_{AB+BD+DC+CA} \left((u_x^2 + u_t^2)\,t_\nu - 2(u_x u_t)\,x_\nu\right) ds,$$

wobei mit x_ν, t_ν die Richtungscosinus der Normalen auf dem Rand $AB + BD + DC + CA$ bezeichnet werden und s die Bogenlänge ist. Auf den charakteristischen Seitenlinien CA und DB ist $x_\nu^2 = t_\nu^2 = \frac{1}{2}$. Der ihnen entsprechende Anteil des Randintegrals formt sich daher leicht um in

$$\int_{AC+BD} \frac{1}{t_\nu}(u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2 ds,$$

ist also gewiß nicht negativ. Auf CD ist $t_\nu = 1$, $x_\nu = 0$, $ds = dx$; auf AB ist der Integrand Null. Somit gewinnen wir sofort

$$\int_{CD} (u_x^2 + u_t^2)\,dx = 0,$$

[1] Zur Literatur siehe Fußnote S. 379.

d. h. auf CD überall $u_x^2 + u_t^2 = 0$. Es verschwindet also u_x und u_t jedenfalls überall in einem zur Umgebung der Spitze P gehörigen Teile von G. Da nun jeder Punkt von G sich als Spitze eines entsprechenden kleineren Dreiecks in G auffassen läßt, so verschwindet u_x und u_t in jedem Punkte von G. Also ist u im ganzen Gebiet G konstant und, da u am Anfang verschwindet, identisch 0, wie behauptet wurde.

Eine ähnliche Überlegung führt zum Ziel bei der, bis auf eine Koordinatentransformation allgemeinen, linearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - \alpha u_t - \beta u_x - \delta u = 0,$$

wobei α, β, δ stetige Funktionen von x und t sind. Der Kürze halber beschränken wir uns auf das Anfangswertproblem, falls Anfangswerte auf der Geraden $t = 0$ gegeben sind, und stellen die Verallgemeinerung auf eine allgemeinere Anfangskurve als Aufgabe. Unser Eindeutigkeitssatz besagt hier: *Wenn auf der Basis AB des Dreiecks ABP mit den charakteristischen Seitenlinien $x + t =$ konst.* bzw. *$x - t =$ konst. u und u_t verschwinden, so ist u im ganzen Dreieck Null.* Zum Beweise schicken wir folgende Hilfsbetrachtung voraus: Für irgendeinen Punkt (x, t) in G ist

$$u(x, t) = \int_0^t u_\tau(x, \tau)\, d\tau,$$

also zufolge der Schwarzschen Ungleichung

$$u^2(x, t) \leqq t \int_0^t u_\tau^2(x, \tau)\, d\tau.$$

Abb. 30.

Für eine Horizontallinie CD mit $t = h$, welche ein Dreieck CDP aus dem ursprünglichen Dreieck G abschneidet, wird daher

$$\int_{CD} u^2\, dx \leqq h \iint_{G_h} u_\tau^2\, dx\, d\tau \leqq h \iint_{G_h} (u_x^2 + u_t^2)\, dx\, dt,$$

wobei G_h das Trapez $ABCD$ bedeutet. Hieraus folgt sofort

$$\iint_{G_h} u^2\, dx\, dt \leqq h^2 \iint_{G_h} (u_x^2 + u_t^2)\, dx\, dt.$$

Wir definieren nun ein „Energieintegral"

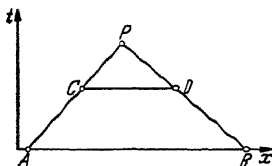
$$E(h) = \int_{H_h} (u_x^2 + u_t^2)\, dx$$

und integrieren die Identität

$$0 = 2 u_t L[u] = (u_x^2 + u_t^2)_t - 2(u_x u_t)_x - 2\alpha u_t^2 - 2\beta u_x u_t - \delta u u_t$$

über G_h. Dabei ergibt sich ähnlich wie vorhin

$$0 \leqq \int_{AC+BD} \frac{1}{t_\nu} (u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2\, ds + E(h)$$

$$= 2 \iint (\alpha u_t^2 + \beta u_t u_x + \delta u u_t)\, dx\, dt = R$$

somit
$$E(h) \leqq R.$$

Nunmehr schätzen wir die rechte Seite R ab, indem wir bemerken, daß
$$2|u_x u_t| \leqq u_t^2 + u_x^2, \qquad 2|u u_t| \leqq u_t^2 + u^2$$
ist. Bedeutet daher M eine obere Schranke für die Absolutwerte der stetigen Funktionen α, β, δ, so wird
$$R \leqq 4M \iint\limits_{G_h} (u_t^2 + u_x^2 + u^2)\, dx\, dt$$
und daher nach unserer Vorbemerkung
$$R \leqq 4M(1 + k^2) \iint\limits_{G_h} (u_t^2 + u_x^2)\, dx\, dt \leqq C \int_0^h E(\alpha)\, d\alpha,$$
wobei $C = 4M(1 + k^2)$ mit der Höhe k des Dreiecks G ist. Wenn l irgendein Wert mit $l > h$ ist, so gilt erst recht
$$E(h) \leqq C \int_0^h E(\alpha)\, d\alpha \leqq C \int_0^l E(\alpha)\, d\alpha.$$

Indem wir diese Relation nach h zwischen 0 und l integrieren, erhalten wir
$$\int_0^l E(h)\, dh \leqq C l \int_0^l E(h)\, dh.$$

Wäre $E(h)$ irgendwo für $0 \leqq h \leqq l$ von 0 verschieden, so würde folgen
$$1 \leqq Cl,$$
was offenbar nicht möglich ist, wenn wir $l < \frac{1}{C}$ wählen. Es gilt also sicherlich in dem Intervall $0 \leqq h \leqq l$ identisch $E = 0$. Durch Wiederholung des Verfahrens mit $t = l$, $t = 2l, \ldots$ als Anfangsgerade erkennen wir in endlich vielen Schritten, daß E in dem ganzen Dreieck G verschwindet, daß u also konstant, somit Null ist, wie behauptet wurde.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir ein entsprechendes Verhalten bei den allgemeinen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen wiederfinden.

§ 4. Die Riemannsche Integrationsmethode.

1. Riemanns Darstellungsformel. Die Frage nach Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet kann für lineare hyperbolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in einer mehr expliziten Weise beantwortet werden auf Grund eines von RIEMANN herrührenden Verfahrens. Die sog. *Riemannsche Integrationsmethode* besteht im wesentlichen in der Herleitung einer Integralformel, welche die Lösung des Anfangswertproblems in übersichtlicher Weise durch die Anfangsdaten darstellt und

gleichzeitig die eindeutige Bestimmtheit dieser Lösung zum Ausdruck bringt. Die Existenz der Lösung wird dabei vorausgesetzt.

In diesem Paragraphen entwickeln wir Riemanns Formel; die Frage nach der Existenz der Lösung wird gleichzeitig mit der entsprechenden Frage für den allgemeineren nichtlinearen Fall im nächsten Paragraphen beantwortet werden.

Wir erörtern die lineare Differentialgleichung

$$L[u] = u_{xy} + a u_x + b u_y + c u = f, \tag{1}$$

welche wir, abgesehen von einer Transformation, nach Kap. III, § 1 als die allgemeinste lineare hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei unabhängigen Veränderlichen betrachten können. $x =$ konst., $y =$ konst. sind die Scharen der *charakteristischen Projektionen*[1]. Die Koeffizienten a, b, c sowie die gegebene rechte Seite f seien stetige Funktionen von x und y in dem betrachteten Bereich und mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehen. Schon früher (Bd. I, Kap. V, S. 236) haben wir den Begriff des zu $L[u]$ *adjungierten Differentialausdruckes* $M[v]$ definiert durch die Bedingung, daß $v L[u] - u M[v]$ ein Divergenzausdruck sein soll oder daß das Doppelintegral des Ausdruckes $v L[u]$ über ein vorgegebenes Gebiet G sich in das entsprechende Doppelintegral von $u M[v]$ und einen nur vom Rande abhängigen Bestandteil umformen läßt. Für den adjungierten Ausdruck ergibt sich die Darstellung

$$M[v] = v_{xy} - (a v)_x - (b v)_y + c v, \tag{2}$$

und es gilt

$$2(L v[u] - u M[v]) = (u_x v - u v_x + 2 b u v)_y + (u_y v - u v_y + 2 a u v)_x; \tag{3}$$

wenn wir über ein Gebiet G mit dem stückweise glatten Rand integrieren, folgt die Greensche Formel

$$\left\{\begin{aligned} &2 \iint_G (v L[u] - u M[v])\, dx\, dy \\ &\quad = \int [(u_y v - v_y u + 2 a u v)\, x_\nu + (u_x v - v_x u + 2 b u v)\, y_\nu]\, ds, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

wobei s die Bogenlänge auf Γ und die Ausdrücke x_ν und y_ν die Komponenten der nach außen weisenden Normalen ν auf Γ bedeuten.

[1] Schon in Kapitel I, S. 3 haben wir den einfachsten Spezialfall nämlich die Differentialgleichung

$$u_{xy} = f(x, y)$$

behandelt, wo G eine gegebene Funktion ist und auf C die Anfangsbedingungen $u = p = q = 0$ vorgeschrieben sind. Wir haben gesehen, daß die nach § 3 eindeutig bestimmte Lösung dieses Anfangswertproblems durch das Integral

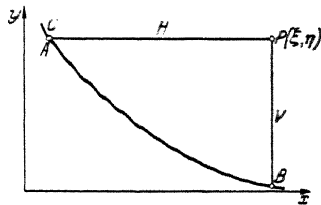
$$u(\xi, \eta) = \iint f(x, y)\, dx\, dy$$

1 wird.

Das *Anfangswertproblem* unserer Differentialgleichung wird folgendermaßen formuliert: Es sei eine Anfangskurve C gegeben, welche sich in ihrem ganzen betrachteten Verlaufe in der Form $x = g(y)$ oder $y = h(x)$ darstellen läßt, d. h. nirgends zwei Punkte mit gleicher x- oder gleicher y-Koordinate besitzt. Darüber hinaus sei vorausgesetzt, daß C nirgends eine zur x- oder y-Achse parallele Tangente besitze. Wir denken uns diese Kurve in der Parameterform durch stetig differenzierbare Funktionen $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$ mit $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ dargestellt. Längs C seien die Anfangswerte der Funktion u und der ersten beiden Ableitungen $p = u_x$, $p = u_y$ als stetige Funktionen des Ortes vorgegeben. Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung (1) in einer einseitig an C anschließenden Umgebung von C mit diesen vorgeschriebenen Anfangswerten.

Abb. 31.

Die Anfangswerte von u, p, q müssen dabei naturgemäß durch die Streifenbedingung $du = p\,dx + q\,dy$ eingeschränkt sein.

Wir betrachten in einer solchen Umgebung einen Punkt P mit den Koordinaten ξ, η und durch ihn die horizontale Linie AP mit $y = \eta$ sowie die vertikale Linie BP mit $x = \xi$, wobei A und B auf der Kurve C liegen. Das krummlinige Dreieck APB wird mit ◺ bezeichnet. Das Ziel ist, eine Formel zu finden, welche den Wert der gesuchten Funktion u im Punkte P darstellt mit Hilfe der Anfangswerte längs des Kurvenbogens AB und den Werten der Funktion f im Dreieck ABP.

Riemann wurde zu seiner Formel durch die Analogie des Differentialgleichungsproblems mit einem endlichen linearen Gleichungssystem geführt. Ein solches Gleichungssystem für Unbekannte u_i kann man lösen, indem man die linken Seiten mit zunächst noch unbekannten Faktoren $v_1, v_2, \ldots$ multipliziert, sodann addiert, die resultierende Bilinearform in u_i und v_i nach den u_i umordnet und endlich die Koeffizienten $v_1, v_2, \ldots$ so bestimmt, daß z. B. die Koeffizienten von $u_2, u_3, \ldots$ verschwinden, während der Koeffizient von u_1 den Wert 1 erhält.

Auf diese Weise erhält man eine Darstellung für u_1 und analog für u_2 usw. Hierbei werden die Größen $v_1, v_2, \ldots$ nicht mehr von den bekannten rechten Seiten der Gleichungen, sondern nur von den Koeffizienten abhängen.

Entsprechend kann man bei unserer Differentialgleichung verfahren, um den Wert der Lösung an der Stelle P darzustellen. Man multipliziert die Differentialgleichung mit einer noch unbestimmten Funktion v, integriert über das Dreieck ◺, formt dieses Integral nach der Greenschen Formel (4) um und versucht sodann die Funktion v derart zu bestimmen, daß sich eine Darstellung der gewünschten Art ergibt.

Die Greensche Formel (9) liefert auf Grund der Differentialgleichung

$$(5)\quad \begin{cases} 2\iint (f v - u\,M[v])\,dx\,dy \\ = \int\limits_{AB+BP+PA} [(u_y v - u v_y + 2auv)\,x_\nu + (u_x v - u v_x + 2buv)\,y_\nu]\,ds, \end{cases}$$

wobei das Linienintegral über die Summe der drei Dreiecksseiten AB, BP und PA zu erstrecken ist. Auf PA ist $y_\nu = 1$, $x_\nu = 0$, $ds = dx$. Auf BP ist $y_\nu = 0$, $x_\nu = 1$, $ds = dy$. Im Integral über PA formen wir den Ausdruck $\int u_x v\,dx$ durch Produktintegration um, im Integral über BP den Ausdruck $\int u_y v\,dy$. So erhalten wir für die rechte Seite der Gleichung (5) den Ausdruck

$$\begin{aligned} &2u(P)\,v(P) - u(A)\,v(A) - u(B)\,v(B) \\ &\quad + \int\limits_{AB} [(u_y v - u v_y + 2auv)\,x_\nu + (u_x v - u v_x + 2buv)\,y_\nu]\,ds \\ &\quad + 2\int\limits_{AP} u\,(bv - v_x)\,dx + 2\int\limits_{BP} u(av - v_y)\,dy, \end{aligned}$$

wobei $v(P)$, $u(P)$ usw. die Funktionswerte in den betreffenden Punkten P, A, B bezeichnen.

Nunmehr liegt es nahe, über die noch unbestimmte Funktion v folgendermaßen zu verfügen: $v = v(x, y; \xi, \eta)$ soll außer von dem Argument x, y noch von den Parametern ξ, η abhängen und folgende Bedingungen erfüllen:

a) v als Funktion x, y soll der adjungierten Differentialgleichung genügen:

$M[v] = 0$.

b) Auf AP soll $v_x = bv$, auf BP: $v_y = av$ sein. Genauer:

$$\begin{aligned} v_x(x, \eta; \xi, \eta) &= b(x, \eta)\, v(x, \eta; \xi, \eta) \quad \text{auf} \quad AP, \\ v_y(\xi, y; \xi, \eta) &= a(\xi, y)\, v(\xi, y; \xi, \eta) \quad \text{auf} \quad BP. \end{aligned}$$

Endlich soll v im Punkte P den Wert 1 haben:

c) $v(\xi, \eta; \xi, \eta) = 1$.

Eine solche Funktion v heißt die zum Differentialausdruck L gehörige „*Riemannsche Funktion*". Mit ihr besteht nunmehr die gesuchte klassische *Riemannsche Darstellungsformel*

$$(6)\quad \begin{cases} 2u(P) = u(A)\,v(A) + u(B)\,v(B) \\ \quad + \int\limits_{AB} [(u_x v - u v_x + 2buv)\,y_\nu - (u_y v - u v_y + 2auv)\,x_\nu]\,ds \\ \quad + 2\iint\limits_{G} f v\,dx\,dy. \end{cases}$$

Diese Riemannsche Formel stellt die Lösung aller Anfangswertprobleme dar, d.h. der Anfangswertprobleme mit beliebigen Anfangswerten für eine

beliebige Kurve C vermittels einer einzigen nur noch von den Parametern ξ, η abhängigen Lösung v der adjungierten Gleichung [1].

Die Riemannsche Darstellung setzt im Einklang mit § 3 in Evidenz: Erstens: *die Lösung ist eindeutig durch die Anfangsbedingungen bestimmt.* Zweitens: *Die Lösung hängt stetig von den Anfangsdaten ab.* Drittens: *Die Lösung im Punkte P hängt nicht von der Gesamtheit der Anfangsdaten ab, sondern nur von denjenigen längs der Teilstrecke AB auf C, welche von den Charakteristiken durch P aus C ausgeschnitten werden.*

Bei diesen Bemerkungen ist die im nächsten Paragraphen zu beweisende Existenz einer Riemannschen Funktion vorausgesetzt.

2. Ergänzende Bemerkungen. Charakteristisches Anfangswertproblem. Man hätte das Anfangswertproblem formal ohne Beschränkung der Allgemeinheit in einer vereinfachten Form angreifen können, indem man für die Anfangswerte von u, p, q durchweg die Werte Null annimmt. Auf ein solches Problem läßt sich das in Nr. 1 behandelte allgemein sofort zurückführen. Denn ist φ eine beliebige Funktion mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen, welche irgendwelche Anfangsbedingungen wie in Nr. 1 erfüllt und setzen wir $u = w + \varphi$, dann erfüllt w die speziellen Anfangsbedingungen und die Differentialgleichung $L[w] = f - L[\varphi]$. In diesem Fall könnten wir die durch Wegfall der Randglieder vereinfachte Riemannsche Formel (6) anwenden, wobei statt f nur $f - L[\varphi]$ zu schreiben ist. Anwendung der Greenschen Formel liefert dann sofort das Resultat in der alten Gestalt.

Abb. 32.

Zweitens bemerken wir: Die Voraussetzung, daß C von keiner charakteristischen Kurve in zwei Punkten geschnitten oder von einer solchen berührt wird, ist für unsere Konstruktion wesentlich. Sonst würde im allgemeinen das Anfangswertproblem nicht mehr lösbar sein, da zu einem Punkte P die Punkte A und B nicht mehr eindeutig hinzubestimmt werden können. Die in einem solchen Fall auftretenden Hindernisse werden durch das Beispiel der einfachsten Differentialgleichung $u_{xy} = 0$ illustriert. Nehmen wir als Kurve C eine Kurve der nebenstehenden Form an, welche durch eine horizontale Linie in zwei Punkten Q und R geschnitten wird, so würde sich durch Integration (in verständlicher Schreibweise) ergeben $u_y(Q) = u_y(R)$. Also würde u_y längs der Kurve C einer Bedingung unterworfen werden müssen, damit ein entsprechendes Anfangswertproblem überhaupt lösbar ist.

Die angedeutete Schwierigkeit tritt jedoch nicht ein, wenn die Kurve C in ein rechtwinkliges Polygonstück ADB wie in Abb. 33 ausartet, d. h. aus zwei charakteristischen Geradenstücken AD und BD besteht.

[1] In dieser Hinsicht stellt sie ein Analogon zu der Darstellung der Lösung einer Randwertaufgabe mit Hilfe der Greenschen Funktion dar (vgl. Kap. IV, § 2, 1).

In diesem Grenzfall gilt unsere Formel (6) unverändert. Jetzt aber können wir auf der Anfangskurve ADB nicht mehr zwei Funktionen willkürlich vorgeben, sondern nur noch die Anfangswerte von u selbst. Die Differentialgleichung nämlich stellt — in Übereinstimmung mit unseren allgemeinen Überlegungen aus § 1, 1 — längs der Geraden AD, wenn dort u und somit $q = u_y$ bekannt ist, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für $p = u_x$ und ebenso längs der Geraden BD eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für $q = u_y$ dar; dabei ist das eine Mal y, das andere Mal x unabhängige Veränderliche. Somit sind wegen der Stetigkeit im Punkte D die Ableitungen p und q durch die Vorgabe der Anfangswerte von u selbst eindeutig bestimmt. In diesem Fall sprechen wir vom *charakteristischen Anfangswertproblem.* Seine Lösung lautet jetzt, wenn wir uns auf den Spezialfall $f = 0$ beschränken,

$P(\xi, \eta)$

$D(x_0, y_0)$

Abb. 33.

$$2u(P) = u(A)\,v(A) + u(B)\,v(B) - \int^{A} (v_y u - u_y v - 2auv)\,dy - \int^{B} (v_x u - u_x v - 2buv)\,dx \tag{7}$$

oder nach Umformung durch Produktintegration:

$$u(P) = u(D)\,v(D) + \int_D^A v(u_y + au)\,dy + \int_D^B v(u_x + bu)\,dx. \tag{7'}$$

Wir machen von dieser Lösung des charakteristischen Anfangswertproblems Gebrauch zum Beweis des sog. *Reziprozitätsgesetzes* für *die Riemannsche Funktion.* Es sei $u = u(x, y; x_0, y_0)$ die zum Differentialausdruck M gehörige Riemannsche Funktion für die Parameterwerte x_0, y_0, die Koordinaten des Punktes D. D. h. es sei ferner $u(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1$ und $u_y + au = 0$ auf AD, $u_x + bu = 0$ auf BD. Dann ergibt unsere Formel (7')

$$u(\xi, \eta; x_0, y_0) = v(x_0, y_0; \xi, \eta).$$

In Worten: *die Riemannsche Funktion eines Differentialausdruckes L geht in die des adjungierten Differentialausdruckes M über, wenn man Parameter und Argumente vertauscht.* Ist speziell der Differentialausdruck L *selbstadjungiert,* so ist die Riemannsche Funktion *symmetrisch in Parameter- und Argumentpunkt.*

3. Beispiel, Telegraphengleichung. Das einfachste nichttriviale Beispiel für die Riemannsche Formel wird durch die der *Telegraphengleichung* (vgl. Kap. III, § 5, 3) äquivalente Differentialgleichung

$$L[u] = u_{xy} + cu = g(x, y) \tag{8}$$

gegeben, wobei c eine Konstante ist. Die Differentialgleichung ist selbstadjungiert. Um die Riemannsche Funktion zu bestimmen, macht man entsprechend der Symmetrie der Differentialgleichung den Ansatz

$$v(x, y; \xi, \eta) = g(z),$$

wo

$$z = (x-\xi)(y-\eta)$$

ist. Die Differentialgleichung für die Riemannsche Funktion geht dann über in die Differentialgleichung $z f'' + f' + c f = 0$, welche sich durch die Substitution $\lambda = \sqrt{4cz}$ in die *Besselsche Differentialgleichung*

$$\frac{d^2 f}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{df}{d\lambda} + f = 0 \tag{9}$$

verwandelt. Diese wird gelöst durch die *Besselsche Funktion* (vgl. Bd. I, Kap. VII)

$$f = J_0(\lambda).$$

Tatsächlich ist die Funktion

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0\left(\sqrt{4c(x-\xi)(y-\eta)}\right) \tag{10}$$

die gesuchte Riemannsche Funktion, denn sie erfüllt, wie man sofort bestätigt, für $x = \xi$ und $y = \eta$ die vorgeschriebenen Anfangsbedingungen.

§ 5. Die Lösungen der Differentialgleichung $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ nach dem Picardschen[1] Iterationsverfahren.

1. Vorbemerkungen. Statt den linearen Fall (z. B. die Existenz und eindeutige Bestimmtheit der Riemannschen Funktion) gesondert zu diskutieren, behandeln wir sogleich das Anfangswertproblem für die nicht mehr notwendig lineare Differentialgleichung

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1}$$

Wie im vorigen Paragraphen sei in der x, y-Ebene eine glatte Anfangskurve C gegeben, welche von keiner charakteristischen Kurve parallel zur x- oder y-Achse in mehr als einem Punkte geschnitten wird und welche wir wie dort in einer Parameterdarstellung $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$ gegeben denken. Von einem Punkt P mit den Koordinaten ξ, η ziehen wir wie in § 4, Abb. 31 die Parallelen AP und BP zu den Koordinatenachsen, wobei A und B auf C liegen. Das Dreieck ABP, sowie die geraden Linien AP und BP werden mit $\triangledown$, H, V bezeichnet. Die früheren Abkürzungen $u_{xy} = s$, $u_x = p$, $u_y = q$ werden auch hier benutzt.

Auf C seien die Anfangswerte von u, p, q vorgegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir gemäß der Bemerkung in § 1 die Anfangswerte u, p, q als identisch Null annehmen, da sonst mit einer willkürlichen, die Anfangsbedingungen befriedigenden, stetig

[1] Siehe PICARD: Traité d'analyse, Bd. 2.

differenzierbaren Funktion φ mit stetigem φ_{xy} die Differenz $w = u - \varphi$ einer analogen Differentialgleichung mit modifiziertem f und den Anfangsbedingungen Null genügen würde [1].

Das Ziel ist, *eine Lösung der Differentialgleichung*

$$(1) \qquad s = f(x, y, u, p, q)$$

in einer Umgebung von C zu konstruieren, so daß längs C die vorgeschriebenen Anfangswerte $u = p = q = 0$ *angenommen werden.*

Hierbei ist die Funktion f als stetig differenzierbar in allen ihren Argumenten vorausgesetzt. Von der Lösung u wird Stetigkeit der ersten Ableitungen und Existenz der gemischten zweiten Ableitung u_{xy} vorausgesetzt, womit dann vermöge (1) auch die Stetigkeit dieser zweiten Ableitung folgt [2].

Von vornherein sei bemerkt, daß unser Problem seinen Sinn behält und daß die folgende Methode gleichzeitig die Lösung gibt, wenn die Anfangskurve in ein aus zwei charakteristischen Geraden AD und BD bestehendes rechtwinkliges Polygonstück (Abb. 33) ausartet. Dann darf längs C lediglich der Anfangswert von u selbst, speziell $u = 0$ vorgeschrieben werden, während — wie im vorigen Paragraphen — längs AD aus der Differentialgleichung (1) sich eine gewöhnliche Differentialgleichung für p und längs BD eine solche für q ergibt, die mit der Bedingung $p = q = 0$ in D die Größen p und q längs C von vornherein festlegen. Wir sprechen in diesem Fall von dem *charakteristischen Anfangswertproblem* und brauchen bei der folgenden Behandlung zwischen dem allgemeinen Anfangswertproblem und diesem ausgearteten Falle keine weitere Unterscheidung mehr zu treffen.

Wir streben an, die Lösung in einer passend klein zu wählenden Umgebung G eines Punktes der Kurve C zu konstruieren. Ein solches

---

[1] Eine solche Funktion $\varphi(x, y)$ kann z. B. konstruiert werden als

$$\varphi = u(x) + (y - y(x))\, q(x),$$

wobei die Anfangskurve in der Form $y = y(x)$ und die Anfangswerte durch $u(x)$, $p(x)$, $q(x)$ gegeben und durch die Streifenrelation $u' = p + y' q$ verbunden sind. Die Funktion φ besitzt offenbar stetige Ableitungen φ_x, φ_y und nimmt ebenso wie φ_y die vorgeschriebenen Anfangswerte an; wegen der Streifenrelation besitzt auch φ_x die vorgeschriebenen Anfangswerte.

[2] Über die zweiten Ableitungen u_{xx} und u_{yy} sind also keinerlei Voraussetzungen gemacht, so daß wir z. B. für $f = 0$ die Funktion $u = \varphi(x) + \psi(y)$ auch dann als Lösung von $u_{xy} = 0$ betrachten, wenn die Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ keine zweiten Ableitungen besitzen, sondern lediglich stetige erste Ableitungen.

Setzt man jedoch für die Anfangswerte $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ zweimalige stetige Differenzierbarkeit nach λ voraus, ebenso für die Funktion f zweimalige stetige Differenzierbarkeit nach allen Argumenten, so besitzt die Lösung u auch stetige zweite Ableitungen r und t und es existieren sogar stetige dritte Ableitungen p_{xy} und q_{xy}; dies Resultat ist in dem Ergebnis von § 7 enthalten, kann aber auch direkt durch Übergang zu den Differentialgleichungen gewonnen werden, welche man aus (1) durch Differentiation nach x und nach y erhält.

Gebiet G der x, y-Ebene soll durch Beschränkungen der Form $u < a$, $|p| < a$, $|q| < a$, wobei a eine Konstante ist, zu einem Bereich B des fünf-dimensionalen x, y, u, p, q-Raumes ergänzt werden. Wenn das Wertsystem x, y, u, p, q in einem solchen Bereich B liegt, möge mit M eine feste zum Gebiet G gehörige Schranke für die vier Ausdrücke $|f|$, $|f_u|$, $|f_p|$, $|f_q|$ bezeichnet werden.

Wir können unsere Differentialgleichung (1) sofort als Integralgleichung schreiben, indem wir über das Dreieck $\triangledown$ integrieren.

(2) $$u(\xi, \eta) = \iint_{\triangledown} f(x, y, u, p, q)\, dx\, dy.$$

Diese Relation (2) ist mit der Differentialgleichung und den Anfangsbedingungen $u = p = q = 0$ auf C äquivalent[1]. Denn ist eine Funktion $h(\xi, \eta)$ durch das Integral der Form

(3) $$h(\xi, \eta) = \iint_{\triangledown} g(x, y)\, dx\, dy$$

definiert, so gilt

(3′) $$h_\xi = \int_B^P g(\xi, y)\, dy, \qquad h_\eta = \int_A^P g(x, \eta)\, dx, \qquad h_{\xi\eta} = g(\xi, \eta),$$

wie hier in Erinnerung gebracht werden soll.

Unsere Integralgleichung (2) bleibt sinnvoll, wenn von vornherein für u lediglich einmalige stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt wird. Aus dieser Voraussetzung folgt dann Stetigkeit und Existenz der gemischten Ableitung u_{xy} und das Bestehen der Differentialgleichung von selbst, da wir die Differentiation in der Integraldarstellung der rechten Seite ausführen können.

2. Lösung der Anfangswertprobleme. Analog zum klassischen Verfahren bei gewöhnlichen Differentialgleichungen liegt folgende *Iterationsmethode* nahe: Wir gehen von einer ersten Näherungslösung $u_0 = p_0 = q_0 = 0$ aus und definieren in einer Umgebung von C, welche wir sogleich noch passend einschränken werden, sukzessive Systeme von drei Ortsfunktionen u_n, p_n, q_n durch die Relationen

(4) $$\begin{aligned} u_{n+1}(P) &= \iint_{\triangledown} f(x, y, u_n, p_n, q_n)\, dx\, dy \\ p_{n+1}(P) &= \int_B^P f(\xi, y, u_n, p_n, q_n)\, dy \\ q_{n+1}(P) &= \int^P f(x, \eta, u_n, p_n, q_n)\, dx. \end{aligned}$$

Dabei wird, wie direkt aus den Gleichungen (3′) hervorgeht,

$$p_{n+1} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \xi}, \qquad q_{n+1} = \frac{\partial u_{n+1}}{\partial \eta}.$$

Außerdem wird, wenn P auf C liegt, $u_n = p_n = q_n = 0$.

[1] Vgl. Anmerkung auf S. 312.

Wir bemerken: Das Iterationsverfahren führt nicht aus einem Bereich B des x, y, u, p, q-Raumes hinaus, wenn die Umgebung G der Kurve C hinreichend klein gewählt wird. Denn angenommen, für einen Index n lägen die Größen x, y, u, p, q im Bereich B, wie er in Nr. 1 bezeichnet ist, und angenommen, l sei die größte im Bereich G auftretende Distanz AP bzw. BP, dann folgt aus den Relationen (4) sofort

$$|u_{n+1}| \leqq M l^2, \qquad |p_{n+1}| \leqq M l, \qquad |q_{n+1}| \leqq M l.$$

Wenn also die Umgebung von C so eingeschränkt wird, daß $M l^2 \leqq a$ und $M l \leqq a$ wird, so bleibt man bei dem Iterationsprozeß in demselben Bereich B.

Nunmehr folgt leicht: Bei gegebenenfalls weiterer Einschränkung der Umgebung G *konvergiert das Iterationsverfahren gleichmäßig in dieser Umgebung gegen Ortsfunktionen* $u(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$, wobei $u_x = p$, $u_y = q$ und $u_{xy} = f(x, y, u, p, q)$ *wird und* $u = p = q = 0$ *auf* C *ist.* Die Funktion u löst somit unser Anfangswertproblem.

Zum Beweise bilden wir die Differenz

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \iint\limits_{\triangle} (f(x, y, u_n, p_n, q_n) - f(x, y, u_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}))\, dx\, dy \\ &= \iint\limits_{\triangle} [(u_n - u_{n-1}) \bar{f}_u + (p_n - p_{n-1}) \bar{f}_p + (q_n - q_{n-1}) \bar{f}_q]\, dx\, dy, \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite unter dem Integral durch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung umgeformt ist und der Strich — bedeutet, daß passende Zwischenwerte zwischen u_n und u_{n-1} bzw. p_n und p_{n-1} bzw. q_n und q_{n-1} einzusetzen sind. Es ergibt sich also durch Abschätzung der Integrale sofort

$$|u_{n+1} - u_n| \leqq M \iint\limits_{\triangle} [\,|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|\,]\, dx\, dy.$$

Bezeichnet man mit D_n den maximalen Wert, welchen der Ausdruck $|u_n - u_{n-1}| + |p_n - p_{n-1}| + |q_n - q_{n-1}|$ in der betrachteten Umgebung von C annimmt, so wird daher

$$|u_{n+1} - u_n| \leqq M l^2 D_n;$$

genau ebenso folgt auf Grund der Integraldarstellung (4)

$$|p_{n+1} - p_n| \leqq M l D_n \qquad |q_{n+1} - q_n| \leqq M l D_n$$

also

$$|u_{n+1} - u_n| + |p_{n+1} - p_n| + |q_{n+1} - q_n| \leqq M l (l + 2) D_n$$

für jeden Punkt P in einer solchen Umgebung G von C. Also gilt diese Beziehung auch für denjenigen Punkt P, in welchem der Ausdruck links seinen größten Wert D_{n+1} annimmt. Es ist somit

$$D_{n+1} \leqq M l (l + 2) D_n.$$

Nunmehr denken wir uns das Gebiet G so eingeschränkt, daß in ihm $M\,l(l+2) = \alpha < 1$ wird. Dann ist die aus positiven Konstanten bestehende unendliche Summe $\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu$ konvergent mindestens wie die geometrische Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha^\nu$. Also konvergieren im Gebiete G auch die drei Summe $\sum_{\nu=0}^{\infty}(u_{\nu+1} - u_\nu)$, $\sum_{\nu=0}^{\infty}(p_{\nu+1} - p_\nu)$, $\sum_{\nu=0}^{\infty}(q_{\nu+1} - q_\nu)$ gleichmäßig. Die Grenzwerte u, p, q sind stetige Ortsfunktionen. Da die Grenzübergänge wegen der gleichmäßigen Konvergenz unter dem Integralzeichen der Relationen (4) ausgeführt werden dürfen, so ergibt sich sofort, daß für die Grenzfunktionen die Relation

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
u &= \iint_{Q} f(x, y, u, p, q)\, dx\, dy \\
p &= \int_{B}^{P} f(\xi, y, u, p, q)\, dy \\
q &= \int^{P} f(x, \eta, u, p, q)\, dx
\end{aligned}
$$

bestehen. Also wird $u_x = p$, $u_y = q$, $u_{xy} = f$, und somit liefert u, da die Anfangsbedingungen auf C erfüllt sind, die gesuchte Lösung.

3. Eindeutige Bestimmtheit der Lösung. *Die Lösung des Anfangswertproblems ist in einer Umgebung der Anfangskurve eindeutig bestimmt.* Denn sind u, v zwei Lösungen, so würde für die Differenz $w = u - v$ die Integralrelation

$$w = \iint_{Q} \left(f(x, y, u, u_x, u_y) - f(x, y, v, v_x, v_y)\right) dx\, dy$$

gelten. Wenden wir rechts unter dem Integralzeichen wieder den Mittelwertsatz an und bezeichnen mit W den Maximalwert, den eine der Größen $|w|$, $|w_x$ $w_y|$ in G annimmt, so ergibt sich sofort

$$w = \iint_{Q} (w \bar{f}_u + w_x \bar{f}_p + w_y \bar{f}_q)\, dx\, dy,$$

also

$$|w| \leqq M\, l^2\, W.$$

Ebenso erhält man

$$|w_x| \leqq M\, l\, W, \qquad |w_y| \leqq M\, l\, W,$$

also

$$|w| + |w_x| + |w_y| \leqq M\, l(l+2)\, W = \alpha W.$$

Somit wird auch

$$W \leqq \alpha W,$$

was, wenn $\alpha < 1$ ist, nur gelten kann, wenn identisch im Gebiet G die Größe W verschwindet, d. h. erst recht w verschwindet, mit anderen Worten, wenn u mit v identisch ist.

4. Stetige und differenzierbare Abhängigkeit von Parametern. *Wenn in der rechten Seite f der Differentialgleichung ein Parameter ε auftritt, so daß f stetig bzw. differenzierbar von ε und den ursprünglichen Argumenten abhängt, sobald ε in einer passend klein gewählten Umgebung eines Wertes ε_0, z. B. $\varepsilon_0 = 0$ liegt, dann hängt die Lösung $u(x, y)$ unseres Anfangswertproblems sowie p, q ebenfalls stetig bzw. differenzierbar vom Parameter ε ab.* Die Ableitung $v = \left.\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ der Lösung nach dem Parameter ε für $\varepsilon = 0$ genügt im zweiten Falle der linearen Differentialgleichung

$$v_{xy} + \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v = g \tag{6}$$

mit

$$\alpha = -f_p|_{\varepsilon=0}, \quad \beta = -f_q|_{\varepsilon=0}, \quad \gamma = -f_u|_{\varepsilon=0}, \quad g = f_\varepsilon|_{\varepsilon=0}.$$

Der Beweis der stetigen Abhängigkeit ergibt sich unmittelbar aus der Bemerkung, daß wir für ein solches ε-Intervall stets in der Betrachtung von Nr. 1 ein gemeinsames Gebiet G abgrenzen können, sobald dort gemeinsame Schranken vorliegen, was durch Stetigkeit von f in bezug auf ε unmittelbar gewährleistet ist. Daher konvergiert das Verfahren von Nr. 2 auch gleichmäßig in bezug auf den Parameter ε und es folgt unmittelbar die stetige Abhängigkeit der Grenzfunktionen u, p, q von ε. Auf Grund der Differentialgleichung hängt dann auch die zweite Ableitung u_{xy} stetig von ε ab.

Die stetige Differenzierbarkeit der Lösung u in bezug auf ε ergibt sich sofort aus folgender Bemerkung: Wir bilden, indem wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Stelle $\varepsilon_0 = 0$ ins Auge fassen, den Ausdruck $w(x, y, \varepsilon) = \frac{u(x, y, \varepsilon) - u(x, y, 0)}{\varepsilon}$. Auf Grund der Differentialgleichung (1) bilden wir nunmehr mit $u^0 = u(x, y, 0)$ für den Differenzenquotienten w die Relation

$$w_{xy} = \frac{1}{\varepsilon}\left(f(x, y, u, u_x, u_y; \varepsilon) - f(x, y, u^0, u_x^0, u_y^0; 0)\right).$$

Indem wir hier die rechte Seite nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung umformen, gewinnen wir für w formal die Differentialgleichung

$$w_{xy} + \alpha w_x + \beta w_y + \gamma w = g, \tag{7}$$

wobei die Koeffizienten α, β, γ, g Werte der Ableitungen von f nach p, q, u und ε sind für Zwischenwerte zwischen dem betrachteten Wert ε und $\varepsilon = 0$. Diese Koeffizienten können wir bei gegebenem ε als gegeben betrachten. Sie hängen an der Stelle $\varepsilon = 0$ stetig von ε ab, da sie nach Voraussetzung für $\varepsilon = 0$ stetig in die Ableitungen f_u, f_p, f_q für $f(x, y, u, p, q)$ übergehen, wobei die Funktion $u(x, y, 0)$ für die Einsetzung zugrunde zu legen ist. Somit können wir die Gleichung (7)

als eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für w auffassen, deren Koeffizienten α, β, γ stetig von x, y, ε abhängen; gemäß unserem vorigen Resultat folgt damit die Existenz des Grenzwertes $v = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} w$ und für diese Grenzfunktion die Differentialgleichung (6).

5. Das Abhängigkeitsgebiet der Lösung. Wir heben zunächst hervor, daß unsere Lösung gemäß den Bemerkungen aus Nr. 1 unmittelbar den allgemeinen Fall mit umfaßt, daß die Anfangsdaten auf C nicht als Null, sondern beliebig vorgeschrieben sind. Unsere Konstruktion zeigt dann zugleich: *Der Funktionswert $u(P)$ der Funktion u im Punkte P hängt nicht von der Gesamtheit der Anfangsdaten auf der Kurve C ab, sondern lediglich von den Daten längs der Kurvenstrecke AB.* Eine Abänderung der Anfangsdaten außerhalb AB würde auf die Funktionswerte $u(P)$ in dem Punkt P und natürlich im Dreieck ◺ ohne Einfluß sein. Wir drücken dies im Einklang mit § 4, 1 aus der in der Aussage: *Das Abhängigkeitsgebiet eines Punktes P wird aus der Anfangskurve C durch die beiden P treffenden Charakteristiken ausgeschnitten.*

Es sei darauf hingewiesen, daß die Aussage über das Abhängigkeitsgebiet unverändert auch für das charakteristische Anfangswertproblem gilt.

§ 6. Verallgemeinerungen und Anwendung auf Systeme erster Ordnung.

1. Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit gleichem linearen Hauptteil. Wir bemerken zunächst: Alle Resultate des vorigen Paragraphen gelten unverändert für eine Differentialgleichung

$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

wenn die Funktionen a, b, c drei gegebene stetig differenzierbare Ortsfunktionen sind und wenn die Differentialgleichung in dem betrachteten Gebiet hyperbolisch ist, d. h. wenn

$$4ac - b^2 < 0 \tag{1'}$$

gilt. Wir brauchen dann lediglich gemäß Kap. III, § 1 bzw. Kap. V, § 1 an Stelle von x, y charakteristische Parameter einzuführen, um unser Problem auf das in dem vorigen Paragraphen behandelte zurückzuführen.

Wir betrachten nunmehr ein System von Differentialgleichungen für m Funktionen $u^1(x, y), \ldots, u^\nu(x, y), \ldots, u^m(x, y)$ mit den Ableitungen

$$p_\nu = \frac{\partial u^\nu}{\partial x}, \quad q_\nu = \frac{\partial u^\nu}{\partial y}, \quad s_\nu = \frac{\partial^2 u^\nu}{\partial x\,\partial y}:$$

$$s_\nu = f_\nu(x, y, u^1, \ldots, u^m;\ p_1, \ldots, p_m;\ q_1, \ldots, q_m). \quad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

Gemäß unserer obigen Bemerkung können wir auf ein solches Differentialgleichungssystem allgemein jedes System von „*Differentialgleichungen*

mit gleichem Hauptteil" der Form

$$a\,u^{\nu}_{xx} + b\,u^{\nu}_{xy} + c\,u^{\nu}_{yy} = f_\nu(x, y, u^1, \ldots, q_m) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

transformieren, wobei die Koeffizienten a, b, c dieselben drei gegebene Ortsfunktionen für alle Differentialgleichungen des Systems sind und der Bedingung (1′) genügen.

Für das Differentialgleichungssystem (2) sei ein Anfangswertproblem genau derselben Art wie in § 5 gestellt, nur mit dem Unterschied, daß längs der Anfangskurve C die Werte aller Funktionen u^ν und ihrer ersten Ableitungen unter Berücksichtigung der Streifenbedingungen vorgeschrieben sind. Die Lösung dieses Problems erfolgt wörtlich in derselben Weise wie in § 5. Das Ergebnis ist: *Wenn C eine nirgends charakteristische glatte Kurve ist, so existiert in einer passend kleinen Umgebung von C die Lösung des Anfangswertproblems und ist eindeutig bestimmt, wobei das Abhängigkeitsgebiet aus C durch die beiden Charakteristiken PA, PB ausgeschnitten wird.* Genau das Entsprechende gilt für das charakteristische Anfangswertproblem, wobei dann längs des charakteristischen Anfangsgebildes nur noch die Werte von u^ν selber vorgegeben werden können.

2. Kanonisch-hyperbolische Systeme erster Ordnung. Eine für die allgemeinere Theorie entscheidende Anwendung unseres Resultates bezieht sich auf einen speziellen Fall von Differentialgleichungssystemen erster Ordnung für $N = n + m$ gesuchte Funktionen $u^1, \ldots, u^N$. Wir betrachten für diese Funktionen ein System von Differentialgleichungen, welches in den ersten Ableitungen linear ist, jedoch so, daß die ersten n Gleichungen nur die Ableitungen $p_\nu = \frac{\partial u^\nu}{\partial x}$ nach x, die letzten $m = N - n$ nur Ableitungen $q_\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial y}$ nach y enthalten. Die Differentialgleichungen mögen die Form haben

$$A_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} a_{\nu\mu}\, p_\mu - g_\nu(x, y, u^1, \ldots, u^N) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

$$B_\nu = \sum_{\mu=1}^{N} a_{\nu\mu}\, q_\mu - g_\nu(x, y, u^1, \ldots, u^N) = 0, \quad (\nu = n+1, \ldots, n+m), \tag{5}$$

wobei die Koeffizienten $a_{\nu\mu}$ sowie die Größen g_i gegebene stetige Funktionen von $x, y, u^1, u^2, \ldots, u^N$ mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen sind. Systeme dieser Art heißen *kanonisch hyperbolische Systeme* erster Ordnung.

Wir betrachten das *Anfangswertproblem I:* Gegeben sei eine glatte bzw. stückweise glatte Anfangskurve C, welche entweder nirgends charakteristisch ist, d. h. nirgends parallel der x- bzw. y-Achse läuft, oder aus einem Stück einer Parallelen zur x-Achse und einer Parallelen zur y-Achse besteht. Auf dieser Anfangskurve C seien die Anfangswerte

der Funktionen u^ν als stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge vorgegeben. Es gelte ferner mit diesen Anfangswerten für die Determinante D der Koeffizienten $a_{\nu\mu}$ die Bedingung

$$D = |a_{\nu\mu}| \neq 0. \tag{6}$$

Dann ist ein System von Funktionen u^ν gesucht, die stetige erste und gemischte zweite Ableitungen besitzen, die vorgeschriebenen Anfangswerte annehmen und den Differentialgleichungen (4), (5) genügen. Wir werden zeigen: *Das Anfangswertproblem I ist in einer passend kleinen Umgebung von C in eindeutiger Weise lösbar; genau wie früher wird das Abhängigkeitsgebiet für einen Punkt P durch die beiden P treffenden Charakteristiken $x =$ konst., $y =$ konst. aus der Anfangskurve C ausgeschnitten.*

Wir lösen das Problem I, indem wir es auf ein Problem II des oben unter Nr. 1 behandelten Typus reduzieren. Zu diesem Zweck differenzieren wir die Gleichung (4) nach y und die Gleichung (5) nach x. Wegen $D \neq 0$ können wir die so differenzierten Gleichungen eindeutig nach u^ν_{xy} auflösen und somit in die Form setzen

$$u^\nu_{yx} - f_\nu(x, y, u^1, \ldots, q_N) = 0, \tag{7}$$

wobei die linken Seiten lineare Kombinationen der Relationen $\frac{\partial A_\nu}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial B_\nu}{\partial x} = 0$ sind und f_ν stetig differenzierbar ist. Längs C sind die Anfangswerte der Unbekannten u dieses Differentialgleichungssystems vorgegeben. Aber auch die Anfangsableitungen p_ν, q_ν dieser Funktionen längs C sind von vornherein eindeutig bestimmt. Denke man sich nämlich, wenn C nicht charakteristisch ist, die Kurve C in Parameterdarstellung: $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ gegeben, wobei die Ableitungen $\dot{x}(\lambda)$ und $\dot{y}(\lambda)$ wegen der Bedingung, daß C nirgends parallel einer der Koordinatenachsen sein soll als nirgends verschwindend angenommen werden können, so folgt aus den Streifenbedingungen $\dot{u}^\nu = p_\nu \dot{x} + q_\nu \dot{y}$ die Relation

$$q_\nu = \frac{1}{\dot{y}} (\dot{u}^\nu - p_\nu \dot{x}). \tag{8}$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichungen (5) ein, so entsteht zusammen mit den Gleichungen (4) ein lineares Gleichungssystem für die Anfangsableitungen p_ν mit nichtverschwindender Determinante D. Also bestimmen sich diese Ableitungen und alsdann wegen (8) auch die Ableitungen q_ν längs C eindeutig. Somit ergibt sich aus dem Anfangswertproblem I ein Anfangswertproblem II für ein System mit gleichem Hauptteil.

Genau das Entsprechende gilt für den Fall des charakteristischen Anfangswertproblems nur mit dem Unterschiede, daß sich jetzt die Anfangsableitungen wie früher direkt bestimmen lassen.

Ist umgekehrt das Anfangswertproblem II mit den so bestimmten Anfangswerten gelöst, so liefert diese Lösung zugleich die Lösung des ursprünglichen Problems I. Denn zunächst gilt für die Anfangskurve C gemäß unseren Festsetzungen über die Vorgabe von p_ν und q_ν das System der Relationen $A_\nu = 0, B_\mu = 0$. Außerdem sind die Gleichungen (7) äquivalent mit dem System der Gleichungen $\frac{\partial A_\nu}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial B_\mu}{\partial x} = 0$ in der betrachteten Nachbarschaft der Kurve C. Also gilt in dieser Nachbarschaft überall $A_\nu = 0$, $B_\mu = 0$, d. h. das Problem I ist gelöst.

§ 7. Die allgemeine quasilineare Gleichung zweiter Ordnung.

1. Das vollständige System der charakteristischen Differentialgleichungen. Das Ziel dieses und des folgenden Paragraphen ist die vollständige Lösung des allgemeinen Anfangswertproblems einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}) = 0$ im hyperbolischen Falle[1]. Wir werden dieses Ziel stufenweise erreichen, indem wir zunächst die *quasilineare Differentialgleichung*

$$a\, u_{xx} + b\, u_{xy} + c\, u_{yy} + d = 0, \quad 4ac - b^2 > 0 \tag{1}$$

betrachten, wobei a, b, c, d zweimal stetig differenzierbare gegebene Funktionen von $x, y, u, p = u_x, q = u_y$ sind.

Im Gegensatz zu den Differentialgleichungen des § 6 haben hier die charakteristischen Kurven der Differentialgleichungen nicht mehr feste Grundkurven in der x, y-Ebene. Daher ist die Transformation auf die einfache Normalform nicht möglich und es wird sich zeigen, daß bei der Behandlung dieser Differentialgleichungen der Charakteristikenbegriff wesentlich mehr in den Mittelpunkt der Betrachtung rückt. Der Gedankengang des Folgenden besteht darin, daß wir zunächst für eine als fest gegeben betrachtete Integralfläche $J: u = u(x, y)$, für welche diese Differentialgleichung hyperbolisch ist, die beiden Scharen der charakteristischen Kurven $\alpha(x, y) =$ konst. und $\beta(x, y) =$ konst. studieren. Auf einem passend klein zu wählenden Stück von J können wir dann statt x, y die charakteristischen Parameter α und β als unabhängige Parameter einführen. Auf der betrachteten Integralfläche J fassen wir nun x, y, u sowie auch die Ableitungen p und q als Funktionen von α und β auf, ähnlich wie in Kap. III, § 2.

Den Schlüssel zur Theorie bildet die folgende Fragestellung: *Welchen Relationen (Differentialgleichungen) genügen diese fünf Funktionen von α und β auf Grund der vorgelegten Differentialgleichung* (1), *den Charakteristikenbedingungen für die Parameter α und β und den Streifenrelationen?*

---

[1] Diese Lösung verdankt man HANS LEWY (vgl. Math. Ann. Bd. 97, S. 179ff., sowie K. FRIEDRICHS und H. LEWY: Math. Ann. Bd. 99, S. 200ff.) Siehe auch die Darstellung bei J. HADAMARD: Leçons sur le problème de Cauchy, S. 487ff. Paris 1932.

Es wird sich für diese fünf Größen ein *System kanonisch-hyperbolischer Differentialgleichungen erster Ordnung* gemäß §6,2 ergeben [1].

Die Integrationstheorie dieses Differentialgleichungssystems wird dann die Lösung unseres Anfangswertproblems liefern, indem wir dieses zunächst durch Studium der Charakteristiken auf einer als gegeben betrachteten Integralfläche gewonnene Differentialgleichungssystem — analog wie bei Differentialgleichungen erster Ordnung — analysieren, dann seine Integration unabhängig durchführen und aus den so gewonnenen Lösungen die Integralfläche konstruieren.

Wir nehmen also zunächst $u = u(x, y)$ als gegebene Integralfläche J an. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß längs des betrachteten Stückes der Integralfläche $a \neq 0$ und $c \neq 0$ ist, was nötigenfalls durch eine Drehung des x, y-Koordinatensystems erreicht werden kann. Wir leiten nunmehr Differentialgleichungen für x, y, u, p, q als Funktionen der charakteristischen Parameter α und β auf J ab. Die Charakteristikenbedingungen für diese Parameter erhalten wir (vgl. auch Kap. III, § 2), indem wir auf J einen Streifen C erster Ordnung als Funktion des Parameters λ in der Form $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ mit $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ annehmen. Die gegebenen Differentialgleichungen und die Streifenbedingungen längs C

$$\begin{aligned} ar + bs + ct + d &= 0 \\ \dot{x}r + \dot{y}s \qquad - \dot{p} &= 0 \\ \dot{x}s + \dot{y}t - \dot{q} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

(wobei wie früher die Abkürzung $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$ gebraucht wird) liefern die *Charakteristikenbedingung*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0. \tag{3}$$

[1] Ein solches Differentialgleichungssystem ist auch schon früher als charakteristisches Differentialgleichungssystem studiert worden. Man hat jedoch diese Differentialgleichungen immer als gewöhnliche Differentialgleichungen aufgefaßt, indem man jeweils nur eine der charakteristischen Scharen betrachtete. Im Gegensatz zur Charakteristikentheorie bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ergeben sich bei einer solchen Auffassung für die fünf gesuchten Funktionen zu wenig Differentialgleichungen, also ein unterbestimmtes System, so daß die Integrationstheorie dadurch nicht zum Abschluß gebracht werden könnte. Der neue von HANS LEWY eingeführte Gedanke, die beiden charakteristischen Parameter α und β *gleichzeitig* als unabhängige Veränderliche einzuführen und dann die charakteristischen Differentialgleichungen als partielle Differentialgleichungen aufzufassen, liefert jedoch mit einem Schlage die genügende Anzahl von Differentialgleichungen, ja sogar ein scheinbar überbestimmtes System. In dieser Wendung liegt der entscheidende Punkt bei dem durch HANS LEWY über die klassische Theorie hinaus erzielten wesentlichen Fortschritt.

Nach unserer Annahme $b^2-4ac>0$ und $a\neq 0$ überall auf J hat die Gleichung $a\varrho^2-b\varrho+c=0$ zwei verschiedene reelle Lösungen, $\varrho_1(x, y, u, p, q)$ und $\varrho_2(x, y, u, p, q)$, von denen wegen $c\neq 0$ keine verschwinden kann. Wir erhalten also durch Aufspaltung von (3) zwei Gleichungen, welche wir, indem wir längs der einen Schar charakteristischer Kurven den Parameter α statt λ, längs der anderen Schar β statt λ nennen in der Form schreiben können

$$(4)\qquad \begin{cases} \varrho_1 x_\alpha - y_\alpha = 0 \\ \varrho_2 x_\beta - y_\beta = 0. \end{cases}$$

Die Kurven $\alpha=$ konst. und $\beta=$ konst., welche jetzt auf J ein krummliniges Koordinatensystem liefern, stellen die beiden *charakteristischen Kurvenscharen* dar. Wir notieren die Relationen

$$(5)\qquad \varrho_1\varrho_2=\frac{c}{a},\qquad \varrho_1+\varrho_2=\frac{b}{a},\qquad (\varrho_1-\varrho_2)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$(6)\qquad y_\alpha x_\beta - y_\beta x_\alpha = (\varrho_1-\varrho_2)\, x_\alpha x_\beta$$

und bemerken ferner, daß die Größen x_α und x_β von Null verschieden sein müssen, weil sonst auch y_α bzw. y_β verschwinden würden, was mit der Forderung $\dot{x}^2+\dot{y}^2\neq 0$ für die Parameterdarstellung der charakteristischen Kurven unverträglich wäre. Wegen $\varrho_i\neq 0$ muß auch y_α und y_β durchweg von Null verschieden sein[1].

Da die drei in r, s, t linearen Gleichungen (2), deren Determinante verschwindet, verträglich sein müssen — die in ihnen vorkommenden Größen r, s, t, d, p, q sind ja tatsächlich der Integralfläche zugeordnet —, so muß der Rang ihrer Matrix kleiner als 3 sein, also notwendigerweise die weitere Determinantenbeziehung

$$\begin{vmatrix} a & c & d \\ x_\alpha & 0 & -p_\alpha \\ 0 & y_\alpha & -q_\alpha \end{vmatrix} = d\, x_\alpha y_\alpha + a\, y_\alpha p_\alpha + c\, x_\alpha q_\alpha = 0$$

gelten. Wegen $y_\alpha=\varrho_1 x_\alpha\neq 0$ folgt

$$(7)\qquad d\,\varrho_1 x_\alpha + a\,\varrho_1 p_\alpha + c\, q_\alpha = 0.$$

[1] Es sei angemerkt, daß aus den charakteristischen Gleichungen

$$c\,x_\alpha^2 - b\,x_\alpha y_\alpha + a\,y_\alpha^2 = 0$$
$$c\,x_\beta^2 - b\,x_\beta y_\beta + a\,y_\beta^2 = 0$$

sich ergibt

$$a=\mu x_\alpha x_\beta,\qquad b=\mu(x_\alpha y_\beta + y_\alpha x_\beta),\qquad c=\mu y_\beta y_\alpha,$$

wobei der Proportionalitätsfaktor μ durch

$$\frac{1}{\mu^2}=\frac{4(x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta)^2}{b^2-4ac}$$

geliefert wird.

Ebenso erhält man die Gleichung

$$d\,\varrho_2 x_\beta + a\,\varrho_2 p_\beta + c\,q_\beta = 0^1. \tag{8}$$

Endlich notieren wir die Streifenrelation $u_\alpha = p\,x_\alpha + q\,y_\alpha$ und $u_\beta = p\,x_\beta + q\,y_\beta$. Wir erhalten also längs J das folgende System von Differentialgleichungen

$$y_\alpha - \varrho_1 x_\alpha = 0 \tag{9}$$
$$y_\beta - \varrho_2 x_\beta = 0 \tag{10}$$
$$d\,\varrho_1 x_\alpha + a\,\varrho_1 p_\alpha + c\,q_\alpha = 0 \tag{11}$$
$$d\,\varrho_2 x_\beta + a\,\varrho_2 p_\beta + c\,q_\beta = 0 \tag{12}$$
$$A = u_\alpha - p\,x_\alpha - q\,y_\alpha = 0 \tag{13}$$
$$B = u_\beta - p\,x_\beta - q\,y_\beta = 0. \tag{14}$$

Dieses „*charakteristische Differentialgleichungssystem*“ besteht aus sechs partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für fünf unbekannte Funktionen x, y, u, p, q der unabhängigen Veränderlichen α und β. Das System ist *quasilinear*, d. h. linear in den Ableitungen, jedoch überbestimmt. Um es zu einem bestimmten System zu machen, müssen wir eine passende unter den sechs Gleichungen weglassen in der Erwartung, daß die weggelassene Gleichung von den fünf übrigbleibenden abhängig ist. Unter Weglassung der Gleichung (14): $B = 0$ behalten wir das System S: (9) bis (13) der zur Ausgangsgleichung (1) gehörigen *charakteristischen Gleichungen* bei. Dieses Gleichungssystem hat genau die Form eines *kanonisch-hyperbolischen Systems* von § 6. Seine Determinante D berechnet sich sehr leicht zu $-a\,c\,(\varrho_1 - \varrho_2)^2$, ist also von Null verschieden.

Wir stellen sofort fest, daß tatsächlich die weggelassene Gleichung $B = 0$ unter Benutzung der Anfangsbedingungen aus den Gleichungen des Systems S folgt. Wir beweisen nämlich: *Für jedes Lösungssystem des Gleichungssystems S ist der Ausdruck B konstant längs jeder Koordinatenlinie $\beta =$ konst.* Wenn wir also für ein Lösungssystem des Differentialgleichungssystems S annehmen, das längs einer gewissen Anfangslinie, welche von den Koordinatenlinien $\beta =$ konst. geschnitten wird, B verschwindet, so ist tatsächlich überall die weggelassene Gleichung $B = 0$ erfüllt.

Unsere Behauptung ist gleichbedeutend mit der Aussage $B_\alpha = 0$, d. h.

$$u_{\alpha\beta} - p\,x_{\alpha\beta} - q\,y_{\alpha\beta} - p_\alpha x_\beta - q_\alpha y_\beta = 0.$$

Zum Beweise differenzieren wir die Gleichung $A = 0$ nach β und erhalten

$$u_{\alpha\beta} - p\,x_{\alpha\beta} - q\,y_{\alpha\beta} - p_\beta x_\alpha - q_\beta y_\alpha = 0.$$

[1] Diese beiden letzten Gleichungen sind nichts anderes als die Aussage der gegebenen Differentialgleichung (1) längs der Charakteristiken entsprechend der allgemeinen Theorie von § 1.

Also braucht nur

$$p_\alpha x_\beta - p_\beta x_\alpha + q_\alpha y_\beta - q_\beta y_\alpha = 0 \tag{15}$$

bewiesen zu werden. Diese Relation aber folgt, indem wir die Gleichung (11) mit y_β, die Gleichung (12) mit y_α multiplizieren und subtrahieren, wonach sich

$$a(\varrho_1 y_\beta p_\alpha - \varrho_2 y_\alpha p_\beta) + c(y_\beta q_\alpha - y_\alpha q_\beta) = 0$$

und wegen $\frac{c}{a} = \varrho_1 \varrho_2$

$$\frac{y_\beta p_\alpha}{\varrho_2} - \frac{y_\alpha p_\beta}{\varrho_1} + y_\beta q_\alpha - y_\alpha q_\beta = 0$$

oder wegen (9), (10) die behauptete Relation ergibt.

Noch eine weitere Bemerkung über die Wahl der Parameter α und β. Diese sind keineswegs eindeutig festgelegt. Wir können vielmehr statt α und β irgendwelche eindeutig umkehrbaren Funktionen von α bzw. β einführen, wobei die Gestalt des charakteristischen Gleichungssystems nicht geändert wird. Ist nun C irgendeine Kurve auf J, welche in keinem Punkte eine charakteristische Kurve berührt, d. h. welche als Kurve in der α, β-Ebene aufgefaßt nirgends der α- oder β-Achse parallel ist, so können wir diese Anfangskurve durch erlaubte Abänderung der Parameter α und β stets in die Form $\alpha + \beta = 0$ bringen, ohne die Allgemeinheit dieser Kurve C einzuschränken.

Die Eigenschaft, daß eine Kurve C nirgends charakteristisch ist, wird, wenn λ ein Parameter auf dieser Kurve ist (z. B. die Bogenlänge auf der Projektion C_0 von C auf die x, y-Ebene) ausgedrückt durch die Tatsache, daß längs C überall

$$\dot{y} - \varrho_1 \dot{x} \neq 0, \qquad \dot{y} - \varrho_2 \dot{x} \neq 0$$

oder

$$a\dot{x}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2 \neq 0$$

gilt, wobei der Punkt Differentiation nach dem Parameter bedeutet.

Von der formalen Vereinfachung der Schreibweise einer beliebigen Kurve C in der Form $\alpha + \beta = 0$ wollen wir im folgenden ausgiebig Gebrauch machen.

2. Lösung des Anfangswertproblems. Durch Umkehrung unseres Gedankenganges gelangen wir nun zur Lösung des *Anfangswertproblems* unserer ursprünglichen Differentialgleichung (1). Gegeben sei eine glatte Kurve C mit zugehörigem Streifen, ausgedrückt durch stetig differenzierbare Funktionen $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ eines Parameters λ, wobei die Streifenrelation $\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}$ identisch in λ erfüllt ist. Der Anfangsstreifen soll nirgends charakteristisch und er soll hyperbolisch sein, d. h. es soll auf ihm $a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 \neq 0$ und $4ac - b^2 < 0$ identisch in λ gelten. Gesucht ist in einer passend kleinen Umgebung von C eine Integralfläche J, gegeben durch eine zweimal stetig differenzierbare Funktion u, welche diesen Streifen enthält.

Diesem Anfangswertproblem der ursprünglichen Differentialgleichung, welches wir mit I bezeichnen, stellen wir folgendes Problem II in der α, β-Ebene gegenüber: In der α, β-Ebene betrachten wir die Gerade L: $\alpha + \beta = 0$, auf welcher $\lambda = \sqrt{2}\,\alpha$ die vom Nullpunkt aus gezählte Bogenlänge ist. Längs L seien (in einer Umgebung des Nullpunktes) stetig differenzierbare Funktionen $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ gegeben, welche der Streifenbedingung $\dot{u} - p\dot{x} - q\dot{y} = 0$ und der Bedingung $4ac - b^2 < 0$ genügen. Es sei ferner vorausgesetzt, daß dieser Anfangsstreifen nicht charakteristisch ist; d. h. es soll $a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 \neq 0$ sein. Gesucht ist eine Lösung des Differentialgleichungssystems S (9) bis (13) unter diesen Anfangsbedingungen, die stetige erste und gemischte zweite Ableitungen nach α, β besitzt.

Nach § 6 wissen wir, daß dieses kanonisch-hyperbolische Problem II eine und nur eine Lösung — in passend kleiner Umgebung des Nullpunktes der α, β-Ebene — besitzt, wobei das Abhängigkeitsgebiet aus der Anfangskurve durch die Charakteristiken $\alpha =$ konst., $\beta =$ konst. herausgeschnitten wird. Wir behaupten: *Die so charakterisierte Lösung des Problems II löst gleichzeitig das ursprüngliche Problem I.* (Daß das Umgekehrte der Fall ist, geht aus Nr. 1 hervor.)

Zunächst sehen wir, daß statt der Parameter α, β die Größen x, y als unabhängige Veränderliche eingeführt werden können. Denn nach (6) ist wegen $x_\alpha \neq 0$, $x_\beta \neq 0$ die Funktionaldeterminante von Null verschieden. Die Größen u, p, q besitzen also stetige erste Ableitungen nach x und y, und die Größe u kann als Funktion $u(x, y)$ aufgefaßt werden.

Wir beweisen, daß mit den unabhängigen Veränderlichen x, y die Gleichungen

$$p = u_x, \qquad q = u_y$$

gelten. Diese Gleichungen sind gleichbedeutend mit $A = u - p x_\alpha - q_x = 0$, $B = u_\beta - p x_\beta - q y_\beta = 0$[1]. Die Gleichung $A = 0$ ist als die Gleichung (13) des Differentialgleichungssystems von selbst erfüllt. In Nr. 1 haben wir bewiesen, daß in Konsequenz des Systems S: $B_\alpha = 0$ gilt; wir brauchen also, um $B = 0$ zu beweisen, nur festzustellen, daß längs der Anfangslinie $\alpha + \beta = 0$ die Beziehung $B = 0$ gilt. Dies aber war die Voraussetzung, welche wir für die Anfangswerte beim Problem II gemacht haben. Somit ist die Gleichung $B = 0$ überall erfüllt und damit p und q als Ableitungen von $u(x, y)$ festgestellt.

Endlich haben wir zu zeigen, daß mit unseren Größen x, y, u, $p = u_x$, $q = u_y$ und $u_{xx} = r$, $u_{xy} = s$, $u_{yy} = t$ auch die ursprüngliche Differentialgleichung (1) erfüllt ist. In der Tat erhalten wir aus Gleichung (11) bei Einführung von x und y, indem wir $p_\alpha = r x_\alpha + s y_\alpha$ und $q_\alpha = s x_\alpha + t y_\alpha$ schreiben,

[1] Denn diese beiden linearen Gleichungen bestimmen p und q eindeutig und sind gewiß für $p = u_x$, $q = u_y$ erfüllt.

$$0 = d\varrho_1 x_\alpha + a\varrho_1(r x_\alpha + s y_\alpha) + c(s x_\alpha + t y_\alpha)$$
$$= \varrho_1 x_\alpha \left(d + a r + c t + s\left(a\varrho_1 + \frac{c}{\varrho_1}\right)\right).$$

Da nun wegen der quadratischen Gleichung $a\varrho_1^2 - b\varrho_1 + c = 0$, $a\varrho_1 + \frac{c}{\varrho_1} = b$ und $\varrho_1 x_\alpha \neq 0$ galt, so ergibt sich sofort $0 = d + ar + ct + bs$ wie behauptet wurde.

Hiermit ist das Anfangswertproblem im quasilinearen Fall gelöst. Gleichzeitig ist die Eindeutigkeit der Lösung und das Abhängigkeitsgebiet festgestellt. Das Resultat sei nochmals zusammengefaßt:

Gegeben sei ein Anfangsstreifen $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ *mit* $u = p\dot{x} + q\dot{y}$. *Der Streifen sei hyperbolisch, d. h. es sei auf ihm* $4ac - b^2 < 0$; *er sei nicht charakteristisch, d. h. es gelte auf ihm* $a\dot{y}^2 - b\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 \neq 0$. *Die Anfangswerte seien einmal, die Koeffizienten zweimal stetig differenzierbar. Dann ist das Anfangswertproblem der Differentialgleichung* $ar + bs + ct + d = 0$ *für diesen Anfangsstreifen in einer passend kleinen Umgebung auf eine und nur eine Weise lösbar: die Lösung* u *in einem Punkte* P *hängt nur von demjenigen Teil der Anfangsdaten ab, welche zu dem Bogen der Anfangskurve gehören, der von den beiden durch* P *auf der Integralfläche gehenden Charakteristiken aus der Anfangskurve ausgeschnitten wird.*

Unser Resultat über die Anfangswerte zeigt im Einklang mit § 1, 2, daß die *charakteristischen Streifen* tatsächlich *Verzweigungsmannigfaltigkeiten* für die Lösungen der Differentialgleichung sind. Ändern wir nämlich die Anfangsdaten längs einer Anfangskurve C außerhalb eines Bogen AB ab, ohne im übrigen die Differenzierbarkeitsforderung zu verletzen, so erhalten wir eine andere Integralfläche, welche mit der ursprünglichen in P und dem ganzen krummlinigen Dreieck ABP übereinstimmt. Längs der Charakteristiken AP und BP schließt sich jedoch nunmehr zweimal stetig differenzierbar eine von der ursprünglichen verschiedene Integralfläche an. Wir haben also längs jedes charakteristischen Streifens die Möglichkeit einer Verzweigung, wobei die Mannigfaltigkeit der verschiedenen sich längs eines gegebenen charakteristischen Streifens von zweiter Ordnung berührenden Integralflächen genau so groß ist wie die Mannigfaltigkeit der zweimal stetig differenzierbaren Fortsetzungen der Anfangswerte über den Endpunkt A oder B von C hinaus.

Endlich sei bemerkt, daß in genau derselben Weise wie das Problem I sich auch das *charakteristische Anfangswertproblem* formulieren und lösen läßt.

§ 8. Die allgemeine Gleichung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$.

Das Anfangswertproblem der allgemeinen, nicht mehr quasilinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen läßt sich verhältnismäßig einfach auf die Überlegungen von § 7 zurückführen.

1. Quasilineare Systeme mit gleichem Hauptteil. In § 6, 1 haben wir Differentialgleichungssysteme der Form (3) für m Funktionen $u_1, \ldots, u_m$ behandelt. In diese Form kann man simultan jedes System der Form

$$a u^{\nu}_{xx} + b u^{\nu}_{xy} + c u^{\nu}_{yy} = f_{\nu}(x, y, u^1, \ldots, q_m) \quad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

bringen, wobei a, b, c feste, d. h. von ν nicht abhängige Funktionen von x, y sind, vorausgesetzt, daß in dem betreffenden Gebiet die Differentialgleichung hyperbolisch ist, d. h. $4ac - b^2 < 0$ ist. Man braucht lediglich statt x, y die charakteristischen Parameter α und β durch die charakteristischen Gleichungen

$$x_\alpha = \varrho_1 y_\alpha; \qquad x_\beta = \varrho_2 y_\beta, \qquad a\varrho^2 - b\varrho + c = 0$$

wie früher einzuführen [1].

Wir bemerken zunächst, daß die Theorie von § 7 sich ohne weiteres auf quasilineare Differentialgleichungs*systeme* mit gleichem Hauptteil ausdehnt. Mit anderen Worten: wir dürfen das Anfangswertproblem für das obige System auch dann als gelöst ansehen, wenn die von x und y unabhängigen Koeffizienten a, b, c noch von den Größen $u^1, \ldots, u^m$ und den Ableitungen $p_1, \ldots, q_m$ abhängen. Die fast im Wortlaut verlaufende Übertragung der Überlegungen braucht nicht durchgeführt zu werden.

Auf ein solches quasilineares System mit festem Hauptteil zweiter Ordnung werden wir nunmehr das allgemeine Problem durch einen einfachen formalen Kunstgriff reduzieren.

2. Lösung des Anfangswertproblems im allgemeinen Fall. Wir lösen nunmehr das Anfangswertproblem III für die Differentialgleichung

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0. \tag{2}$$

Gegeben sei ein Anfangsstreifen zweiter Ordnung C_2: $x(\lambda)$, $y(\lambda)$, $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, $r(\lambda)$, $s(\lambda)$, $t(\lambda)$. Es sei hierbei $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ und es mögen die Streifenrelationen

$$\dot{u} = p\dot{x} + q\dot{y}, \qquad \dot{p} = r\dot{x} + s\dot{y}, \qquad \dot{q} = s\dot{x} + t\dot{y},$$

sowie die Relationen $F = 0$ auf C_2 identisch in λ bestehen [2]. Ferner sei der Streifen C_2 hyperbolisch, d. h. es gelte auf ihm

$$4F_r F_t - F_s^2 < 0. \tag{3}$$

Endlich sei C nirgends charakteristisch, d. h. es gelte auf C

$$F_r \dot{y}^2 - F_s \dot{x}\dot{y} + F_t \dot{x}^2 \neq 0. \tag{4}$$

---

[1] Als charakteristische Gleichung des Differentialgleichungssystems würde sich übrigens nach der Methode von § 2, 3 einfach die m^{te} Potenz dieser letzten Gleichung ergeben.

[2] Es ist also C_2 von vornherein als Integralstreifen zweiter Ordnung vorausgesetzt. Im Grunde genommen ist natürlich nur ein Streifen erster Ordnung vorgebbar; aber ähnlich wie bei erster Ordnung ist unsere jetzige Formulierung bequemer, weil sie die Diskussion der Auflösbarkeit der betreffenden Gleichungssysteme vermeidet.

F sei dreimal, $x(\lambda), \ldots, t(\lambda)$ einmal stetig differenzierbar. Gesucht ist in einer passend kleinen Umgebung von C_2 eine dreimal stetig differenzierbare Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung (2), welche durch den Anfangsstreifen C_2 geht. Wir behaupten: *eine solche Lösung existiert, ist eindeutig bestimmt und hängt in einem Punkt $P(x, y, u)$ nur von demjenigen Anfangsstück von C ab, welches von den beiden durch P gehenden Charakteristiken auf der Integralfläche $u(x, y)$ aus C herausgeschnitten wird.*

Wir beweisen unsere Behauptungen, indem wir unser Problem III auf ein Problem IV des unter Nr. 1 diskutierten Typus reduzieren. Wir führen zunächst formal neben der unbekannten Funktion u zwei neue unabhängige Funktionen u^1 und u^2 ein, nämlich

$$u_x = u^1, \quad u_y = u^2$$

und verabreden die weiteren Ersetzungen

$$r = u^1_x, \quad s = u^1_y, \quad t = u^2_y.$$

Nunmehr differenzieren wir die Differentialgleichung $F = 0$ nach x bzw. y und schreiben das Ergebnis in der Form

$$F_r u^1_{xx} + F_s u^1_{xy} + F_t u^1_{yy} + F_p u^1_x + F_q u^1_y + F_u u^1 + F_x = 0, \tag{5}$$

$$F_r u^2_{xx} + F_s u^2_{xy} + F_t u^2_{yy} + F_p u^2_x + F_q u^2_y + F_u u^2 + F_y = 0, \tag{6}$$

wobei die eben verabredeten Einsetzungen vorzunehmen sind. Ferner ergänzen wir das System dieser beiden Gleichungen durch die folgende dritte Gleichung

$$F_r u_{xx} + F_s u_{xy} + F_t u_{yy} - F_r u^1_x - F_s u^1_y - F_t u^2_y = 0, \tag{7}$$

welche trivial ist, sobald wir unter u^1 und u^2 tatsächlich die Ableitungen von u verstehen. Nunmehr aber fassen wir diese drei Gleichungen, ohne an die ursprüngliche Bedeutung von u^1 und u^2 zu denken, als ein System von drei quasilinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die drei Funktionen u, u^1, u^2 auf und bemerken, daß es sich genau um ein System zweiter Ordnung der oben betrachteten Art mit festem Hauptteil handelt. Den Anfangsbedingungen des Problems III entsprechen Anfangsbedingungen für $u, u^1, u^2, u_x, u_y, u^1_x, u^1_y, u^2_x, u^2_y$. Das Problem, ein Lösungssystem der Differentialgleichungen (5), (6), (7) mit diesen Anfangsbedingungen zu finden, bezeichnen wir als Problem IV. Dieses neue Problem ist genau ein solches der eben behandelten Art. Eine Lösung von III führt also sofort zu einer Lösung von IV. Andererseits können wir gemäß Nr. 1 das Problem IV als gelöst betrachten, wobei die Frage der Eindeutigkeit und des Abhängigkeitsgebietes sofort miterledigt ist. Unser Problem III ist gelöst, sobald wir zeigen können, daß wir mit der Lösung von IV auch umgekehrt die Lösung von III gewonnen haben. Dies werden wir zeigen, indem wir den speziellen Charakter der Anfangsbedingungen

bei IV berücksichtigen, wie sie sich durch Übertragung der Anfangsbedingungen von III ergeben. Hierzu führen wir die Hilfsgrößen

$$X = u_x - u^1, \qquad Y = u_y - u^2, \qquad Z = u^1_y - u^2_x$$

ein. Diese Größen haben nach Voraussetzung beim Problem IV längs C die Anfangswerte Null. Ebenso verschwinden dort die Ableitungen $X_x, X_y, Y_x, Y_y, Z_x, Z_y$. Endlich merken wir noch an, daß identisch

$$X_y - Y_x = -Z$$

gilt. Nachdem wir gemäß Nr. 1 das Problem IV als gelöst betrachten, haben wir nunmehr, um zu zeigen, daß damit auch III gelöst ist, nur nachzuweisen, daß unter Berücksichtigung unserer Anfangsbedingungen identisch überall und nicht nur längs der Anfangskurve $X = Y = 0$ ist. Die Gleichungen (5), (6) besagen dann $F_x = F_y = 0$ also $F = \text{konst.}$ und wegen der Anfangsbedingung $F = 0$ also überall $F = 0$.

Um den Beweis des Verschwindens von X, Y zu führen, zeigen wir: Die Größen X, Y, Z, welche hierbei nach Lösung des Problems IV als bekannte Ausdrücke in x, y betrachtet werden, erfüllen ein System von drei Differentialgleichungen der Form

$$F_r X_{xx} + F_s X_{xy} + F_t X_{yy} + \cdots = 0, \tag{8}$$

$$F_r Y_{xx} + F_s Y_{xy} + F_t Y_{yy} + \cdots = 0, \tag{9}$$

$$F_r Z_{xx} + F_s Z_{xy} + F_t Z_{yy} + \cdots = 0, \tag{10}$$

wobei die Punkte $\cdots$ lineare homogene Ausdrücke in X, Y, Z und den ersten Ableitungen $X_x, \ldots, Z_y$ bedeuten. Dabei wollen und können wir in den Koeffizienten dieses Differentialgleichungssystems die längs der Lösung von II geltenden Ausdrücke in x, y eingesetzt denken; es sind dann für diese spezielle jetzt allein interessierende Lösung die Koeffizienten als gegebene Funktionen von x und y anzusehen. Dieses Differentialgleichungssystem (8), (9), (10) ist also ein lineares System von Gleichungen mit demselben Hauptteil. Für das Anfangswertproblem eines solches Systems ergab § 6 die eindeutige Bestimmtheit der Lösung. Da hier die Anfangswerte von X, Y, Z und ihre ersten Ableitungen Null sind, so ist wegen dieses Eindeutigkeitssatzes $X = Y = Z = 0$ die einzige Lösung dieses homogenen Differentialgleichungssystems. Zur Vollendung unseres Beweises braucht also lediglich das Bestehen des obigen Differentialgleichungssystems (8), (9), (10) nachgewiesen zu werden. Dies nun kann durch folgende kleine formale Rechnung geschehen.

Zunächst leiten wir (10) ab. Wir bilden zu dem Zweck die Ausdrücke

$$F_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_r u^1_{xx} + F_s u^1_{xy} + F_t u^2_{xy} + F_p u^1_x + F_q u^2_x + F_u u_x + F_x, \tag{11}$$

$$F_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_r u^1_{xy} + F_s u^1_{yy} + F_t u^2_{yy} + F_p u^1_y + F_q u^2_y + F_u u_y + F_y, \tag{12}$$

wobei die Klammern links bedeuten, daß man in F erst u, p, q, r, s, t als Funktionen von x, y einsetzen soll, bevor man differenziert. Für unsere Ausdrücke gilt

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{13}$$

Nunmehr addieren wir zu der Gleichung (5) den identisch verschwindenden Ausdruck $F_1 - F_1$, zu (6) den Ausdruck $F_2 - F_2$ und erhalten dann durch andere Zusammenfassung der Glieder

$$F_t\,(u^1_{yy} - u^2_{xy}) + F_q\,(u^1_y - u^2_x) + F_u\,(u^1 - u_x) + F_1 = 0 \tag{14}$$

bzw.

$$F_r(u^2_{xx} - u^1_{xy}) + F_s(u^2_{xy} - u^1_{yy}) + F_p(u^2_x - u^1_y) + F_u(u^2 - u_y) + F_2 = 0 \tag{15}$$

oder

$$F_t Z_y + F_q Z - F_u X + F_1 = 0, \tag{16}$$

$$F_r Z_x + F_s Z_y + F_p Z + F_u Y - F_2 = 0, \tag{17}$$

wonach wir die Gleichung (7) in der Form

$$F_r X_x + F_s X_y + F_t Y_y = 0 \tag{18}$$

hinzufügen. Differentiation der Gleichung (16) nach y, der Gleichung (17) nach x und Addition ergibt

$$F_r Z_{xx} + F_s Z_{xy} + F_t Z_{yy} + \cdots = 0, \tag{10}$$

wo die Punkte hier wie im folgenden einen linearen homogenen Ausdruck in den Größen X, Y, Z und deren ersten Ableitungen bedeuten. Die Gleichung (18) nach x differenziert ergibt nach der Substitution $Y_{xy} = X_{yy} + Z_y$

$$F_r X_{xx} + F_s X_{xy} + F_t X_{yy} + \cdots = 0. \tag{8}$$

Dieselbe Gleichung nach y differenziert ergibt nach Einsetzung $X_y = Y_x - Z$

$$F_r Y_{xx} + F_s Y_{xy} + F_t Y_{yy} + \cdots = 0. \tag{9}$$

Die Gleichungen (8), (9), (10) stellen das gewünschte System dar, und damit ist der Beweis zu Ende geführt.

Es sei nochmals bemerkt, daß genau die entsprechenden Betrachtungen auch das charakteristische Anfangswertproblem lösen.

Ebenso sei darauf hingewiesen, daß ganz analog auch das Anfangswertproblem einer *Differentialgleichung n^{ter} Ordnung im total-hyperbolischen Fall* gelöst werden kann. Dabei legen wir eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$F(x, y, u, \ldots, r_0, \ldots, r_n) = 0 \tag{22}$$

zugrunde, wobei zur Abkürzung $r_\nu = \dfrac{\partial^n u}{\partial x^\nu \partial y^{n-\nu}}{}_{\nu=0,\ldots,n}$ gesetzt ist, und die Punkte Ableitungen niedrigerer als n^{ter} Ordnung bedeuten.

Ein gegebener Anfangsintegralstreifen n^{ter} Ordnung hieß (vgl. S. 303) *total-hyperbolisch*, wenn für jeden seiner Punkte die algebraische Gleichung n^{ter} Ordnung in ϱ

$$F_{r_n} \varrho^n - F_{r_{n-1}} \varrho^{n-1} + \cdots = 0 \tag{23}$$

n verschiedene reelle Lösungen besitzt. Für die Durchführung der Betrachtung sei auf die Literatur[1] verwiesen.

Anhang zum fünften Kapitel.

§ 1. Einführung komplexer Größen. Übergang vom hyperbolischen zum elliptischen Fall durch komplexe Variable.

Die Überlegungen von Kap. V, § 6, 2 gelten fast ohne Modifikationen, wenn die Funktionen f bzw. die Koeffizienten $a_{\nu\mu}$ komplexwertige Funktionen der reellen unabhängigen Veränderlichen x, y werden. Wir haben dann auch die Lösungen $u = u_1 + i u_2$ in Realteil und Imaginärteil zu spalten und erhalten so statt n bzw. N Gleichungen mit komplexwertigen Koeffizienten die doppelte Anzahl reeller Gleichungen von demselben Typus für die Funktionen u_1 und u_2. Es bleibt dabei die Theorie der Integration, Eindeutigkeitssätze sowie die Resultate über die stetige und differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen von Parametern bestehen.

Wenn in einer Differentialgleichung $F(x, y, u, \ldots) = 0$ die linke Seite eine analytische Funktion ihrer sämtlichen Argumente ist und wenn man überdies weiß, daß die Lösung $u(x, y)$ analytisch von x, y abhängt, so läßt sich die Differentialgleichung und ihre Lösung analytisch ins Komplexe fortsetzen, indem man $x = x_1 + i x_2$ und $y = y_1 + i y_2$ als komplexe Veränderliche auffaßt. Dabei verwischt sich der wesentlich am Reellen hängende Unterschied der Typen, so daß ein Übergang vom elliptischen zum hyperbolischen Typus grundsätzlich möglich wird.

Das einfachste und wichtigste Beispiel bietet die Differentialgleichung

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

welche im Reellen elliptisch ist. Wir nehmen an, daß die rechte Seite eine analytische Funktion ihrer fünf Argumente sei. Machen wir darüber hinaus die Voraussetzung, daß die Lösung u analytisch von x und y abhängt, so dürfen wir u als Funktion der komplexen Veränderlichen $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$ auffassen und u als eine komplexwertige Funktion der vier Variablen x_1, x_2, y_1, y_2 ansehen. Unsere Differentialgleichung besagt ursprünglich im Reellen

$$u_{x_1 x_1} + u_{y_1 y_1} = f(x, y, u, u_{x_1}, u_{y_1}). \tag{2}$$

[1] FRIEDRICHS u. LEWY: Math. Ann. Bd. 99, a. a. O.

Da wir aber im Komplexen statt nach y_1 auch ebenso nach iy_2 differenzieren dürfen, so wird die komplexe analytische Funktion u, als Funktion der vier Veränderlichen x_1, x_2, y_1, y_2 aufgefaßt, ebenso der Differentialgleichung

$$u_{x_1 x_1} - u_{y_1 y_1} = f(x, y, u, u_{x_1}, -i\, u_{y_1}) \tag{3}$$

genügen, welche formal hyperbolischen Charakter besitzt. Die Berechtigung einer solchen Umformung hängt an dem analytischen Charakter der Lösung u, d. h. daran, daß die Ableitung der Funktion im Komplexen unabhängig von der Differentiationsrichtung ist.

Man kann nun den Gedankengang umkehren, indem man von einer reellen Lösung der ursprünglichen Gleichung ausgeht und sodann versucht, diese Lösung derartig ins Komplexe fortzusetzen, daß für die Fortsetzung die hyperbolische Gleichung (3) bzw. entsprechende Gleichungssysteme gelten, und indem man dann nachher den analytischen Charakter der so entstehenden komplexwertigen Funktion nachweist. Dies ist der Grundgedanke der im folgenden kurz skizzierten Methode von HANS LEWY zum Nachweis des analytischen Charakters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen[1].

§ 2. Der analytische Charakter der Lösungen im elliptischen Fall.

1. Funktionentheoretische Vorbemerkung. Eine komplexwertige Funktion $w(x_1, x_2, y_1, y_2) = w_1 + iw_2$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung heißt in einem Bereich B des vierdimensionalen x_1, x_2, y_1, y_2-Raumes eine analytische Funktion der beiden komplexen Veränderlichen $x = x_1 + i\,x_2$, $y = y_1 + iy_2$, wenn dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\nabla w = w_{x_1} - i\, w_{x_2} = 0, \qquad \Lambda w = w_{y_1} - i\, w_{y_2} = 0 \tag{1}$$

erfüllt sind. Äquivalent ist die folgende Definition: w heißt in einer Umgebung eines Punktes $x = 0$, $y = 0$ analytisch, wenn w in eine Potenzreihe

$$w = \sum_{\nu, \mu = 0}^{\infty} a_{\nu\mu}\, x^{\nu}\, y^{\mu} \tag{2}$$

für $|x| \leqq M$, $|y| \leqq M$ bei passendem positivem M entwickelt werden kann[2]; sie heißt analytisch in einem Bereiche B, wenn sie es in Umgebung jedes Punktes von B ist.

[1] Math. Ann. Bd. 101, S. 609ff.

[2] Daß z. B. die zweite Eigenschaft der Entwickelbarkeit aus der Cauchy-Riemannschen Definition folgt, erkennt man mit Hilfe zweimaliger Anwendung der Cauchyschen Integraldarstellung für die komplexe Veränderliche folgendermaßen: Die Cauchy-Riemannschen Relationen (1) mögen im Bereich B, definiert durch $|x| < M$, $|y| < M$, gelten. Der Kreis $K_x : |x - \xi| = \frac{M}{\ldots}$ liegt für jedes Werte-

2. Analytischer Charakter der Lösungen von $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$. Wir setzen voraus, daß in unserer Differentialgleichung

$$\Delta u = f(x, y, u, p, q) \tag{4}$$

die Funktion f eine (reelle) analytische Funktion ihrer fünf Argumente ist und daß $u(x, y)$ irgendeine gegebene zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung in einer (reellen) Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ sei. Der vorausgesetzte analytische Charakter von f gelte für diese Umgebung und den durch die betrachtete Lösung u mitbestimmten Wertebereich von u, p, q. Wir behaupten, daß die vorgelegte Lösung u nicht nur zweimal stetig differenzierbar, sondern sogar analytisch ist. Den Beweis führen wir durch *Fortsetzung ins Komplexe*, indem wir u stetig zu einer komplexwertigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion von x_1, x_2, y_1, y_2 ergänzen, welche den Bedingungen (1) genügt[1]. Indem wir komplexwertige Variable $x = x_1 + i x_2$, $y = y_1 + i y_2$ einführen, streben wir an, eine komplexwertige Funktion $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ — die wir nachher als analytisch in x und y nachweisen werden — aufzubauen, welche sich für $x_2 = y_2 = 0$ auf die vorgegebene Funktion $u(x, y)$ reduziert, die wir nunmehr $u(x_1, y_1)$ schreiben. Wir vollziehen die Fortsetzung schrittweise, indem wir zunächst bei fest-

paar ξ_1, ξ_2 aus $|\xi| \leqq \frac{M}{2}$ ganz in B. Ebenso alle Punkte $|x - \xi| \leqq \frac{M}{2}$. Somit ist, wenn wir y_1, y_2 für den Moment als Parameter betrachten, w dort nach CAUCHYs Integralformel dargestellt durch

$$w(x_1, x_2; y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_x} \frac{w(\xi_1, \xi_2, y_1 y_2)}{(\xi_1 + i\xi_2) - (x_1 + i x_2)} (d\xi_1 + i\, d\xi_2).$$

Ebenso liegt der Kreis K_y: $|y - \eta| = \frac{M}{2}$ und sein Inneres in B, wenn η_1 und η_2 durch die Relation $|\eta| \leqq \frac{M}{2}$ eingeschränkt sind. Somit kann wiederum w nach CAUCHY in der Form

$$w(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{w(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)}{(\eta_1 + i\eta_2) - (y_1 + i y_2)} (d\eta_1 + i\, d\eta_2)$$

dargestellt werden. Durch Einsetzung ergibt sich die Cauchysche Doppelintegraldarstellung

$$w(x_1, x_2, y_1, y_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{K_x}\int_{K_y} w(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \frac{(d\xi_1 + i\, d\xi_2)(d\eta_1 + i\, d\eta_2)}{(\xi_1 + i\xi_2 - x)(\eta_1 + i\eta_2 - y)}. \tag{3}$$

Nunmehr entwickele man genau wie bei einer Veränderlichen den Bruchfaktor im Integranden in eine Potenzreihe nach x und y und integriere gliedweise. Dann erhält man für w die gewünschte Potenzreihendarstellung.

[1] Im Falle unserer Differentialgleichung könnte der Beweis im Prinzip ebenso einfach durch Anwendung potentialtheoretischer Methoden gewonnen werden. Jedoch besitzt die hier dargestellte Methode von HANS LEWY ein prinzipielles Interesse und öffnet den Zugang zu weiteren Problemen [vgl. Math. Ann. Bd. 104, S. 325ff. – Trans. Amer. Math. Soc. Bd. 37 (1935) S. 417ff. u. Bd. 41 (1937) S. 365ff.].

gehaltenem y_1 die ursprüngliche Funktion $u(x_1, y_1)$ in eine komplexwertige Funktion $u(x_1, x_2, y_1)$ und dann diese zu einer komplexwertigen Funktion $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ erweitern. Zunächst setzen wir f als analytische Funktion komplexwertiger Argumente fort; f ist dann nach diesen Argumenten stetig differenzierbar. Der erste Schritt besteht dann darin, daß wir x_1 als Parameter betrachten und die neue Funktion $u(x_1, x_2, y_1)$ durch die aus der ursprünglichen Differentialgleichung (4) formal bei Ersetzung von x durch $x_1 + i x_2$ entstehende Differentialgleichung

$$u_{y_1 y_1} - u_{x_2 x_2} = f(x_1 + i x_2, y_1, u, -i u_{x_2}, u_{y_1}) \tag{5}$$

festzulegen suchen. Dabei wird x_1 als fester Parameter betrachtet, während y_1 und x_2 die beiden reellen unabhängigen Veränderlichen in der komplexwertigen Differentialgleichung sind. Wir betrachten für diese Differentialgleichung ein Anfangswertproblem mit der Anfangskurve $x_2 = 0$. Auf dieser lauten die Anfangsbedingungen

$$u(x_1, 0, y_1) = u(x_1, y_1), \tag{6}$$

wobei rechts die ursprüngliche reelle Ausgangslösung von (4) steht.

Zweitens geben wir u_{x_2} vor, in dem wir die Anfangsforderung

$$\nabla u = u_{x_1} - i u_{x_2} = 0 \quad \text{für} \quad x_2 = 0, \tag{7}$$

stellen, welche besagt, daß die Cauchy-Riemannsche Bedingung auf der Anfangskurve erfüllt sein soll. Gemäß unserer früheren Theorie ist damit in eindeutiger Weise die Fortsetzung $u(x_1, x_2, y_1)$ in einer passenden Umgebung der Anfangskurve garantiert. Da diese Lösung nach unseren früheren Resultaten (V, § 5) vom Parameter x_1 in einem gewissen Intervall stetig differenzierbar abhängt, so ist $u(x_1, x_2, y_1)$ in einer vollen dreidimensionalen Rechtecksumgebung des Punktes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$ definiert und stetig nach x_1 stetig differenzierbar. Ebenso ist auch die Ableitung u_{x_2} stetig nach x_1 differenzierbar.

Indem wir die zweite Anfangsbedingung (7) nach dem Parameter x_1 differenzieren, erhalten wir $\frac{\partial}{\partial x_1} \nabla u = u_{x_1 x_1} - i u_{x_2 x_1} = 0$. Beachten wir ferner, daß für $x_2 = 0$ sowohl die Differentialgleichung (4) als auch die neue Fortsetzungsdifferentialgleichung (5) gilt und subtrahieren wir, so erhalten wir unter Benutzung von (7)

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 0 \quad \text{für} \quad x_2 = 0.$$

Also für $x_2 = 0$

$$u_{x_2 x_1} + i u_{x_2 x_2} = 0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \nabla u = \frac{\partial}{\partial x_2} (u_{x_1} - i u_{x_2}) = 0. \tag{8}$$

Nunmehr wenden wir auf die Differentialgleichung (5) den Cauchyschen Operator ∇ an. Setzen wir zur Abkürzung $\nabla u = \omega$, so erhalten wir

bei unserem Differentiationsprozeß

$$\omega_{y_1 y_1} - \omega_{x_2 x_2} = f_x \nabla x + f_u \nabla u - i f_{u_x} \nabla u_{x_2} + f_{u_y} \nabla u_{y_1}.$$

Da nun $\nabla x = 0$ ist, so ergibt sich endlich

$$\omega_{y_1 y_1} - \omega_{x_2 x_2} = f_u \omega - i f_{u_x} \omega_{x_2} + f_{u_y} \omega_{y_1}.$$

Hier sind die Koeffizienten rechts, nachdem wir schon im Besitze der Funktionen $u(x_1, x_2, y_1)$ sind, bekannte komplexwertige Funktionen von y_1 und x_2. Unsere Gleichung stellt also eine lineare homogene hyperbolische Differentialgleichung für ω dar, für welche auf Grund unserer früheren Resultate die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig bestimmt ist. Da aber wegen (7) und (8) die Anfangswerte von ω und $\frac{\partial \omega}{\partial x_2}$ verschwinden, so gilt $\omega = 0$ identisch in einem dreidimensionalen Gebiet Q um den Nullpunkt.

Nunmehr haben wir den zweiten Schritt bei der Fortsetzung zu vollziehen, nämlich u in ein vierdimensionales x_1, x_2, y_1, y_2-Gebiet fortzusetzen. Zu dem Zweck betrachten wir in Q irgendwelche Werte x_2 und y_1 und nehmen dann die Fortsetzung mit Bezug auf die neue Variable auf Grund der hyperbolischen Differentialgleichung

$$u_{x_1 x_1} - u_{y_1 y_1} = f(x, y, u, u_{x_1}, -i u_{y_1}) \tag{9}$$

vor. Dabei ist nunmehr in der x_1, y_2-Ebene auf der Geraden $y_2 = 0$ als Anfangsbedingung vorgeschrieben

$$u(x_1, x_2, y_1, 0) = u(x_1, x_2, y_1)$$

und es wird als zweite Anfangsbedingung gefordert, daß

$$\Lambda u = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - i \frac{\partial}{\partial y_2}\right) u = 0 \quad \text{für} \quad y_2 = 0 \tag{10}$$

ist. Wiederum ist damit die Funktion $u(x_1, x_2, y_1, y_2)$ eindeutig definiert. Wegen der Stetigkeitseigenschaften der Lösung unserer partiellen Differentialgleichung (9) mit Bezug auf die Parameter x_2, y_1 erkennen wir, daß diese Lösung nun wirklich in einer vierdimensionalen Umgebung B des Nullpunktes definiert ist und sich dort nach den Parametern stetig differenzieren läßt.

Nunmehr haben wir, um den analytischen Charakter von u nachzuweisen, lediglich zu zeigen, daß in B überall die Relation $\nabla u = 0$ und $\Lambda u = 0$ gilt. Die Relation $\Lambda u = 0$ für $y_2 = 0$ ist gerade unsere Anfangsbedingung (10). Ferner gilt für $y_2 = 0$ sowohl die Differentialgleichung (9) als auch die Differentialgleichung (5), und wir erhalten durch Subtraktion, unter Beachtung von $\Delta u = 0$ und (10),

$$u_{x_1 x_1} - u_{y_2 y_2} + u_{x_2 x_2} - u_{y_1 y_1} = 0 \quad \text{für} \quad y_2 = 0.$$

Da auf $y_2 = 0$ aber nach dem Ergebnis der vorigen Überlegung auch $\nabla u = u_{x_1} - i u_{x_2} = 0$ ist, so folgt auf $y_2 = 0$ durch Differentiation nach x_1

und x_2 und Zusammenfassung $\nabla\nabla u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0$ und somit (11) $u_{y_1y_1} + u_{y_2y_2} = 0$. Andererseits gilt dort (10) also durch Differentiation nach dem Parameter y_1: $u_{y_1y_1} - i u_{y_1y_2} = 0$, also wegen (11),

$$\frac{\partial}{\partial y_2} \Delta u = 0 \quad \text{auf} \quad y_2 = 0.$$

Nunmehr folgt genau wie oben aus dem Eindeutigkeitssatz für das Anfangswertproblem, das im vierdimensionalen Bereich B überall $\Delta u = 0$ gilt. Analog beweisen wir $\nabla u = 0$ in B.

Da somit u als analytische Funktion in einer komplexen Umgebung des Nullpunkts $x = 0$, $y = 0$ erkannt ist, ist damit *der analytische Charakter, d. h. die Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe für die ursprüngliche Lösung $u(x, y)$ unserer elliptischen Differentialgleichung $\Delta u = f$ bewiesen.*

3. Bemerkung über den allgemeinen Fall der Differentialgleichung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$. Lewys Gedanke führt auch im allgemeinen Fall einer analytischen Differentialgleichung zweiter Ordnung bei zwei Veränderlichen zum Ziele. Es gilt der Satz: *Wenn $u(x, y)$ eine dreimal stetig differenzierbare Lösung der in allen ihren Argumenten als analytisch vorausgesetzten elliptischen Differentialgleichung ist, so ist $u(x, y)$ notwendigerweise selbst eine analytische Funktion der beiden Veränderlichen x und y.*

Für den Beweis im einzelnen sei auf die Literatur verwiesen[1]. Der Grundgedanke des Beweises im allgemeinen Fall ist folgender: Die Differentialgleichung wird wie in Kap. V, § 8 durch ein quasilineares System von Differentialgleichungen ersetzt. Wegen des elliptischen Charakters können aber jetzt nicht mehr reelle charakteristische Parameter α, β eingeführt werden. Jedoch gelingt ganz entsprechend wie in Kap. V, § 8 die Reduktion auf ein System von Differentialgleichungen für unbekannte Funktionen $v^1, v^2, \ldots$ der Form

$$v^\nu_{\alpha\alpha} + v^\nu_{\beta\beta} = f_\nu(\alpha, \beta, v^1, \ldots; v^1_\alpha, \ldots; v^1_\beta, \ldots).$$

Für ein solches System kann nunmehr fast unverändert die Theorie aus Nr. 2 angewendet werden, und auf dieser Grundlage wird dann die Durchführung des Beweises für den analytischen Charakter der Lösung möglich.

Lewys Methode ist insofern auf zwei unabhängige Veränderliche beschränkt, als der hier verwendete Fortsetzungsprozeß mittels hyperbolischer Differentialgleichungen nur bei zwei unabhängigen Veränderlichen vollständig entwickelt ist. Den sehr wichtigen Satz vom analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen auch bei mehr unabhängigen Veränderlichen zu beweisen, ist aber mit anderen Methoden möglich[2].

---

[1] Lewy: Math. Ann. Bd. 101, sowie eine Darstellung des Lewyschen Beweises bei Hadamard, l. c.

[2] Vgl. z. B. E. Hopf: Math. Ztschr. Bd. 34, S. 194ff.

§ 3. Weitere Bemerkungen zur Charakteristikentheorie bei zwei Veränderlichen.

Man kann die Integrationstheorie der allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichung $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ auch direkt mit derselben Grundidee wie Kap. V, § 8, aber ohne die Zwischenschaltung quasilinearer Systeme in Angriff nehmen[1]. Es werden hierbei die acht Größen x, y, u, p, q, r, s, t als Funktionen der charakteristischen Parameter α und β gesucht. Zu dem entsprechenden System kanonisch-hyperbolischer quasilinearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung gelangt man im wesentlichen unter Wiederholung der früheren Überlegungen folgendermaßen: Setzen wir zur Abkürzung

$$[F]_x = F_p r + F_q s + F_u p + F_x$$
$$[F]_y = F_p s + F_q t + F_u q + F_y$$

und differenzieren wir die gegebene Differentialgleichung nach x, so ergibt sich, wenn α und β charakteristische Parameter auf der betrachteten Integralfläche sind, zusammen mit den Streifenbedingungen für die charakteristischen Parameter $\lambda = \alpha$ und $\lambda = \beta$ die Tatsache, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} F_r & F_s & F_t & [F]_x \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 & -r_\lambda \\ 0 & x_\lambda & y_\lambda & -s_\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (\lambda = \alpha) \\ (\lambda = \beta) \end{matrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} F_r & F_s & F_t & [F]_y \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 & -s_\lambda \\ 0 & x_\lambda & y_\lambda & -t_\lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (\lambda = \alpha) \\ (\lambda = \beta) \end{matrix}$$

einen Rang kleiner als 3 haben müssen. Dies liefert die beiden charakteristischen Gleichungen

$$\begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ x_\lambda & y_\lambda & 0 \\ 0 & x_\lambda & y_\lambda \end{vmatrix} = F_t x_\lambda^2 - F_s x_\lambda y_\lambda + F_r y_\lambda^2 = 0$$

oder nach Zerspaltung

$$y_\alpha - \varrho_1 x_\alpha = 0, \qquad y_\beta - \varrho_2 x_\beta = 0$$

(ϱ_1 und ϱ_2 bekannte Funktionen von x, y, u, p, q, r, s, t), sowie vier weitere Relationen. Hierzu kommen sechs Streifenrelationen für u_α, $u_\beta, p_\alpha, p_\beta, q_\alpha, q_\beta$. Zusammen sind dies 12 partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für die acht Funktionen $x, y, \ldots, s, t$ von α und β. Von diesen Gleichungen werden acht geeignete ausgewählt, von denen dann

[1] Diese Zwischenschaltung empfahl sich für die Darstellung, weil so die Schwierigkeit in verschiedene Stufen zerlegt wird. Prinzipiell aber stellt sie keine Verkürzung des Beweises dar.

die übrig bleibenden vier sich als abhängig erweisen. Das ausgewählte System kann genau nach den Methoden von Kap. V, § 7 behandelt werden, und es stellt sich in ähnlicher Weise heraus, daß wir so die Lösung des Anfangswertproblems unserer ursprünglichen Differentialgleichung erhalten. Hinsichtlich der Durchführung dieser Methode sei auf die Literatur verwiesen[1].

§ 4. Sonderstellung der Monge-Ampèreschen Gleichungen.

Bei linearen und quasilinearen Differentialgleichungen ergab die Charakteristikentheorie sofort von selbst statt eines Gleichungssystems für acht gesuchte Funktionen $x, \ldots, t$ von α und β ein einfacheres System von nur fünf Gleichungen für die fünf Größen x, y, u, p, q. Es ist bemerkenswert, daß dieselbe Vereinfachung der allgemeinen Theorie auch für die in der Geometrie wichtige nicht mehr quasilineare *Monge-Ampèresche Differentialgleichung*

$$(1) \qquad A\,r + B\,s + C\,t + D\,(r\,t - s^2) + E = 0$$

statt hat, wobei A, B, C, D, E gegebene Funktionen von x, y, u, p, q sind. Diese Differentialgleichung nimmt also gewissermaßen eine Zwischenstellung zwischen den quasilinearen und den allgemeinen nichtlinearen Differentialgleichungen ein. Der hyperbolische Charakter ist, wie man leicht sieht, durch die Ungleichung

$$(2) \qquad B^2 - 4\,A\,C + 4\,E\,D > 0$$

gekennzeichnet.

Aus $p_\alpha = r\,x_\alpha + s\,y_\alpha$ und $q_\alpha = s\,x_\alpha + t\,y_\alpha$ gewinnen wir

$$(r\,t - s^2)\,y_\alpha = r\,q_\alpha - s\,p_\alpha$$

und entsprechend

$$(r\,t - s^2)\,y_\beta = r\,q_\beta - s\,p_\beta\,.$$

Die charakteristischen Bedingungen ergeben sich hiernach, indem man für die Matrix

$$\begin{pmatrix} A\,y_\alpha + D\,q_\alpha & B\,y_\alpha - D\,p_\alpha & C\,y_\alpha & -E\,y_\alpha \\ x_\alpha & y_\alpha & 0 & -p_\alpha \\ 0 & x_\alpha & y_\alpha & -q_\alpha \end{pmatrix}$$

und die entsprechende bei Ersetzung von α durch β entstehende Matrix den Rang kleiner als 3 fordert. Nach einigen Umformungen gelangt man zu dem folgenden die gegebene Differentialgleichung ersetzenden charakteristischen System: Die quadratische Gleichung

$$(3) \qquad A\,\varrho^2 - B\,\varrho + A\,C - E\,D = 0$$

[1] LEWY, l. c., HADAMARD, l. c. und FRIEDRICHS-LEWY, l. c.

habe die beiden verschiedenen reellen Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2, welche von x, y, u, p, q abhängen. Dann besteht das charakteristische Differentialgleichungssystem

$$(4) \qquad \begin{aligned} \varrho_1\, x_\alpha - A\, y_\alpha - D\, q_\alpha &= 0 \\ \varrho_2\, x_\beta - A\, y_\beta - D\, q_\beta &= 0 \\ \varrho_1\, y_\alpha - B\, y_\alpha + D\, p_\alpha + C\, x_\alpha &= 0 \\ E\, y_\beta + \varrho_2\, p_\beta + C\, q_\beta &= 0 \\ u_\alpha - p\, x_\alpha - q\, y_\alpha &= 0; \end{aligned}$$

es erweist sich bei den entsprechenden Anfangsbedingungen als äquivalent mit dem Anfangswertproblem der ursprünglichen Differentialgleichung.

Die Sonderstellung der Monge-Ampèreschen Gleichungen kann auch durch folgende Betrachtung über das Anfangswertproblem beleuchtet werden: Für eine in den zweiten Ableitungen quadratische Differentialgleichung

$$(5) \quad L[u] = A\,r^2 + B\,s^2 + C\,t^2 + D\,r\,s + E\,r\,t + F\,s\,t + G\,r + H\,s + I\,t + K = 0,$$

wobei $A, \ldots, K$ Funktionen von x, y, u, p, q sind, stellen wir das Anfangswertproblem längs einer Kurve $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ durch Vorgabe von $u(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$, wobei die Streifenrelation $\dot u = p\,\dot x + q\,\dot y$ erfüllt sei. Es muß nun zunächst dieser Streifen erster Ordnung zu einem Integralstreifen zweiter Ordnung ergänzt werden, indem wir aus $L = 0$ und den Streifenrelationen

$$r\,\dot x + s\,\dot y = \dot p, \qquad s\,\dot x + t\,\dot y = \dot q$$

die Anfangswerte von r, s, t berechnen. Wegen des quadratischen Charakters von L wird diese Ergänzung im allgemeinen auf zwei Weisen möglich sein. Nun gilt: Für die Monge-Ampèreschen Gleichungen und nur für diese unter allen Gleichungen der Form (5) ist bei beliebigem Anfangsstreifen erster Ordnung die Ergänzung zu einem Integralstreifen nur auf eine Weise möglich.

Zum Beweise setze man $\dot y/\dot x = -\alpha$ und erhält

$$s = \alpha\,t + \cdots, \quad r = \alpha^2\,t + \cdots,$$

wo die Punkte Ausdrücke bedeuten, die längs des Streifens erster Ordnung bekannt sind. Indem man in $L = 0$ einsetzt, erhält man als Koeffizienten von t^2 den Ausdruck

$$A\,\alpha^4 + D\,\alpha^3 + (E + B)\,\alpha^2 + F\,\alpha + C.$$

Das Verschwinden dieses Ausdruckes für alle α ist gleichbedeutend mit

$$A = D = F = C = 0, \quad E + B = 0,$$

was unsere Behauptung war.

Dies Ergebnis scheint für das Anfangswertproblem deswegen bemerkenswert, weil wir für das Randwertproblem elliptischer Monge-Ampèrescher Differentialgleichungen in Kap. IV, § 5, 3 die Möglichkeit einer Zweideutigkeit erkannt hatten.

Sechstes Kapitel.

Hyperbolische Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen.

Auch für hyperbolische Differentialgleichungen bei n Veränderlichen mit $n > 2$ wird sich als entscheidend für das tiefere Verständnis der Charakteristikenbegriff erweisen, obwohl für $n > 2$ eine allgemeine Integrationstheorie mit seiner Hilfe nicht mehr entwickelt werden kann. Im vorliegenden Kapitel werden wir zunächst die Charakteristikentheorie behandeln; dabei werden unsere Überlegungen weitgehend denen des Kap. V parallel laufen. Ähnlich wie bei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung tritt jedoch als neues Moment auf, daß wir zwischen charakteristischen $n-1$ dimensionalen Mannigfaltigkeiten und charakteristischen Kurven, auch Bicharakteristiken oder Strahlen genannt, unterscheiden müssen[1]. Im zweiten Teil des Kapitels werden wir dann näher auf die Integration von Differentialgleichungsproblemen, insbesondere linearen Problemen mit konstanten Koeffizienten eingehen.

§ 1. Die charakteristische Gleichung.

Schon im Kapitel III, § 3 haben wir die Typeneinteilung von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen auf Grund einer „charakteristischen Relation" vorgenommen. Im Anschluß an das Anfangswertproblem werden wir nunmehr jene Überlegungen unabhängig unter einem anderen Gesichtspunkt aufnehmen und vertiefen. Wir gehen dabei wiederum von der Frage aus, was eine gegebene Differentialgleichung oder ein Differentialgleichungssystem für die gesuchte Funktion längs einer Anfangsmannigfaltigkeit aussagt, insbesondere ob und wann durch die Anfangsdaten längs einer solchen Anfangsmannigfaltigkeit auch die höheren Ableitungen eindeutig mit bestimmt sind.

1. Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wir betrachten zunächst als wichtigsten Fall den einer *quasilinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

(1) $$L[u] + D = \sum a_{ik} u_{ik} + D = 0,$$

wobei die Koeffizienten $a_{ik} = a_{ki}$ und die Größe D gegebene Funktionen

[1] Man vergleiche zur Theorie der Charakteristiken und der Wellen noch HADAMARD: Propagation des ondes. Paris 1903. LEVI CIVITA: Caratteristiche dei Sistemi Differenziali e Propagazione ondosa. Bologna 1931. Siehe auch THOMAS and TITT: Ann. of Math. Bd. 34 (1933) S. 1—80.

der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ und der Größe u, sowie der Ableitungen $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ sind. Hierbei ist zur Abkürzung

$$u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$$

gesetzt. Stets wollen wir in diesem Kapitel mit Indices an Buchstaben, welche nicht fixierte Funktionen ausdrücken, partielle Ableitungen bezeichnen wie $u_i, \varphi_i, \psi_i, \omega_i$; $u_{ik}, \varphi_{ik}, \psi_{ik}, \omega_{ik}$, während Indices an Buchstaben, welche Koeffizienten bezeichnen, wie $a, b, c, x, \beta, \gamma$, Indices im gewöhnlichen Sinne bedeuten sollen. Ferner sei an unsere grundsätzliche Verabredung erinnert, daß alle vorkommenden Größen in dem betrachteten Bereiche als stetig vorausgesetzt werden, sofern nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist.

Für die Differentialgleichung (1) betrachten wir das Anfangswertproblem: Im $x_1, \ldots, x_n$-Raume R_n sei durch die Gleichung $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine *Grundmannigfaltigkeit* C_0 gegeben, welche wir uns durch Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ in der Weise dargestellt denken, daß die Funktionen

$$\lambda_1 = \lambda_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \lambda_{n-1} = \lambda_{n-1}(x_1, \ldots, x_n), \lambda_n = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

eine umkehrbar eindeutige Transformation einer Umgebung von M auf einen Bereich im $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$-Raum darstellen. Längs C_0 seien Anfangswerte von u als Funktionen der Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ vorgeschrieben, wodurch im x, u-Raum R_{n+1} eine *Anfangsmannigfaltigkeit* $C: x_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \ldots, x_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), u(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ entsteht. Diese Anfangsmannigfaltigkeit sei zu einer *Streifenmannigfaltigkeit oder kurz Streifen erster Ordnung* C_1 ergänzt durch Hinzufügung von n weiteren Größen p_i als Funktionen der Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, welche den Streifenrelationen

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda_\nu} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_\nu}, \quad (\nu = 1, \ldots n-1) \qquad \text{oder kurz} \qquad du = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i$$

genügen. Wir sagen, daß eine Funktion $u(x_1, \ldots, x_n)$ die Streifenmannigfaltigkeit erster Ordnung C_1 enthält, wenn längs $\varphi = 0$ die Funktion u und die Ableitungen u_i in die obigen, den Streifen definierenden Größen übergehen.

Entsprechend können wir eine *Streifenmannigfaltigkeit zweiter Ordnung* C_2 definieren, indem wir längs C_0 auch Werte p_{ik} vorgeben, welche den Streifenbedingungen

$$dp_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \, dx_k$$

genügen.

Wir gehen nun von der Frage aus: Was besagt unsere Differentialgleichung (1) längs eines gegebenen Anfangsstreifens C_1 für eine Lösung u, die ihn enthält? Lassen sich dann vermöge der Differentialgleichung

längs dieses Streifens die zweiten und gegebenenfalls höheren Ableitungen eindeutig berechnen? Da die ganze Fragestellung sich nur auf die unmittelbare Umgebung der Anfangsstreifenmannigfaltigkeit bezieht, so ist es zur Klärung der Begriffe zweckmäßig, die Frage noch folgendermaßen zu präzisieren: Wir nennen einen Streifen zweiter Ordnung C_2, welcher mit $u_i = p_i$, $u_{ik} = p_{ik}$ der Differentialgleichung (1) genügt, einen *Integralstreifen* und fragen, ob sich ein gegebener Anfangsstreifen erster Ordnung in eindeutiger Weise zu einem Integralstreifen zweiter Ordnung ergänzen läßt.

Zur Beantwortung denken wir uns in der Differentialgleichung (1) an Stelle von $x_1, \ldots, x_n$ als neue Veränderliche $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = \varphi$ eingeführt. Die Differentialgleichung nimmt dann folgende Gestalt an

$$\sum_{i,k=1}^{n} u_{\lambda_i \lambda_k} Q(\lambda_i, \lambda_k) + \sum_{i=1}^{n} u_{\lambda_i} L[\lambda_i] + D = 0 \,, \tag{2}$$

oder

$$u_{\varphi\varphi} Q(\varphi, \varphi) + \cdots = 0 . \tag{3}$$

Hierin bedeutet

$$Q(\lambda_i, \lambda_k) = \sum_{l,s=1}^{n} a_{ls} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_l} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_s} \tag{4}$$

die quadratische Form mit der Matrix (a_{ik}), und die Punkte in der zweiten Gleichung deuten Ausdrücke an, welche durch die Streifengrößen erster Ordnung längs C_1 gegeben sind, d. h. Größen, welche nur die Streifengrößen erster Ordnung und deren innere Ableitungen, d. h. Ableitungen nach $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, enthalten. Da längs des Streifens alle diejenigen zweiten Ableitungen von u bekannt sind, welche durch innere Differentiation, d. h. Differentiation nach den ersten $n-1$ Parametern λ_ν entstehen, so ist die zweite herausführende Ableitung $u_{\varphi\varphi} = u_{\lambda_n \lambda_n}$ die einzige zweite Ableitung, welche innerhalb C_1 nicht auf Grund der Vorgaben bekannt ist. Die Berechnung dieser zweiten herausführenden Ableitung und damit aller zweiten Ableitungen ist somit in jedem Punkte P auf C_1 auf eine und nur eine Weise möglich, solange dort $Q(\varphi, \varphi)$ nicht verschwindet. Wir erhalten also unmittelbar folgende *Alternative für jeden Punkt P des Streifens* C_1, der zu einem Integralstreifen C_2 ergänzt werden soll: Entweder es ist die zweite herausführende Ableitung $u_{\varphi\varphi}$ und damit alle zweiten Ableitungen aus der Vorgabe des Streifens erster Ordnung eindeutig bestimmt, oder die Differentialgleichung bedeutet eine weitere Einschränkung für die Streifengrößen, welche den Streifen erster Ordnung C_1 definieren.

Wir wollen im folgenden annehmen, daß für den *ganzen* Streifen C_1 entweder nur der eine oder nur der andere Fall der Alternative eintritt. Im ersten Fall nennen wir den Anfangsstreifen einen *allgemeinen Streifen*, im zweiten Fall einen Ausnahmestreifen. Ein Ausnahmestreifen C_1 ist

charakterisiert dadurch, daß längs ihm die *Charakteristikenbedingung*

$$Q(\varphi, \varphi) = \sum_{i,k=1} a_{ik} \varphi_i \varphi_k = 0 \tag{5}$$

besteht. Wenn dieser Streifen sich zu einem Integralstreifen ergänzen läßt, heißt er ein *charakteristischer Streifen erster Ordnung.*

Es sei betont, daß die Charakteristikenbedingung (5) zwar die Form einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für φ hat, jedoch ihrer Definition nach zunächst noch keine solche Differentialgleichung ist. Sie braucht nämlich nur auf C_1 erfüllt zu sein, also nicht identisch in den n Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Jedoch geht sie in eine partielle Differentialgleichung für eine Funktion von $n-1$ Variablen über, wenn wir z. B. als unabhängige Parameter die Größen $\lambda_1 = x_1, \ldots, \lambda_{n-1} = x_{n-1}$ eingeführt denken und C_0 in der Form

$$x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

gegeben annehmen. Die Charakteristikenbedingung geht dann über in eine partielle Differentialgleichung für $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ nämlich

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} \psi_i \psi_k - 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} \psi_i + a_{nn} = 0, \tag{5'}$$

wobei natürlich in den Koeffizienten überall für u und $u_i = p_i$ entsprechende Ausdrücke in $x_1, \ldots, x_{n-1}$ einzusetzen sind.

Wenn wir nicht von vornherein von einem Streifen C_1 ausgehen, sondern von einer gegebenen „Integralfläche" $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ der Differentialgleichung (1), so sind längs einer solchen Integralfläche überall die Größen u und die Ableitungen $u_i = p_i$ als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ bekannt. Die Charakteristikenbedingung (5), wobei nunmehr in a_{ik} die entsprechenden Einsetzungen für die Integralfläche zu machen sind, definiert dann *charakteristische Mannigfaltigkeiten auf der gegebenen Integralfläche*; nämlich jede Funktion φ, für welche die Gleichung (5) auf $\varphi = 0$ erfüllt ist, ergibt eine charakteristische Mannigfaltigkeit. *Ist die Gleichung* (5) *nicht nur für* $\varphi = 0$, *sondern identisch in* $x_1, \ldots, x_n$ *erfüllt, so liefert nicht nur* $\varphi = 0$, *sondern die ganze Funktionenschar* $\varphi = c =$ *konst. eine vom Parameter c abhängige, einparametrige Schar von charakteristischen Mannigfaltigkeiten, welche ihrerseits die Integralfläche erzeugen.* Umgekehrt: *Ist* $\varphi = c$ *eine solche Schar, so genügt* φ *der Charakteristikenbedingung* (5) *als partieller Differentialgleichung erster Ordnung.*

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß für eine charakteristische Mannigfaltigkeit der Differentialausdruck $L[u]$ *ein innerer Differentialausdruck im Streifen* C_1 wird. Die Differentialgleichung (2) selbst läßt sich dann längs C_1 auffassen als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die aus C_1 herausführende erste Ableitung $u_\varphi = \sigma$, wobei sonst nur noch Größen auftreten, welche lediglich Differentiationen von u innerhalb C_1 enthalten.

Wie schon in Kapitel III hervorgehoben wurde, ist unsere Betrachtung nur dann sinnvoll, d. h. es können charakteristische Mannigfaltigkeiten nur dann existieren, wenn die Charakteristikenbedingung (5) durch reelle Funktionen φ befriedigt werden kann. Notwendige Voraussetzung für unsere Betrachtung ist also der *indefinite Charakter der quadratischen Form* $Q(\varphi, \varphi)$. Wenn Q definit ist, nannten wir die Differentialgleichung *elliptisch*. Wir schließen diesen Fall hier aus, ebenso wie wir auch den Fall der parabolischen Ausartung hier nicht betrachten wollen, d. h. den Fall, wo die quadratische Form Q von n Variablen sich auf eine solche von weniger als n Variablen durch eine lineare Transformation reduzieren läßt. Vielmehr machen wir die Voraussetzung, daß unsere quadratische Form Q *indefinit* ist und überall längs der betrachteten Streifen den *Trägheitsindex* 1 hat, d. h. daß sie sich an jeder Stelle durch eine lineare Transformation bis aufs Vorzeichen in die Form

$$X_1^2 + \cdots + X_{n-1}^2 - X_n^2$$

bringen läßt. Die Differentialgleichung heißt dann *eigentlich hyperbolisch* oder schlechthin *hyperbolisch*. Ihr Prototyp ist, wie wir sahen, die Wellengleichung $u_{11} + \cdots + u_{n-1,\,n-1} - u_{n,n} = 0$ mit der Charakteristikenbedingung

$$\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_{n-1}^2 - \varphi_n^2 = 0.$$

Natürlich sind auch andere Trägheitsindices der quadratischen Form Q möglich. Wir nennen diesen Fall den *ultrahyperbolischen* und werden auf ihn später in diesem Kapitel § 7 noch zurückkommen. Ein typisches Beispiel ist

$$u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44} = 0$$

mit der Charakteristikenbedingung

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2 - \varphi_4^2 = 0.$$

2. Lineare Differentialgleichungen. Charakteristische Strahlen. Die in Nr. 1 geschilderten Verhältnisse werden übersichtlicher und lassen sich einfacher explizite beschreiben im Fall von linearen Differentialgleichungen

$$L[u] + d = 0. \tag{6}$$

Dabei sei

$$L[u] = L'[u] + c\,u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + c\,u,$$

wobei die Koeffizienten a_{ik}, b_i, c, d gegebene Funktionen der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ sind. Die Charakteristikenbedingung (5) oder (5′) hängt dann nur von der Grundmannigfaltigkeit C_0 des Streifens C_1 ab und ist daher auch unabhängig davon, welche Integralfläche oder welche Integralstreifen wir auf ihr betrachten. Im linearen Falle nennt man daher schon die Grundmannig-

faltigkeit C_0 eine charakteristische Mannigfaltigkeit: Eine Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$ des x-Raumes, längs welcher die Relation

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0 \tag{5}$$

erfüllt ist, heißt *charakteristische Mannigfaltigkeit der linearen Differentialgleichung.*

Der hyperbolische Charakter ist also im linearen Falle eine Eigenschaft der Differentialgleichung selbst und nicht mehr eine Eigenschaft, welche einer Differentialgleichung für einen gegebenen Streifen zukommt.

Das Verhältnis der Charakteristikenbedingung (5) und der Charakteristikenbedingung

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\psi_i\psi_k - 2\sum_{i=1}^{m} a_{i,n}\psi_i + a_{nn} = 0 \qquad (m = n-1) \tag{5'}$$

zueinander wird durch folgende Überlegung klar gestellt. Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung der Gleichung (5) aufgefaßt als partielle Differentialgleichung, so ergibt sich, wenn die Gleichung $\varphi = 0$ durch die Relation

$$x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m) \qquad (m = n-1)$$

aufgelöst wird, eine Lösung $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ der Differentialgleichung (5′) und durch Auflösung der Gleichung $\varphi = c$ mit einem Parameter c eine einparametrige Lösungsschar $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m; c)$ der Gleichung (5′). Ist umgekehrt

$$x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m; c)$$

eine einparametrige Schar von Lösungen der partiellen Differentialgleichung (5′) und wird diese Gleichung in der Form

$$c = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

aufgelöst, so ist φ wie man leicht bestätigt, eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (5).

Ist nun $\varphi = 0$ eine beliebige charakteristische Mannigfaltigkeit, d. h. befriedigt φ die Gleichung (5) für $\varphi = 0$, so ergibt die entsprechende Funktion $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m)$, wie wir sahen, eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (5′). Da wir jede Lösung einer solchen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in eine einparametrige Schar von Lösungen $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_m; c)$ einbetten können[1], so ergibt sich durch Auflösung nach c wiederum eine zugehörige Lösung der partiellen Differentialgleichung (5). Wir erkennen also: *Jede charakteristische Mannigfaltigkeit läßt sich in eine einparametrige Schar von charakteristischen Mannigfaltigkeiten $\varphi = c$ einbetten.* Die obige Bemerkung ist nützlich, indem sie uns dazu berechtigt, ohne Beschränkung der Allgemeinheit charakteristische Mannigfaltigkeiten $\varphi = 0$ als Individuen einer Schar $\varphi = c$ von

[1] Wir können z. B. die Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung nach Kap. II durch Vorgabe von Anfangswerten bestimmen, die ihrerseits von einem Parameter c abhängen.

charakteristischen Mannigfaltigkeiten aufzufassen, φ *also als eine Lösung der Gleichung* (5), *aufgefaßt als partielle Differentialgleichung, zu betrachten.*

Als Beispiel einer solchen Einbettung betrachten wir im Fall $n=3$ die Differentialgleichung $u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=0$ und den charakteristischen Kegel $\chi=t^2-x^2-y^2=0$. Diese Funktion χ genügt der Differentialgleichung

$$\chi_t^2-\chi_x^2-\chi_y^2=4\chi,$$

welche den Kegel $\chi=0$ als charakteristisch kennzeichnet, jedoch zeigt, daß die Flächen $\chi=c$ für $c\neq 0$ nicht charakteristisch sind. Betten wir jedoch unseren Kegel ein in die Schar der Kegel

$$\varphi=t-\sqrt{x^2+y^2}=c,$$

so wird nunmehr

$$\varphi_t^2-\varphi_x^2-\varphi_y^2=0$$

und dies entspricht der Tatsache, daß die ganze Schar aus charakteristischen Mannigfaltigkeiten besteht.

Für das Folgende sind einige einfache *Invarianzaussagen* von Bedeutung. Es möge durch eine Transformation

$$\xi_\nu=\xi_\nu(x_1,\ldots,x_n)$$

$u(x)$ übergehen in $\omega(\xi)$ und es möge

$$L[u]=L'[u]+cu=\sum\alpha_{\mu\nu}\,\omega_{\mu\nu}+\sum\beta_\mu\omega_\mu+c\omega=\Lambda'[\omega]=\Lambda'[\omega]+c\omega$$

sein. Dann besteht nicht nur die durch $L[u]=\Lambda[\omega]$ ausgedrückte Relation, sondern es ist auch

$$L'[u]=\Lambda'[\omega].$$

Ferner: *Die Charakteristiken sind invariant gegenüber beliebigen Transformationen der unabhängigen Veränderlichen.*

Diese Tatsache folgt aus der begrifflichen Bedeutung der Charakteristikenbedingung unmittelbar. Rechnerisch ist sie unabhängig davon folgendermaßen einzusehen: Bei unserer Transformation setzen wir

$$\tau_{ji}=\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}$$

und es möge die Transformation des Differentialausdrucks durch

$$L[u]=\sum a_{ik}u_{ik}+\cdots=\sum\alpha_{ik}\,\omega_{ik}+\cdots$$

gegeben sein, wobei $\omega(\xi_1,\ldots,\xi_n)=u(x_1,\ldots,x_n)$ und

$$\alpha_{ik}=\sum_{j,l=1}^{n}a_{jl}\tau_{ij}\tau_{kl}$$

ist. Dann erkennt man, falls $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ ist, unmittelbar die Identität

$$\sum_{i,k}a_{ik}\,\varphi_i\varphi_k=\sum_{i,k}\alpha_{ik}\,\psi_i\psi_k,$$

welche unsere Behauptung enthält.

Es ist gelegentlich nützlich, von dieser Invarianz Gebrauch zu machen, indem man die charakteristische Mannigfaltigkeit in die Koordinatenebene $x_n = 0$ transformiert. Dann ergibt sich das folgende Resultat:

Notwendig und hinreichend dafür, daß $x_n = 0$ charakteristische Mannigfaltigkeit wird, ist das Bestehen der Relation

$$a_{nn}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0. \tag{7}$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß $x_n =$ konst. eine Schar charakteristischer Mannigfaltigkeiten darstellt, ist das identische Verschwinden des Koeffizienten $a_{nn}(x_1, \ldots, x_n)$.

Wir wollen nunmehr die charakteristischen Mannigfaltigkeiten durch Einführung des Begriffs der *charakteristischen Kurven oder Strahlen* näher analysieren. Hierzu betrachten wir im n-dimensionalen Raum R_n der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ irgendeine Fläche C_0 gegeben durch $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ oder allgemeiner $\varphi = c =$ konst. In jedem Punkt dieser Fläche definieren wir einen Richtungsvektor, dessen Komponenten proportional zu den Größen

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\varphi_k \tag{8}$$

sind. Mit anderen Worten wir ordnen jedem Flächenelement von C_0 gegeben durch die Koeffizienten φ_k der Tangentialebene[1] ein Linienelement $\dot{x}_i = \frac{d x_i}{d s}$ zu, wobei wir uns etwa Kurven $x_i(s)$ als Funktionen eines Parameters s vorstellen, aber nur die Ableitungen in dem betrachteten Punkt auf C_0 betrachten. Diese Richtung heißt *Transversalrichtung* (vgl. Kap. II, Anh. § 1) zu C_0. Die Differentiation

$$\frac{\partial}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,k} a_{ik}\varphi_k \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{9}$$

heißt die zu C_0 *transversale Differentiation*. Die Tangentialebene an C_0 und die Transversalrichtung sind *zueinander konjugiert in bezug auf die Fläche zweiter Klasse*

$$\sum_{i,k} a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k = 0,$$

bei welcher die Größen $\xi_i = \varphi_i$ Ebenenkoordinaten bedeuten.

Es gilt nun der Satz: *Die Fläche M ist dann und nur dann charakteristisch, wenn in ihr überall die Transversalrichtung tangential zur Fläche ist, die Transversaldifferentiation also eine innere Differentiation bedeutet.* In der Tat schreibt sich die Charakteristikenbedingung unmittelbar in der Form

$$\sum \dot{x}_i \varphi_i = 0.$$

---

[1] Die Richtungskosinus der Normalen auf der Tangentialebene sind die Größen

$$\frac{\partial x_i}{\partial \nu} = \frac{\varphi_i}{\sqrt{\sum \varphi_i^2}}.$$

Die transversale Differentiation ist invariant gegenüber beliebigen Transformationen der unabhängigen Veränderlichen. Denn für beliebige Funktionen ψ ist nach den obigen Bemerkungen die zur quadratischen Form Q gehörige Bilinearform

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = \sum a_{ik} \varphi_k \psi_i$$

invariant.

Allgemein können wir die Gleichungen (8) bei gegebenem φ als ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen auffassen und nennen deren Lösungen die *Transversalkurven zur Flächenschar $\varphi =$ konst.* Wenn diese Flächenschar $\varphi =$ konst. eine Schar von charakteristischen Flächen ist, d. h. wenn φ der Gleichung (5) als partieller Differentialgleichung genügt, so ist die Funktion φ ein Integral des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (8), d. h. längs jeder Integralkurve dieses Systems gilt $\varphi =$ konst. *Mithin werden die charakteristischen Mannigfaltigkeiten $\varphi = c$ in diesem Fall von den Integralkurven von (8) erzeugt. Jede einzelne dieser Mannigfaltigkeiten ist dabei das Erzeugnis einer $n - 2$-parametrigen Schar von solchen Kurven.*

Beweis: Längs einer Integralkurve des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (8) wird φ eine Funktion von s und wir haben

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \sum a_{ik} \varphi_k \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi = \sum a_{ik} \varphi_i \varphi_k = 0.$$

Die Integralkurven des Differentialgleichungssystems (8), unter der Bedingung, daß $\varphi =$ konst. eine Schar charakteristischer Mannigfaltigkeiten ist, heißen *charakteristische Strahlen zur gegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung* (1). Sie sind nichts anderes als die Charakteristiken der partiellen linearen Differentialgleichung erster Ordnung (5) im Sinne von Kapitel II und werden daher auch gelegentlich *Bicharakteristiken* genannt, weil die Differentialgleichung (5) die charakteristische Differentialgleichung zu (1) ist.

Unsere Aussagen über die Erzeugung charakteristischer Mannigfaltigkeiten durch Strahlenkurven waren zunächst unter der Voraussetzung gemacht, daß $\varphi = c =$ konst. eine Schar von solchen charakteristischen Mannigfaltigkeiten ist. Da aber nach der obigen Bemerkung jede charakteristische Mannigfaltigkeit in eine solche Schar eingebettet werden kann, so bleibt diese Aussage bestehen, wenn wir nur eine einzelne charakteristische Mannigfaltigkeit betrachten.

Man kann daher die charakteristischen Strahlen auch ohne Bezugnahme auf charakteristische Mannigfaltigkeiten $\varphi = c$ folgendermaßen definieren:

Die charakteristischen Strahlen zur Differentialgleichung zweiter Ordnung (1) *sind identisch mit den charakteristischen Kurven der charakteristischen Differentialgleichung erster Ordnung* (5). *Die Gesamtheit der*

Strahlen kann also gemäß Kapitel II, § 7 von vornherein durch Integration des gewöhnlichen Differentialgleichungssystemes

$$\dot{x}_i = \sum_k a_{ik} p_k \qquad \dot{p}_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum a_{ik} p_i p_k\right)$$

gewonnen werden, welches gleichzeitig noch die Streifengrößen p_i liefert.

Sind die Koeffizienten a_{ik} der partiellen Differentialgleichung (1) *konstant, so sind die sämtlichen charakteristischen Strahlen gerade Linien.*

Denn (5) besitzt Scharen linearer Funktionen als vollständige Integrale φ, und die Differentialgleichungen $\dot{x}_i = \sum\limits_k a_{ik} \varphi_k$ liefern dann unmittelbar gerade Linien.

Die Gesamtheit der zu der linearen partiellen Differentialgleichung (1) gehörigen Strahlen hängt also nur von einer endlichen Anzahl von Parametern ab, nämlich $2n-1$.

Nebenbei sei bemerkt: Die Bedingung für die charakteristischen Mannigfaltigkeiten, welche im Sinn von Kapitel II, § 7 zur charakteristischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (5) gehören, ist mit dieser Differentialgleichung identisch.

Das einfachste Beispiel für diesen Zusammenhang liefert wieder die Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{x_1 x_1} - \cdots - u_{x_m x_m} = 0\,,$$

wobei wir $x_{m+1} = t$ gesetzt haben. Die charakteristische Relation lautete $\varphi_t^2 - \varphi_{x_1}^2 - \cdots - \varphi_{x_m}^2 = 0$, und die Strahlen werden gebildet von der Gesamtheit der Geraden des x, t-Raumes der Form $x_i = a_i + \alpha_i t$, wobei $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 = 1$ ist. Deuten wir statt in einem n-dimensionalen x, t-Raum unsere Lösungen in einem m-dimensionalen x-Raum, wobei alle Größen und Flächen usw. noch von dem Zeitparameter t abhängen, so sind dort die Bicharakteristiken einfach beliebige gerade Linien, welche mit der Geschwindigkeit 1 durchlaufen werden. Die charakteristischen Mannigfaltigkeiten genügen, wenn sie durch eine Gleichung $t = \psi(x_1, \ldots, x_m)$ gegeben werden, der partiellen Differentialgleichung $\sum \psi_i^2 = 1$. Die charakteristische Mannigfaltigkeit wird dargestellt durch eine Flächenschar $\psi = t$ im x-Raum, welche aus parallelen Flächen besteht, und zwar von einer Ausgangsfläche aus durch Parallelverschiebung längs der Normalen mit der Geschwindigkeit 1 entsteht. Die Strahlen sind im x-Raum die zugehörigen orthogonalen Trajektorien.

Vermöge des charakteristischen (Mongeschen) Kegels zu einer hyperbolischen Differentialgleichung $L[u] = 0$ im x-Raume erhält man eine für $n > 2$ wichtige Einteilung der nichtcharakteristischen Flächenelemente bzw. nichtcharakteristischen Richtungen in zwei Klassen. Wir nennen ein nichtcharakteristisches *Flächenelement* durch einen Punkt *raumartig*,

wenn es keine charakteristische Richtung enthält, d. h. wenn seine Ebene den Kegel nicht schneidet. Eine *Richtung* heißt *zeitartig*, wenn sie transversal zu einem raumartigen Flächenelement ist.

Wir nehmen an, daß die hyperbolische Differentialgleichung — nötigenfalls nach Multiplikation mit -1 — bei der Transformation auf die kanonische Gestalt an der betreffenden Stelle die Vorzeichenverteilung $+ - - \cdots$ ergibt. Dann ist eine Fläche $\varphi = 0$ an einer Stelle raumartig, wenn dort

$$a_{ik}\varphi_i\varphi_k > 0$$

gilt. Entsprechend wird ein Linienelement dx_i zeitartig, wenn mit der zu a_{ik} konjugierten Matrix A_{ik} gilt

$$A_{ik}\,dx_i\,dx_k > 0 .$$

Man erkennt: *Jedes Flächenelement durch ein zeitartiges Linienelement ist raumartig.*

§ 2. Charakteristische Mannigfaltigkeiten als Unstetigkeitsflächen von Lösungen. — Wellenfronten.

1. Unstetigkeiten zweiter Ordnung. Die große Bedeutung der charakteristischen Mannigfaltigkeiten in den physikalischen Anwendungen beruht darauf, daß nur längs solcher Mannigfaltigkeiten gewisse *Unstetigkeiten von Lösungen partieller Differentialgleichungen* auftreten können. Um von diesem Gesichtspunkt aus noch einmal den Begriff der Charakteristiken zu beleuchten, fragen wir: Welche Bedingung muß eine Fläche $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ erfüllen, damit eine Lösung u der Differentialgleichung $L[u] = 0$ existiert, mit folgenden Eigenschaften: u und die ersten Ableitungen u_i, sowie alle inneren Ableitungen der Größen u_i in der Fläche bleiben beim Durchgang durch die Fläche stetig; jedoch die aus $\varphi = 0$ hinausführenden Ableitungen der Größen u_i, insbesondere die Ableitung $u_{\varphi\varphi}$, erleiden beim Durchgang durch die Fläche eine sprunghafte Unstetigkeit.

Es ist nach § 1 klar, daß diese Fläche $M: \varphi = 0$ eine charakteristische Mannigfaltigkeit sein muß. Denn sonst würden längs M die zweiten Ableitungen und auch alle höheren Ableitungen eindeutig bestimmt sein, während unsere Forderung besagt, daß verschiedene Werte der zweiten Ableitungen — nämlich die Grenzwerte der zweiten Ableitungen von der einen bzw. anderen Seite der Fläche M her — den gegebenen Anfangsstreifen zu einem Integralstreifen ergänzen können.

Wir wollen jedoch die Charakteristikenbedingung nochmals unabhängig von früheren Betrachtungen aus unserer Unstetigkeitsforderung herleiten. Hierzu bezeichnen wir ähnlich wie in Kapitel V, § 1, 3 mit (f) den Sprung, welchen eine längs M sprunghaft unstetige Funktion f beim Durchgang durch M von der einen, etwa „negativen" zur anderen „positiven" Seite erleidet. Nach Voraussetzung ist der Ausdruck

$$u_{ik}\varphi_l - u_{il}\varphi_k$$

eine innere Ableitung von u_i in M (vgl. Kap. II, Anh. § 1) und daher beim Durchgang durch M stetig. Dasselbe gilt für

$$u_{ij}\varphi_l - u_{jl}\varphi_i.$$

Daher wird auch die lineare Kombination $u_{ik}\varphi_j\varphi_l - u_{jl}\varphi_i\varphi_k$ dieser beiden stetigen Ausdrücke stetig durch M gehen, und wir erhalten daher für die Sprunggrößen die Beziehung:

$$(u_{ik})\varphi_j\varphi_l = (u_{jl})\varphi_i\varphi_k$$

und daher[1]

$$(u_{ik}) = \lambda\varphi_i\varphi_k,$$

wobei λ ein Proportionalitätsfaktor ist, welcher von dem betreffenden Punkt auf M abhängig ist und nicht verschwinden kann, wenn dort irgendeine der zweiten Ableitungen von u tatsächlich unstetig werden soll. Beiläufig, dieser Faktor ist, wie man leicht sieht, gegeben durch

$$\lambda = (u_{\varphi\varphi}).$$

Nunmehr schreiben wir die Differentialgleichung $L[u] = 0$ für einen Punkt P_- auf der negativen Seite von M und einen Punkt P_+ auf der positiven Seite von M, subtrahieren die beiden Ausdrücke und lassen dann P_+ und P_- in denselben Punkt P auf M streben. Es fallen dann alle beim Durchgang durch M stetig bleibenden Ausdrücke fort und wir erhalten längs M

$$\sum a_{ik}(u_{ik}) = 0$$

und somit mit Rücksicht auf das obige Resultat wegen $\lambda \neq 0$ unsere alte Charakteristikenbedingung

$$\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0$$

als Bedingung für eine Unstetigkeitsfläche der betrachteten Art.

Wir bemerken: Dasselbe Resultat gilt, wenn man die Forderung stellt, daß Unstetigkeiten in irgendwelchen höheren als zweiten Ableitungen auftreten. Wir haben dann die Differentialgleichung nur entsprechend oft zu differenzieren und dieselbe Betrachtung auf die differenzierte Gleichung anzuwenden, wobei wir natürlich voraussetzen müssen, daß die dabei auftretenden Koeffizienten noch stetig bleiben.

Die physikalische Bedeutung unserer Auffassung ergibt sich wiederum, indem wir $n = m + 1$, $x_n = t$ und $\varphi = t - \psi(x_1, \ldots, x_m)$ setzen, wobei wir dann t als die Zeit und unsere Funktion u als vom Zeitparameter abhängige Funktion im m-dimensionalen x-Raum R_m deuten. Wir haben es dann mit einer Lösung $u(x_1, \ldots, x_m, t)$ der Differentialgleichung $L[u] = 0$ zu tun, zu welcher *eine mit der Zeit fortschreitende Wellenfront* gehört, d. h. eine Unstetigkeitsfläche

$$t = \psi(x_1, \ldots, x_m),$$

[1] Wir nehmen an, daß auf $\varphi = 0$ nicht alle Ableitungen von φ zugleich verschwinden.

welche von dem Parameter t abhängig ist und mit der Zeit durch den Raum R_m wandert. Solche Wellenfronten werden immer dann auftreten, wenn ein Ausbreitungsvorgang in R_m, dargestellt durch die Differentialgleichung $L[u]=0$, zur Zeit t eine gewisse Grenzlage erreicht, jenseits deren Ruhe herrscht, d. h. wenn die fragliche, den Zustand charakterisierende Lösung u der Differentialgleichung an der einen Seite dieser Grenzfläche identisch verschwindet, auf der anderen nicht. Diese Ausbreitungsgrenze muß dann eine solche Wellenfront sein.

Hier sei als besonders wichtig der folgende häufig auftretende Typus von Differentialgleichungen hervorgehoben:

$$u_{tt}-\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}u_{ik}=f(x_1,\ldots,x_m,t), \tag{1}$$

wobei die Koeffizienten $a_{ik}=a_{ki}$ nur von den Raumvariablen x_ν abhängen. Die charakteristische Gleichung für unsere Funktion ψ lautet dann

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\psi_i\psi_k=1 \tag{2}$$

und ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. $\psi=t$ bedeutet die sich bewegende Wellenfront. Längs der Strahlen ist $\frac{dt}{ds}=1$, der früher eingeführte Parameter s ist also mit der Zeit t identisch, und die Gleichungen für die Strahlen lauten

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\psi_k. \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{3}$$

Diese Strahlen werden nunmehr im Raum R_m die Wellenfronten $\psi=t$ durchsetzen. Es ist

$$\sum_{i=1}^{m}\psi_i\dot{x}_i=\sum_{i,k} a_{ik}\psi_i\psi_k=1.$$

(Erst im n-dimensionalen x, t-Raum werden charakteristische Mannigfaltigkeiten und Strahlen inzident.)

Der Vektor mit den Komponenten $\dot{x}_i$ in R_m heißt der *zur Wellenfront $\psi=t$ transversale Strahlenvektor.*

Indem wir die Voraussetzung machen, daß die m-reihige Matrix (a_{ik}) positiv definit ist, sichern wir den hyperbolischen Charakter der Differentialgleichung (1).

Strahlenrichtung und Tangentialebene der Wellenfront sind dann konjugiert in bezug auf die Ellipsoidfläche

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k=1.$$

Neben dem Vektor mit den Komponenten $\dot{x}_i=v_i$, den wir auch den *Vektor der Strahlengeschwindigkeit* nennen, hat man den *Vektor der*

Normalengeschwindigkeit oder Wellengeschwindigkeit der fortschreitenden Wellenfront zu betrachten. Seine Komponenten w_i sind proportional zu den Ableitungen φ_i und sein Betrag muß reziprok zu $\operatorname{grad}\varphi$ sein. Die Komponenten des Vektors der Normalengeschwindigkeit sind also gegeben durch

$$w_i = \frac{\varphi_i}{\sqrt{\sum \varphi_\nu^2}} = \frac{\varphi_i}{\sqrt{(\operatorname{grad}\varphi)^2}},$$

und zwischen Normalen- und Strahlengeschwindigkeit bestehen die Relationen

$$v_i = \left(\sum_k a_{ik} w_k\right) \operatorname{grad}\varphi^2 . \tag{4}$$

Zu unserem Begriff der Wellenfronten muß grundsätzlich betont werden, daß eine solche Wellenfront nicht etwa selbst die Lösung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $L[u] = 0$ liefert, vielmehr nur eine mögliche Unstetigkeitsfläche für die Lösung u darstellt. Es sei ferner betont, daß wir aus den Ergebnissen des Kapitel II über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung folgende Aussagen über die Wellenfronten entnehmen können: *Wenn zwei verschiedene Wellenfronten $\psi = t$ und $\chi = t$ sich an einer Stelle zur Zeit $t = 0$ berühren, so haben sie für alle folgenden Zeiten einen gemeinsamen Berührungspunkt, und dieser Berührungspunkt bewegt sich auf einem beiden Wellenfronten gemeinsamen Strahl.* Diese Aussage ist in der Tat äquivalent zu dem Satz, daß zwei Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (hier der charakteristischen Gleichung), welche ein Flächenelement gemeinsam haben, eine ganze charakteristische Kurve mit Streifen gemeinsam haben.

2. Wellenfronten bei linearen Differentialgleichungen als Träger höherer Unstetigkeiten. Wir haben bei der Definition der Wellenfronten vorausgesetzt, daß die Funktion u und ihre erste Ableitung beim Durchgang durch M stetig bleiben, und daß Sprünge erst in den zweiten oder höheren Ableitungen auftreten sollen. In der Tat sind, wie wir im Fall $n = 2$ schon gesehen haben, durch die Zulässigkeit von Sprüngen in den ersten Ableitungen u_i einer Lösung von $L[u] = 0$ keinerlei Flächen $\varphi = 0$ ausgezeichnet, und dasselbe gilt erst recht für Unstetigkeit der Funktion u selbst. Nehmen wir an, daß für diese Fläche $\varphi = 0$ das Anfangswertproblem von $L[u] = 0$ für vorgegebene Anfangswerte u und u_i eine Lösung besitzt, so können wir einfach zwei Lösungen mit denselben Anfangswerten von u, aber verschiedenen Anfangswerten der aus M hinausführenden Ableitung u_φ betrachten, die einen auf der einen, die anderen auf der anderen Seite von M. Diese beiden Funktionen zusammen ergeben eine Lösung u mit unstetigen ersten Ableitungen längs M, und M kann dabei willkürlich nicht charakteristisch gewählt werden.

Vom physikalischen Standpunkt aus wird man jedoch erwarten, daß hinsichtlich von Unstetigkeiten in den Ableitungen erster Ordnung, ja sogar auch hinsichtlich von Unstetigkeiten der Funktion u selbst, die Charakteristiken immer noch eine ausgezeichnete Rolle spielen werden. Dies ist tatsächlich der Fall, wenn man in naturgemäßer Weise voraussetzt, daß die betrachteten unstetigen Lösungen Grenzfälle von Lösungen mit stetigem Verhalten sind[1].

In diesem Sinne gilt der Satz: *Unstetigkeiten der ersten Ableitungen einer Lösung von $L[u] = 0$ können nur längs charakteristische Mannigfaltigkeiten auftreten*, vorausgesetzt, daß diese unstetigen Lösungen als Grenzfälle von stetigen Lösungen folgendermaßen entstehen: u sei gleichmäßiger Limes einer Folge von Lösungen $v^1, v^2, \ldots$, welche sämtlich in einer Umgebung der Fläche $M : \varphi = 0$ stetig sind und gleichmäßig beschränkte Ableitungen v_i^ν besitzen. Die Ableitungen erster und zweiter Ordnung in jedem M ausschließenden abgeschlossenen Bereich sollen ferner gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von u konvergieren. Die Grenzfunktion u möge längs M sprunghaft unstetige (also beschränkte), aus M hinausführende Ableitungen besitzen, während die ersten und zweiten Tangentialableitungen stetig bleiben.

Zum Beweise denken wir uns durch eine Koordinatentransformation die Mannigfaltigkeit M in $x_n = 0$ transformiert. Wäre diese Mannigfaltigkeit nicht charakteristisch, d. h. wäre $a_{nn}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \neq 0$ in einem Punkt von M und daher auch in einer passend kleinen Umgebung dieses Punktes, so können wir nach Division durch a_{nn} die Differentialgleichung für $v = v^\nu$ in folgender Form schreiben:

$$v_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} c_{ni} v_{in} + d_n v_n + \sum_{i=1}^{n-1} d_i v_i + \sum_{i,k=1}^{n-1} c_{ik} v_{ik} + e v + f = 0.$$

Wir integrieren nunmehr diese Differentialgleichung zwischen den Grenzen $x_n = +\varepsilon$ und $x_n = -\varepsilon$ und erhalten dann

$$v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varepsilon) - v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\varepsilon) + \cdots = 0,$$

wobei mit den Punkten ein Ausdruck bezeichnet wird, welcher, wie man leicht sieht, absolut genommen kleiner ist als $A\varepsilon$, wobei A eine von ν unabhängige positive Schranke ist. Es wird bei festem ε also $v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varepsilon) - v_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\varepsilon)| < A\varepsilon$, und daher auch

$$|u_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varepsilon) - u_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, -\varepsilon)| \leqq A\varepsilon.$$

Nunmehr erkennen wir für $\varepsilon \to 0$: Die aus M hinausführende erste Ableitung u_n von u kann keinen Sprung haben entgegen unserer Voraussetzung. Somit muß auf M die Relation $a_{nn}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$ bestehen, d. h. M muß charakteristisch sein, wie behauptet wurde.

Es sei als Aufgabe gestellt, einen ähnlichen Satz für den Fall zu beweisen, daß u selbst beim Durchgang durch M unstetig wird[1].

---

[1] Vgl. auch Anhang, § 4.

Hier sei lediglich noch der Fall behandelt, daß die Fläche M eine Unstetigkeitsfläche für u ist, längs deren u unendlich wird in der Form

$$u = U\varphi^{\alpha}(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei α ein negativer Exponent ist und U zweimal stetig differenzierbar sein soll. Es gilt der Satz: *Die Fläche $\varphi = 0$ muß eine charakteristische Mannigfaltigkeit sein.*

Zum Beweise schreiben wir den Differentialausdruck $L[u]$ nach Einführung von $u = U\varphi^{\alpha}$ in der Form

$$\alpha(\alpha-1)U\varphi^{\alpha-2}(\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k) + \alpha\varphi^{\alpha-1}\{L'[\varphi]U + 2\sum a_{ik}\varphi_i U_k\} + \varphi^{\alpha}L[U].$$

Multiplizieren wir mit $\varphi^{2-\alpha}$ und lassen dann φ gegen 0 streben, so ergibt sich aus $L[u] = 0$, wie behauptet wurde, sofort für φ die Charakteristikenbedingung

$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0, \tag{5}$$

welche für $\varphi = 0$ bestehen muß.

Nehmen wir an, daß nicht nur $\varphi = 0$ sondern die ganze Funktionenschar $\varphi =$ konst. charakteristisch ist — wir können uns die Fläche $\varphi = 0$ in eine solche Schar eingebettet denken — so fällt in der Differentialgleichung der erste Term weg. Multiplizieren wir $L[u]$ dann mit $\varphi^{1-\alpha}$ und lassen wiederum φ gegen 0 streben, so entsteht die weitere Relation

$$L'[\varphi]U + 2\sum a_{ik}U_i\varphi_k = 0,$$

welche eine Bedingung für U auf der charakteristischen Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$ darstellt; und zwar können wir mit der Bezeichnung von § 1, 2 diese Bedingung sofort in die Form setzen

$$2\frac{\partial U}{\partial s} + AU = 0, \tag{6}$$

wobei

$$A = L'[\varphi] = \sum a_{ik}\varphi_{ik} + \sum b_i\varphi_i$$

ist. Diese Relation für U sagt aus:

Der Koeffizient U der Unstetigkeit längs eines charakteristischen Strahles (vgl. § 1, Nr. 2) *genügt einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung.*

Längs dieses Strahles können wir A als gegebene Funktion von s ansehen und haben dann, wenn $U = U_0$ für $s = 0$ wird, auf dem Strahl allgemein

$$U(s) = U_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^s A(\tau)\,d\tau}$$

Die Unstetigkeit U pflanzt sich also längs der charakteristischen Strahlen in einer von vornherein bekannten Weise so fort, daß sie nirgends verschwinden kann, wenn sie nicht identisch verschwindet.

Die Verhältnisse werden besonders übersichtlich, wenn wir wiederum $n = m + 1$, $x_n = t$, $\varphi = \psi - t$ setzen und annehmen, daß die Koeffizienten a_{ik} nur von $x_1, \ldots, x_m$ abhängen, daß $a_{in} = 0$ ist für $i \neq n$ und daß $a_{nn} = 1$ ist. Wir erhalten dann als Bedingung für die Unstetigkeitsfläche identisch in $x_1, \ldots, x_m$ die partielle Differentialgleichung

$$(7) \qquad \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik} \psi_i \psi_k = 1.$$

Der charakteristische Parameter s wird mit der Zeit t identisch. Es gilt die Relation

$$2 \frac{\partial U}{\partial t} + A U = 0$$

nunmehr identisch in $x_1, \ldots, x_m$.

3. Die Differentialgleichung längs einer charakteristischen Mannigfaltigkeit. Ausbreitung der Unstetigkeiten längs der Strahlen. Die Fortpflanzungsrelation (6) gilt unverändert für die Intensitäten der verschiedenen in Nr. 1 betrachteten Arten von Unstetigkeiten. Wir wollen dies beweisen, indem wir, wie schon vorher in § 1, 2 angekündigt, die Aussagen der Differentialgleichung

$$(8) \qquad \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + c u = 0$$

längs einer vorgegebenen Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$, insbesondere einer charakteristischen Mannigfaltigkeit, näher analysieren. Hierbei dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die betrachtete Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$ bzw. die Flächenschar $\varphi = c$ in die Koordinatenebene $x_n = 0$ bzw. in die Ebenenschar $x_n = c$ transformiert annehmen. Zur Formulierung der so gewonnenen Aussage für beliebige Mannigfaltigkeiten $\varphi = c$ können wir uns dann der oben bewiesenen Invarianztatsachen bedienen.

Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$(9) \qquad \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_i + c u + a_{nn} u_{nn} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} u_{in} + b_n u_n = 0$$

oder, indem wir die Ausdrücke zusammenfassen, welche nur innere Differentiation auf der Mannigfaltigkeit M: $x_n = 0$ enthalten, also Differentiation nach $x_1, \ldots, x_{n-1}$, und diese Ausdrücke zusammen als J bezeichnen

$$(10) \qquad J + a_{nn} u_{nn} + b_n u_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} u_{in} = 0.$$

Nach § 1, 2 ist zu den Flächen $x_n = 0$ und allgemein zu den Flächen $x_n = c$ die Transversaldifferentiation durch

$$= \sum a_{ik} \frac{\partial x_n}{\partial x_k} = a_i,$$

definiert. Setzen wir also auf M zur Abkürzung $u_n = v$, so geht unsere Differentialgleichung über in

$$(11) \qquad J + a_{nn} v_n + 2 \frac{\partial v}{\partial s} + b_n v = 0.$$

Ist die Mannigfaltigkeit M charakteristisch, so ist auf ihr $a_{nn} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial s}$ eine innere Ableitung. Somit läßt (11) erkennen:

Ist M eine charakteristische Mannigfaltigkeit, so stellt die Gleichung (11) eine Bedingung für die aus M herausführende Ableitung v von u dar.

Wenn $M : x_n = 0$ eine charakteristische Mannigfaltigkeit ist, so lautet (11) auf M

$$(12) \qquad J + 2 \frac{\partial v}{\partial s} + b_n v = 0.$$

Nun ist, wie wir oben in § 1, 2 sahen, der Ausdruck

$$A = L'[\varphi] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \varphi_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i \varphi_i$$

gegenüber Koordinatentransformationen invariant. Da $L'[\varphi] = b_n$ für $\varphi = x_n$ gilt, so können wir nunmehr sofort allgemein für eine beliebige charakteristische Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$ unsere Gleichung (12) in der Form

$$(13) \qquad J + 2 \frac{\partial v}{\partial s} + A v = 0$$

schreiben, wobei

$$A = L'[\varphi] = \sum_{i,k} a_{ik} \varphi_{ik} + \sum_{i} b_i \varphi_i$$

ein längs der Mannigfaltigkeit bekannter Ausdruck ist. Diese Gleichung (13) stellt längs der charakteristischen Mannigfaltigkeit M eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung für die hinausführende Ableitung $v = u_\varphi$ dar, und zwar gilt eine solche gewöhnliche Differentialgleichung längs jedes der die charakteristische Mannigfaltigkeit M erzeugenden Strahlen mit dem Parameter s.

Nunmehr erhalten wir die fraglichen Sprungrelationen für die Sprunggrößen folgendermaßen: Zunächst nehmen wir an, daß längs M die Funktion u stetig ist und ebenso die tangentialen (inneren) Ableitungen von u, während die hinausführende Ableitung $u_\varphi = v$ einen Sprung

$$(u_\varphi) = (v) = \varkappa$$

erleiden soll. Wir verfolgen diese Sprungintensität $\varkappa$ längs eines in M liegenden Strahles mit dem Parameter s, schreiben die Gleichung (11) für zwei Punkte P_+, P_- auf zwei verschiedene Seiten von M, subtrahieren, und lassen P_+ und P_- in einen Punkt P von M rücken. Dann erhalten wir, indem wir M wieder in der Form $x_n = 0$ annehmen und die Bedingung $a_{nn} = 0$, ebenso wie die Tatsache, daß J stetig durch M geht, berücksichtigen

(14)
$$2\frac{\partial \varkappa}{\partial s} + A\varkappa = 0$$
mit
$$A = b_n = L'[\varphi].$$

D. h. *die Sprungintensität $\varkappa$ pflanzt sich längs des Strahles nach demselben Gesetz wie U in (6) fort. Sie kann nirgends längs eines Strahles verschwinden, wenn sie dort in einem einzigen Punkt von Null verschieden ist.*

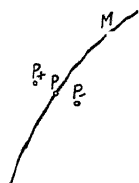



Abb. 34.

Wenn die ersten Ableitungen von u noch stetig durch M hindurchgehen, und ebenso die durch innere Differentiation einer ersten Ableitung erhaltenen zweiten Ableitungen, dann werden nach Nr. 1 die *Sprünge der zweiten Ableitungen* durch den Sprung
$$\varkappa = (u_{\varphi\varphi}) = (v_\varphi)$$
der zweiten hinausführenden Ableitung bestimmt. *Wiederum gilt für diese Sprunggröße die Fortpflanzungsrelation* (14), falls — nach § 1, 2 ohne Beschränkung der Allgemeinheit — die charakteristische Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$ in eine Schar charakteristischer Mannigfaltigkeiten $\varphi = c$ eingebettet vorausgesetzt wird. Zum Beweise brauchen wir, indem wir zunächst diese charakteristischen Mannigfaltigkeiten in die Fläche $x_n = c$ transformiert denken, wiederum nur von der Gleichung (11) auszugehen, diese nach x_n zu differenzieren und dann die obige Überlegung zu wiederholen. Dabei haben wir zu berücksichtigen, daß die Größen J, $\frac{\partial J}{\partial x_n}, \ldots$ stetig durch M hindurchgehen, und daß nach unserer Voraussetzung $a_{nn} = 0$ identisch in allen n Veränderlichen gilt.

Es sei betont, daß genau dieselben Sprungrelationen auf Grund desselben Beweisverfahrens auch für die *Sprungintensitäten höherer Ableitungen* gelten, falls solche Unstetigkeiten erst in höheren Ableitungen auftreten; daß ferner die Relation auch dann bestehen bleibt, wenn es sich um *Unstetigkeiten der Funktion u* selbst handelt, vorausgesetzt, daß diese Unstetigkeiten den in Nr. 2 beschriebenen Charakter besitzen.

4. Physikalische Deutung. Schattengrenzen. Die anschauliche Bedeutung des Strahlenbegriffs in seiner Beziehung zum Begriff der Wellenfront ergibt sich am besten wieder nach Auszeichnung der Variablen $x_n = x_{m+1} = t$ als der Zeitvariablen. Die Charakteristiken sind dann im x-Raume R_m fortschreitende *Wellenfronten* $t = \psi(x_1, \ldots, x_m)$ und die Strahlen zugeordnete sie durchschneidende Linien. Die Relation (14) aus Nr. 3 besagt: Wenn auf einer solchen fortschreitenden Wellenfront zu irgendeinem Zeitpunkt an einer Stelle eine der betrachteten Unstetigkeiten der zugehörigen Lösung $u(x_1, \ldots, x_m, t)$ vorliegt, so pflanzt sich die Intensität dieser Unstetigkeit nach dem obigen Gesetz (14) längs des Strahles fort, welcher durch den betrachteten Anfangspunkt geht. Wenn z. B. auf der Fläche $\psi = 0$ zur Zeit $t = 0$ auf einem kleinen

Fleck schon die ersten Ableitungen von u unstetig sind, während sonst auf dieser Anfangsfläche nur Sprünge höherer Ordnung der Ableitungen vorliegen, so wird der betrachtete Unstetigkeitsfleck sich längs des Strahlenbündels, welches durch ihn geht, als scharf begrenzter Fleck fortsetzen. Es ist also dadurch gewissermaßen das Phänomen einer *Schattengrenze* dargestellt.

Hierbei ist immer zu beachten, daß bei dieser ganzen Betrachtung stets eine bestimmte Lösung der Differentialgleichung $L[u] = 0$ zugrunde liegt, bei welcher wir voraussetzen, daß sie eine solche mit der Zeit fortschreitende Unstetigkeitsfläche besitzt.

5. Strahlenkonoid. Zusammenhang mit der Riemannschen Maßbestimmung. Wir erhalten die sämtlichen Strahlen zur linearen Differentialgleichung

$$(8) \qquad L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + c u + d = 0$$

als die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(5) \qquad \sum a_{ik} \varphi_i \varphi_k = 0,$$

wobei wir $\varphi = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) - x_n$ und $\varphi = 0$ setzen können. Wir nehmen wie in Kap. I, § 4 und II, § 3 an, daß die sämtlichen Strahlen, welche durch einen gegebenen Punkt des $x_1, \ldots, x_n$-Raumes gehen, dort wiederum eine kegelartig verlaufende Fläche bilden, das sog. *Strahlenkonoid*, welches eine Integralfläche der charakteristischen Differentialgleichung (5), also eine charakteristische Fläche ist. Dabei sei nochmals hervorgehoben, daß wir hier diese partielle Differentialgleichung in $n - 1 = m$ unabhängigen Veränderlichen betrachten, welche vermöge der Bedingung $\varphi = 0$ entsteht, und daß wir demgemäß ein Strahlenkonoid im n-dimensionalen Raum R_n der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ zugrunde legen[1]. Wird dieses Strahlenkonoid durch eine Gleichung $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dargestellt, so erfüllt φ die charakteristische Bedingung (5) für $\varphi = 0$.

Die das Konoid definierenden Strahlen werden gemäß § 1, 2 durch das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(15) \qquad \dot{x}_i = \frac{d x_i}{d s} = \sum_k a_{ik} \varphi_k$$

[1] Sehen wir die charakteristische Differentialgleichung $\sum_1^n a_{ik} \varphi_i \varphi_k = 0$ als eine partielle Differentialgleichung für φ in den n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ an und betrachten deren charakteristische Strahlen im $n + 1$-dimensionalen Raum der Variablen $x_1, \ldots, x_n, \varphi$, so würden wir nichts neues gewinnen, weil wegen der Homogenität der Differentialgleichung im $n + 1$-dimensionalen Raum R_{n+1} durch einen gegebenen Punkt doch nur eine $n - 2$-dimensionale Mannigfaltigkeit von charakteristischen Strahlen existiert, welche alle in einer Ebene $\varphi =$ konst. liegen. Diese Ausartung wird vermieden durch Zurückgehen auf die Differentialgleichung in $n - 1$ unabhängigen Veränderlichen, welche charakteristische Grundmannigfaltigkeiten definiert.

definiert. Bedeutet (A_{ik}) die zu (a_{ik}) reziproke Matrix, so gilt identisch

$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = \sum_{i,k} A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k .$$

Führen wir also im n-dimensionalen Raum R_n eine Maßbestimmung mit dem Linienelement

$$d\sigma^2 = \sum_{i,k} A_{ik}\,dx_i\,dx_k \tag{16}$$

ein, so werden vermöge der Charakteristikenrelation die erzeugenden Strahlen des Konoids „*Nullstrahlen*", d. h. Linien längs welchen $d\sigma = 0$ ist, oder Linien, für welche die Entfernung zwischen je zwei Punkten, auf ihnen gemessen, verschwindet. Und umgekehrt sind alle Nulllinien dieser Maßbestimmung charakteristische Strahlen unserer Differentialgleichung $L(u) = 0$.

Diese Verhältnisse werden anschaulicher, wenn wir wiederum $t = x_n = x_{m+1}$ als Zeitkoordinate auszeichnen und den speziellen Differentialgleichungstypus

$$u_{tt} - \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}u_{ik} = 0 \tag{19}$$

betrachten, wobei die Matrix (a_{ik}) positiv definit sei und in den Koeffizienten a_{ik} die Zeit t nicht mehr vorkommen möge. Die Charakteristiken $t = \psi(x_1, \ldots, x_m) = 0$ erfüllen dann die echte partielle Differentialgleichung

$$\sum a_{ik}\psi_i\psi_k = 1 . \tag{20}$$

Die Differentialgleichung der charakteristischen Strahlen der Wellenfront $t = \psi$ war

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\psi_k, \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{21}$$

und die Gesamtheit aller möglichen Strahlen ist mit der Gesamtheit der charakteristischen Kurven der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (20) identisch. Alle durch einen festen Punkt des Raumes R_m gehenden Strahlen bilden im R_n das zugehörige Strahlenkonoid, welches wir in der Form $t = \omega(x_1, \ldots, x_m)$ dargestellt denken, oder allgemein

$$t = \omega(x_1, \ldots, x_m;\ x_1^0, \ldots, x_m^0) = \omega(x; x^0),$$

wobei x^0 den Punkt mit den Koordinaten x_i^0 des Knotenpunktes des Strahlenkonoids bedeutet.

Dieses Konoid stellt sog. *Kugelwellenfronten* um den Anfangspunkt x^0 als *Störungszentrum* dar, wobei die Wellenfronten im R_m durch $t = \omega$ gegeben sind. Es ist hier, wenn wiederum (A_{ik}) die zu (a_{ik}) reziproke Matrix bedeutet

$$\sum A_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k = \sum a_{ik}\psi_i\psi_k = 1 \tag{22}$$

längs der Strahlen. Führen wir nunmehr im m-dimensionalen Raum R_m

die Maßbestimmung mit dem Linienelement

$$d\varrho^2 = \sum_{i,k=1} A_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{23}$$

ein, so bedeutet t die Länge auf diesen Strahlen, und die Fläche $\psi = t$ ist wirklich im Sinne dieser Maßbestimmung eine Kugel mit dem Radius t um den Mittelpunkt x^0, falls man Entfernungen längs der Strahlen mißt [1].

Die zu (19) gehörige Maßbestimmung im Raum R_n wird durch das Linienelement

$$d\sigma^2 = dt^2 - d\varrho^2 \tag{24}$$

gegeben, wobei die geodätischen Linien nunmehr den Nullinien der Maßbestimmung entsprechen.

Zeitartig heißt eine Richtung dx_i jetzt, wenn

$$dt^2 - \sum_{i,k=1} A_{ik}\, dx_i\, dx_k > 0$$

ist, raumartig ein Flächenelement der Fläche $\varphi(x_1, \ldots, x_m, t) = 0$, wenn

$$\varphi_t^2 - \sum_{i,k=1} a_{ik}\varphi_i\varphi_k > 0$$

gilt (vgl. § 1, Nr. 2, Schluß); also ist insbesondere die Zeitachse $dx_i = 0$ tatsächlich zeitartig und der Raum $\varphi = t = 0$ tatsächlich raumartig.

Das Beispiel der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

erläutert unsere allgemeinen Begriffe unmittelbar. Die entsprechenden Linienelemente sind $d\varrho^2 = \sum dx_i^2$ bzw. $d\sigma^2 = dt^2 - \sum dx_i^2$.

6. Die Huygenssche Konstruktion der Wellenfronten. Strahlenkegel und Richtungsausbreitung. Wir betrachten eine mögliche Wellenfront, d. h. eine Lösung $t = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ der Differentialgleichung (20). Die Kugelwellen zum Punkt P_0 seien wiederum mit $t = \omega(x_1, \ldots, x_m, P_0)$ bezeichnet. Wir können dann die folgende *Huygenssche Konstruktion* verwenden, um eine Wellenfront zur Zeit t zu konstruieren, wenn sie zur Zeit $t = 0$ mit einer vorgegebenen Fläche W_0 identisch ist. Um jeden Punkt P_0 von W_0 betrachten wir die Kugelwellenfront $t = \omega(x, P_0)$ und bilden bei festem positiven t die Enveloppe aller dieser Kugeln im $x_1, \ldots, x_m$-Raum, indem wir P_0 über W_0 laufen lassen. So entsteht eine Fläche $t = \psi(x_1, \ldots, x_m)$, welche die gesuchte Wellenfront

[1] Der Vergleich mit Kapitel II, § 9 zeigt sofort, daß diese Strahlen nichts anderes sind als die geodätischen Linien im Sinne des Variationsprinzips zu dem Integranden

$$\int \sqrt{\sum_{i,k=1} A_{ik}\, \dot{x}_i \dot{x}_k}\, dt.$$

enthält. Mit anderen Worten: *Die Wellenfront zur Zeit t wird gegeben durch die Enveloppe der im Sinne unserer obigen Maßbestimmung definierten Kugeln vom Radius t um die Punkte der Wellenfront zur Zeit $t = 0$.*

Die Begründung ergibt sich unmittelbar aus der Theorie des vollständigen Integrals und der zugehörigen Enveloppenkonstruktion der Lösungen des Anfangswertproblems von Differentialgleichungen erster Ordnung (vgl. Kap. II, § 4 und 8).

Es sei auf ein beim ersten Anschein paradoxes Verhalten hingewiesen: Nehmen wir an, $u(x_1, \ldots, x_m, t)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung $L[u] = 0$ mit der Wellenfront $t = \psi$. Diese Wellenfront möge aus einer einzigen mit der Zeit sich durch den Raum R_m bewegenden Fläche W_t bestehen. Gehen wir von der Wellenfront W_0 aus, so kann die Huygenssche Wellenkonstruktion — wie im Beispiel der Wellengleichung — zur Zeit $t > 0$ nicht eine sondern zwei „geometrische Parallelflächen" W_t und W_t' liefern, welche beide der charakteristischen Differentialgleichung genügen. Aber nur eine von beiden ist nach Voraussetzung tatsächlich Träger der Unstetigkeit von u zur Zeit t, nämlich diejenige welche tatsächlich dem späteren Zeitpunkt t entspricht, während die andere Fläche unter unserer Voraussetzung dem Zeitpunkt $-t$ entsprechen würde[1].

7. Strahlen- und Normalenkegel. Die Beziehungen zwischen Strahlen und Wellenfronten können in zweckmäßiger Weise mit Hilfe eines allgemeinen geometrischen Begriffs dargestellt werden. Wir betrachten zunächst den Fall konstanter Koeffizienten und gehen von der Bemerkung aus, daß die Charakteristikenbedingung in einem Punkte primär nicht den Mongeschen Kegel der charakteristischen Strahlen liefert, sondern eine Bedingung für die Richtungen der möglichen Normalen von charakteristischen Flächenelementen. Tragen wir diese Normalenrichtungen als Vektoren ξ eines rechtwinkeligen $\xi_1, \ldots, \xi_n$-Raumes, den wir mit dem $x_1, \ldots, x_n$-Raume identifizieren, vom Nullpunkte aus ab, so liegen ihre Endpunkte auf dem „Normalenkegel" mit der Gleichung

$$\sum_1^n a_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Die charakteristischen Richtungen bzw. Strahlen durch den Nullpunkt bilden den Mongeschen Kegel

$$\sum_1^n A_{ik} x_i x_k = 0,$$

den wir „*Strahlenkegel*" nennen. Die Seitenlinien des Normalenkegels sind normal auf den Tangentialebenen des Strahlenkegels und um-

[1] Eine charakteristische Fläche kann, braucht jedoch nicht notwendig Unstetigkeiten der Lösung u zu enthalten und die Enveloppenkonstruktion kann ohne Widerspruch zu unserer Theorie auch zu Flächenstücken führen, auf denen die Welle zur Zeit nicht unstetig ist.

gekehrt. Beide Flächen sind reziprok zueinander in folgendem Sinne: Wir definieren im Bündel durch den Nullpunkt eine Kollineation, welche jedem Strahl die Polarebene in bezug auf den imaginären Kegel

$$\sum_1^n \xi_i^2 = 0$$

zuordnet. Dann ist jeder der beiden Kegel die Enveloppe der Polarebenen zu den Strahlen des anderen.

In dem speziellen Falle der Differentialgleichung (19) erhalten wir als Schnitte der beiden Kegel mit der Ebene $x_n = t = -1$ die Flächen

$$N = \sum a_{ik} \xi_i \xi_k = 1$$

bzw.

$$S = \sum A_{ik} x_i x_k = 1,$$

welche wir „*Normalenfläche*" bzw. „*Strahlenfläche*" nennen. Sie sind reziprok zueinander im m-dimensionalen Raume vermöge der Kollineation, welche jedem Punkte seine Polarebene in bezug auf die Fläche zweiter Ordnung

$$\sum_1^m \xi_i^2 + 1 = 0$$

zuordnet. Jede der beiden Flächen $S = 0$ und $N = 0$ ist die Enveloppe der Polarebenen zu den Punkten der anderen.

Als Beispiel sei erwähnt, daß bei der Differentialgleichung

$$u_{tt} - u_{x_1 x_1} - \cdots - u_{x_n x_n} = 0$$

Strahlenkegel und Normalenkegel ebenso wie Strahlenfläche und Normalenfläche zusammenfallen und durch die Gleichungen

$$t^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2 = 0$$

gegeben sind.

Dagegen ist für

$$u_{tt} - u_{xx} - 2\, u_{yy} = 0$$

der Normalenkegel durch

$$\xi^2 + 2\eta^2 = \tau^2$$

und der Strahlenkegel durch

$$x^2 + \tfrac{1}{2} y^2 = t^2$$

dargestellt.

Sind die Koeffizienten a_{ik} der Differentialgleichung nicht konstant, so bleibt die Betrachtung unverändert; nur haben wir dann zu jedem Punkte gesondert Strahlenkegel und Normalenkegel, bzw. Strahlenfläche und Normalenfläche zu betrachten.

Um entsprechende Zusammenhänge in § 3 auf Probleme höherer als zweiter Ordnung anwenden zu können, wo sie für die Beschreibung

der Verhältnisse nützlich sein werden, definieren wir allgemein als Reziprokaltransformation im Bündel durch den Nullpunkt des ξ-, oder x-Raumes wieder die obige Kollineation, und entsprechend die Reziprokaltransformationen in der Ebene $x_n = t = -1$. Somit ordnen wir jedem Kegel

$$N(\xi) = 0,$$

wobei N eine homogene Funktion der Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ist, die Enveloppe der zu den Strahlen gehörigen Polarebenen in bezug auf $\sum_1^n \xi_i^2 = 0$ zu, und jeder Fläche $N(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ die Enveloppe der Polarebenen ihrer Punkte in bezug auf $\sum_1^m \xi_i^2 + 1 = 0$. Diese Transformation ist wiederum reziprok. Sie ist ferner eine Berührungstransformation, indem sie einer Tangentialebene an N in einem Punkte P Berührungspunkt der P entsprechenden Ebene auf S zuordnet. Ferner: *Eine konvexe Fläche N wird transformiert in eine konvexe Fläche S.* Endlich: *Eine konische Spitze von N, d. h. ein singulärer Punkt, in welchem es eine m-2-parametrige Schar von Tangentialebenen an N gibt, geht in ein ebenes Stück von S über.*

8. **Beispiel. Die Poissonsche Wellengleichung in drei Raumdimensionen.** Für das Auftreten der inneren Ableitungen auf einer charakteristischen Mannigfaltigkeit und für die Bedeutung dieses Phänomens ist die Poissonsche Wellengleichung

$$L[u] = u_{tt} - \Delta u = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0 \tag{32}$$

ein instruktives Beispiel. Wir wollen kurz unter Benutzung unserer Begriffsbildungen das schon früher (Kap. III, § 6, 2) behandelte und noch näher in § 5 zu diskutierende Anfangswertproblem dieser Gleichung lösen, wobei für $t = 0$ die Anfangswerte $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$, $u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z)$ vorgeschrieben sind. Wir führen die folgenden Differentiationssymbole ein

$$A_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \qquad A_2 = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad A_3 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{t-\tau}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + (t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{t-\tau}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} - (t-\tau)\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Dann sind auf dem durch den Punkt $(0, 0, 0, \tau)$ gehenden charakteristischen Kegel K:

$$(t-\tau)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

die Differentiationen A_1, A_2, A_3 und die charakteristische Ableitung $\frac{\partial}{\partial s}$ innere Differentiationen, während $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die normale Ableitung auf diesem

Kegel K bedeutet. Das Auftreten der inneren Ableitungen auf K kommt in der folgenden Identität zum Ausdruck

$$(33)\quad \begin{cases} \Psi[u] = -(t-\tau)^2 L[u] - (t-\tau)\frac{\partial u}{\partial s} - (t-\tau)\frac{\partial}{\partial s}\left((t-\tau)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) \\ \quad = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\, u, \end{cases}$$

die für $(t-\tau)^2 = x^2 + y^2 + z^2$ gilt. Nun ist auf der dreidimensionalen Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = \text{konst.}$ das Oberflächenintegral von $A_1[v]$ für eine beliebige Funktion v gleich Null, da das Integral über einen Schnittkreis mit $z = \text{konst.}$ nach der Definition von A_1 verschwindet. Dasselbe gilt natürlich für entsprechende Oberflächenintegrale von $A_2[v]$ und $A_3[v]$ und somit auch von $(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\, v = \Psi[v]$. Nun bilden wir mit dem Ausdruck $\frac{1}{t-\tau}\,\Psi[u]$ das Integral

$$\iiint \frac{\Psi[u]}{t-\tau}\, ds\, d\omega$$

über den Mantel des charakteristischen Halbkegels K für $t > 0$. Man erhält dann wegen $L[u] = 0$ zunächst

$$\iiint\limits_K \left\{\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s}\left((t-\tau)\frac{\partial u}{d v}\right)\right\} ds\, d\omega = 0$$

und nach Integration

$$(34)\qquad 4\pi\tau^2 u(P) - \iint u\, d\omega - \tau \iint \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\omega = 0,$$

wobei die Integrale über die Oberfläche der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = \tau^2$ zu erstrecken sind. Dies aber ist die schon von früher Kapitel III, § 6 her bekannte Auflösungsformel.

Für die unhomogene Poissonsche Gleichung erhalten wir ebenfalls auf dieselbe Art die Auflösungsformel aus Kapitel III, § 6, 4.

Die hier gegebene auf Beltrami zurückgehende Methode beruht darauf, daß wir die Aussage der Differentialgleichung längs des charakteristischen Kegels mit Hilfe innerer Differentiationen in besonders einfacher Weise schreiben können. Dabei ist es möglich durch Integration nur längs des Kegelmantels einen Ausdruck der Funktion an der Kegelspitze durch Anfangswerte längs des Grundkreises zu erhalten und so die Lösung zu gewinnen und zugleich den *Huyghensschen Charakter* der Differentialgleichung evident zu machen.

Eine genau entsprechende Integrationstheorie für eine beliebige lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche durch Integrationsprozesse innerhalb des charakteristischen Konoides zum Ziele führt, kann es deshalb nicht geben, weil mit ihr eine allgemeine Gültigkeit des Huyghensschen Prinzipes verbunden wäre, welche ja nicht besteht. Es ist eine noch offene Frage, wie man im Sinne der Überlegungen dieser Nummer

durch Diskussion der Differentialgleichung längs charakteristischer Mannigfaltigkeiten zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Huyghensschen Prinzipes gelangen und in diesen Fällen die Integration der Differentialgleichung durchführen kann.

§ 3. Charakteristiken bei Problemen höherer Ordnung.

Der Begriff der Charakteristiken und die charakteristische Relation ergibt sich bei Differentialgleichungsproblemen höherer Ordnung und bei Systemen von Differentialgleichungen analog zu Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wir gehen von einem Anfangswertproblem aus, wobei die Anfangsdaten längs einer Mannigfaltigkeit M: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ gegeben sind, und stellen die Frage, ob für eine Funktion u, die der Differentialgleichung genügt, in einem Punkte dieser Anfangsmannigfaltigkeit die hinausführende Ableitung bestimmt ist oder ob die Differentialgleichung eine zusätzliche Bedingung für die Anfangswerte durch ihre Anfangswerte darstellt. Wenn dieser zweite Fall der Alternative überall längs der Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$ eintritt, heißt diese charakteristisch, und alle Überlegungen der vorigen Paragraphen lassen sich in einfacher Weise sinngemäß übertragen. Wir begnügen uns mit einigen typischen Fällen.

1. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung. Es sei z. B. ein linearer Differentialausdruck vierter Ordnung

$$L[u] = \sum_{i,k,l,m=1}^{n} a_{iklm} u_{iklm} \tag{1}$$

vorgelegt, wobei die Koeffizienten a_{iklm} gegebene Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ sind. Die zugehörige Differentialgleichung sei

$$L[u] + b = 0, \tag{2}$$

wobei b ein Ausdruck ist, welcher außer den unabhängigen Veränderlichen noch u und die Ableitungen bis zur dritten Ordnung enthalten darf. Wir betrachten den Differentialausdruck bzw. die Differentialgleichung längs einer Anfangsmannigfaltigkeit M: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ und denken uns statt der Variablen x_ν im Raum R_n neue Veränderliche $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ eingeführt, wobei $\lambda_n = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist und also $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ wieder die „inneren" Variablen in M bedeuten. Bei Transformation von $L[u]$ auf die neuen Veränderlichen geht dieser Differentialausdruck über in die folgende Gestalt

$$Q \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \cdots = 0,$$

wo

$$Q = \sum_{i,k,l,m} a_{iklm} \varphi_i \varphi_k \varphi_l \varphi_m \tag{3}$$

ist und die Punkte einen Ausdruck bedeuten, in welchem die vierte

hinausführende Ableitung $\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}$ nicht mehr auftritt. Wir erkennen also tatsächlich wieder das Bestehen der Alternative: *Entweder es ist in einem Punkte P von M der Ausdruck Q von Null verschieden. Dann bestimmt die Differentialgleichung* (2) *in P die vierte hinausführende Ableitung* $\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4}$ *eindeutig, sobald u und die Ableitungen von u bis zur dritten Ordnung längs M vorgegeben sind. Oder es ist* $Q = 0$; *dann ist* $L[u]$ *in P ein innerer Differentialausdruck in der zu M gehörigen Streifenmannigfaltigkeit dritter Ordnung und die Differentialgleichung* (2) *stellt eine weitere Bedingung für diese Anfangsstreifenmannigfaltigkeit dar.*

Ist die Bedingung $Q = 0$ längs der ganzen Anfangsmannigfaltigkeit M erfüllt, so heißt M eine *charakteristische Mannigfaltigkeit.* Die *Charakteristikenbedingung* lautet also

$$\sum_{i,k,l,m=1} a_{iklm} \varphi_i \varphi_k \varphi_l \varphi_m = 0, \tag{4}$$

vorausgesetzt, daß $\varphi = 0$ ist. Genau wie bei zweiter Ordnung ist sie äquivalent einer partiellen Differentialgleichung mit $n - 1$ unabhängigen Veränderlichen für eine Funktion $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, wenn wir die charakteristische Mannigfaltigkeit in der Form $\varphi = x_n - \psi = 0$ darstellen. Fassen wir (4) als eine partielle Differentialgleichung für die Funktion φ von n unabhängigen Veränderlichen auf, so erhalten wir in $\varphi = \text{konst.} = c$ eine einparametrige Schar von charakteristischen Mannigfaltigkeiten und umgekehrt.

Ganz Entsprechendes gilt für eine lineare Differentialgleichung von irgendwelcher Ordnung. Stets wird die charakteristische Bedingung dargestellt durch das Verschwinden einer homogenen Form Q in den Ableitungen φ_i der Funktion φ.

Der Begriff der *Strahlen* oder *Bicharakteristiken*, welche als charakteristische Kurven der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (4) erscheinen, überträgt sich unmittelbar von der zweiten Ordnung auf beliebige Ordnung, und dasselbe gilt für alle die im vorigen Paragraphen dargestellten Zusammenhänge. Genau wie bei zweiter Ordnung gilt:

Für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind die Strahlen stets gerade Linien.

Es sei hier nochmals hervorgehoben, daß sich die Typeneinteilungen von Differentialgleichungen an die Realitätsverhältnisse der Form $Q(\varphi)$ bzw. die entsprechenden Verallgemeinerungen bei höherer Ordnung anknüpft (vgl. Kap. III, § 4). Falls diese Form *definit* ist, reelle Charakteristiken also nicht möglich sind, heißt die lineare Differentialgleichung *elliptisch*, ist sie *indefinit* ohne auszuarten, so heißt sie *hyperbolisch*. Unter allen diesen Möglichkeiten indefiniter Formen ist jedoch vom Standpunkte der Anwendungen der Fall der *total hyperbolischen Differentialgleichungen* ausgezeichnet (wie schon in Kap. III, § 4

hervorgehoben wurde), und zwar durch folgende Bedingung. Wenn es sich um eine Differentialgleichung der Ordnung k handelt, so soll der „*Normalenkegel*“ $Q = 0$ im $\xi_1, \ldots, \xi_n$-Raume, den wir bei der Ersetzung $\xi_\nu = \varphi_\nu$ erhalten, aus $\frac{k}{2}$ reellen einander umschließenden Mänteln bestehen. Es muß also die Ordnung k eine gerade Zahl sein. Tatsächlich zeigen die Differentialgleichungen höherer Ordnung für Ausbreitungsprobleme der Physik stets einen solchen *total hyperbolischen Typus*. Z. B. ist die Differentialgleichung für $u(x, y, t)$

$$u_{tttt} - \Delta\Delta u = u_{tttt} - u_{xxxx} - 2u_{xxyy} - u_{yyyy} = 0$$

nicht total hyperbolisch, weil der zugehörige Normalenkegel

$$t^4 - (x^2 + y^2)^2 = 0$$

nicht zwei, sondern nur einen reellen Mantel besitzt. Dagegen ist die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\left(4\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = 0$$

total hyperbolisch. Ihr Normalenkegel $(t^2 - x^2 - y^2)(4t^2 - x^2 - y^2) = 0$ besteht aus zwei reellen Teilen, nämlich zwei Kreiskegeln, ihre Normalenfläche aus zwei konzentrischen Kreisen $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

Im Falle von quasilinearen bzw. nichtlinearen Differentialgleichungen höherer Ordnung bleibt im wesentlichen alles unverändert, nur bezieht sich dann die Charakteristikenbedingung stets auf eine vorgegebene Integralfläche bzw. auf eine vorgegebene Integralstreifenmannigfaltigkeit genau wie bei zweiter Ordnung oder wie bei zwei unabhängigen Veränderlichen (vgl. Kap. V, § 2).

2. Systeme von Differentialgleichungen. Hydrodynamik. Wir betrachten als ein Beispiel für ein nichtlineares Problem das System der *Differentialgleichungen der Hydrodynamik kompressibler Flüssigkeiten* in der Ebene, wobei gleichzeitig der Charakteristikenbegriff für ein Differentialgleichungssystem nochmals erläutert wird und sich auch einige an sich interessante Zusammenhänge ergeben werden — den Fall der stationären Bewegung haben wir schon in Kapitel V, § 2, 5 behandelt. Sind die Geschwindigkeitskomponenten und die Dichte der Flüssigkeit als drei Funktionen $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $\varrho(x, y, t)$ gesucht und ist wie früher $p(\varrho)$, mit $p'(\varrho) > 0$, die Druckfunktion, so lauten die quasilinearen *Eulerschen Differentialgleichungen der Bewegung*

$$(5) \qquad \begin{cases} \varrho u_t + \varrho u u_x + \varrho v u_y + p' \varrho_x = 0 \\ \varrho v_t + \varrho u v_x + \varrho v v_y + p' \varrho_y = 0 \\ \varrho_t + u \varrho_x + v \varrho_y + \varrho(u_x + v_y) = 0. \end{cases}$$

$\varphi(x, y, t) = 0$ sei eine Anfangsmannigfaltigkeit, längs welcher u, v, ϱ gegeben seien. Dann sind längs dieser Anfangsmannigfaltigkeit durch die Anfangswerte die sämtlichen Ableitungen von u, v, ϱ insbesondere die

nach außen führenden Ableitungen $u_\varphi, v_\varphi, \varrho_\varphi$ eindeutig bestimmt, es sei denn, daß auf $\varphi = 0$ die Charakteristikenbedingung

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \varrho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & 0 & p'\varphi_x \\ 0 & \varrho(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y) & p'\varphi_y \\ \varrho\varphi_x & \varrho\varphi_y & \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y \end{vmatrix} = 0$$

besteht, welche nach kurzer Umrechnung in

$$(7)\qquad D = \varrho^2(\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)\left((\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\right) = 0$$

übergeht. Diese charakteristischen Flächen im x, y, t-Raum oder die entsprechenden Kurvenscharen $t = \psi(x, y)$ in der x, y-Ebene, welche wir erhalten, indem wir $\varphi = t - \psi(x, y)$ setzen, sind wiederum die möglichen Unstetigkeitsmannigfaltigkeiten oder Wellenfronten bei der Flüssigkeitsbewegung. Die Charakteristikenbedingung kann auch in der Form

$$(7')\qquad \varrho^2(1 - u\psi_x - v\psi_y)\left((1 - u\psi_x - v\psi_y)^2 - p'(\psi_x^2 + \psi_y^2)\right) = 0$$

oder

$$(7'')\qquad \varrho^2(t_\nu + u x_\nu + v y_\nu)\left((t_\nu + u x_\nu + v y_\nu)^2 - p'(x_\nu^2 + y_\nu^2)\right) = 0$$

geschrieben werden, wobei t_ν, x_ν, y_ν die Richtungskosinus der Normalen auf der Fläche $\varphi(x, y, t) = 0$ bedeuten. Als Charakteristiken erhalten wir also, je nachdem welcher Faktor verschwindet, einmal die Gebilde, welche durch

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0 \\ \text{oder} \\ t_\nu + u x_\nu + v y_\nu = 0 \end{cases}$$

gegeben sind. Die Projektionen der zugehörigen Strahlen auf die x, y-Ebene sind nichts als die *Stromlinien der Strömung*, und die Strahlen selbst im dreidimensionalen x, y, t-Raum sind dargestellt durch $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, stellen also die Stromlinien zugleich mit der Strömungsgeschwindigkeit dar.

Der zweite Typus von charakteristischen Mannigfaltigkeiten wird gegeben durch

$$(9)\qquad \begin{cases} (\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y)^2 - p'(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 0 \\ \text{oder} \\ (t_\nu + u x_\nu + v y_\nu)^2 - p'(x_\nu^2 + y_\nu^2) = 0 \end{cases}$$

auf $\varphi = 0$. Die Richtungen der *Strahlen oder Bicharakteristiken*, gegeben durch das Verhältnis $dt : dx : dy$ stellen für die Unstetigkeiten wiederum die „*Ausbreitungsgeschwindigkeiten*" oder Strahlengeschwindigkeiten dar, und die Mongesche Gleichung[1] des Mongeschen Kegels, welche zur

[1] Vgl. Kap. II, § 5.

partiellen Differentialgleichung (9) der charakteristischen Mannigfaltigkeiten gehört, wird, wie man leicht feststellt,

$$\left(\frac{dx}{dt}-u\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-v\right)^2=p'. \tag{10}$$

In der Akustik oder Hydrodynamik heißt $\sqrt{p'}$ die *Schallgeschwindigkeit*, und Gleichung (10) bedeutet also: *Die Relativgeschwindigkeit der Unstetigkeitsausbreitung gegen die Strömung ist gleich der Schallgeschwindigkeit.*

Diese Verhältnisse und ihre Beziehung zu dem schon früher (Kap. V, § 2, 5) erwähnten stationären Fall können durch folgende geometrische Betrachtung noch weiter veranschaulicht werden.

Bei gegebenem u und v ist der *Mongesche Kegel der charakteristischen Differentialgleichung* im x, y-Raum mit der Spitze etwa im Nullpunkt $x=y=t=0$ durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{t}-u\right)^2+\left(\frac{y}{t}-v\right)^2=p'(\varrho)$$

gegeben. Er entsteht also durch Projektion des Kreises $(x-u)^2+(y-v)^2=p'$ in der Ebene $t=1$ vom Nullpunkt aus. Je nachdem ob dieser Kreis den Nullpunkt $x=0$, $y=0$ einschließt, d. h. je nachdem ob $u^2+v^2<p'$ oder $u^2+v^2>p'$ ist, wird unser Kreiskegel die t-Achse enthalten oder so schräg verlaufen, daß die t-Achse außerhalb liegt.

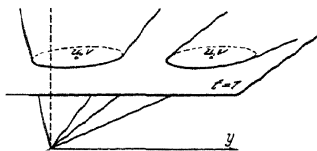



Abb. 35. Charakteristischer Kegel bei Über- und Unterschallgeschwindigkeit.

Der *Übergang zum stationären Fall* wird nun dadurch vollzogen, daß man alle Ableitungen hinsichtlich t gleich Null setzt. Von den Tangentialebenen des betrachteten Mongeschen Kegels kommen dann nur diejenigen in Frage, wo $\varphi_t=0$ ist, d. h. Tangentialebenen, welche vertikal zur x, y-Ebene stehen oder die t-Achse enthalten. Ihre Berührungslinien mit dem Kegel liefern die beiden charakteristischen Richtungen im stationären Fall. Nun sind die beiden Tangentialebenen an den Mongeschen Kegel durch die t-Achse reell und verschieden dann und nur dann, wenn die t-Achse außerhalb des Kegels liegt, d. h. also nach dem Obigen, falls die Strömungsgeschwindigkeit $\sqrt{u^2+v^2}$ größer als die Schallgeschwindigkeit $\sqrt{p'}$ wird. Unser früher in Kapitel V, § 2 gewonnenes Resultat über die stationäre Flüssigkeitsbewegung wird also dadurch vom allgemeinen Fall aus wiedergewonnen.

3. Weitere Systeme. Krystalloptik. Wir haben schon im Kapitel III, § 4 ausgehend von etwas anderen Gesichtspunkten die Charakteristikenbedingung für die *Maxwellschen Gleichungen* hergeleitet. Hier wollen

wir die physikalisch und mathematisch interessante Verallgemeinerung der für den Äther geltenden Maxwellschen Gleichungen auf den *Fall der Krystalloptik* betrachten. Die allgemeinen Maxwellschen Gleichungen zwischen dem magnetischen Vektor $\mathfrak{H}$, dem elektrischen Vektor $\mathfrak{E}$, der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und der magnetischen Verschiebung $\mathfrak{B}$ lauten, wenn c die Lichtgeschwindigkeit ist, und der Punkt Differentiation nach der Zeit t bedeutet

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathfrak{D}}, \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{B}},$$

wobei $\mu\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ ist (μ ist die konstante Permeabilität) und zwischen den Komponenten u_1, u_2, u_3 des elektrischen Vektors $\mathfrak{E}$ und der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ die Beziehung besteht: $\mathfrak{D} = (\varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2, \varepsilon_3 u_3)$, wobei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ drei Dielektrizitätskonstanten in den drei Achsenrichtungen sind. Ihre Verschiedenheit charakterisiert das betrachtete Medium als Krystall.

Durch Elimination des Vektors $\mathfrak{H}$ ergeben sich mit den Konstanten

$$\sigma_i = \frac{\mu}{c^2}\varepsilon_i$$

drei lineare Differentialgleichungen für den elektrischen Vektor

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned}
\sigma_1 \ddot{u}_1 &= \Delta u_1 - \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial z\,\partial x}\\
\sigma_2 \ddot{u}_2 &= \Delta u_2 - \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x\,\partial y}\\
\sigma_3 \ddot{u}_3 &= \Delta u_3 - \frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y\,\partial z}.
\end{aligned}$$

Bei diesem Differentialgleichungssystem gewinnen wir genau nach dem früheren Muster die Bedingung für eine charakteristische Mannigfaltigkeit $\omega(x, y, z, t) = 0$, wenn wir $\tau = \omega_t$ und $\xi = \omega_x$, $\eta = \omega_y$, $\zeta = \omega_z$ setzen und zur Abkürzung $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ schreiben die Determinantenbedingung, nämlich

$$\text{(13)} \qquad \begin{vmatrix}
\varrho^2 - \xi^2 - \sigma_1\tau^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta\\
-\eta\xi & \varrho^2 - \eta^2 - \sigma_2\tau^2 & -\eta\zeta\\
-\zeta\xi & -\zeta\eta & \varrho^2 - \zeta^2 - \sigma_3\tau^2
\end{vmatrix} = 0$$

längs $\omega = 0$; wenn speziell $\omega = t - \pi(x, y, z)$ gesetzt wird und dann entsprechend $\tau = 1$ ist, ergibt sich

$$H(\xi, \eta, \zeta) = \begin{vmatrix}
\varrho^2 - \xi^2 - \sigma_1 & -\xi\eta & -\xi\zeta\\
-\eta\xi & \varrho^2 - \eta^2 - \sigma_2 & -\eta\zeta\\
-\zeta\xi & -\zeta\eta & \varrho^2 - \zeta^2 - \sigma_3
\end{vmatrix} = 0.$$

Hier wie bei allen Differentialgleichungsproblemen mit konstanten Koeffizienten werden die charakteristischen Strahlen gerade Linien. Eine elementare Berechnung unserer Determinante ergibt

$$H(\xi,\eta,\zeta) = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3(1-\psi+\varrho^2\varphi)$$

mit

$$\psi(\xi,\eta,\zeta) = \frac{\varrho^2-\xi^2}{\sigma} + \frac{\varrho^2-\eta^2}{\sigma} + \frac{\varrho^2-\zeta^2}{\sigma}$$

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta) = \qquad + \quad \eta^2 \quad +$$

Die Determinantengleichung (13) geht dann über in

$$\tau^6 H\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = 0. \tag{14}$$

Deuten wir ξ,η,ζ als rechtwinklige Koordinaten im dreidimensionalen Raum, so stellt die Fläche $H(\xi,\eta,\zeta) = 0$ die *Normalenfläche* der Differentialgleichungen der Krystalloptik dar; im Raum mit den Koordinaten ξ, η, ζ, τ liefert $H\left(\frac{\xi}{\tau}, \frac{\eta}{\tau}, \frac{\zeta}{\tau}\right) = 0$ den *Normalenkegel*, welcher die in der Ebene $\tau = 1$ gelegene Normalenfläche vom Nullpunkt aus projiziert. Die anschauliche Bedeutung der Normalenfläche ist gemäß unseren früheren Überlegungen folgende: Wir wählen einen festen Punkt des x-Raumes, z. B. den Nullpunkt — was wegen der konstanten Koeffizienten irrelevant ist — und betrachten alle dort möglichen Tangentialebenen von charakteristischen Flächen durch diesen Punkt. Auf jeder charakteristischen Fläche errichten wir einen Normalvektor, dessen Komponenten die zu dieser Richtung gehörigen *Normalen-Geschwindigkeiten* der charakteristischen Fläche darstellen. Die Endpunkte dieser Vektoren bilden dann die Normalenfläche. Diese Normalenfläche ist eine Fläche vierter Ordnung, die sog. *Fresnelsche Wellenfläche*; sie ist unabhängig von dem betrachteten Punkte des x-Raumes. Wir können die Gleichung $H(\xi,\eta,\zeta) = 0$ der Normalenfläche auch in einer der beiden folgenden Weisen schreiben

$$\frac{\sigma_1\xi^2}{\varrho^2-\sigma_1} + \frac{\sigma_2\eta^2}{\varrho^2-\sigma_2} + \frac{\sigma_3\zeta^2}{\varrho^2-\sigma_3} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\quad}{\varrho^2-\sigma_1} \qquad \frac{\eta^2}{-\sigma_2} + \frac{\quad}{\varrho^2-\sigma_3} = 1. \tag{15'}$$

Im Anhang werden wir die Integration der Differentialgleichungen der Krystalloptik etwas näher studieren und hierzu auch genauer auf die geometrischen Verhältnisse der Normalenfläche und Strahlenfläche eingehen. Schon hier seien folgende Resultate vorweg genommen: *Die Normalenfläche sowie die Strahlenfläche bestehen aus je zwei reellen geschlossenen Mänteln, deren innerer konvex ist. Durch die Reziprokaltransformation erhält man aus dem inneren Mantel der Normalenfläche die konvexe Hülle des äußeren Mantels der Strahlenfläche.* Die entsprechenden Beziehungen gelten für den Normalenkegel und den Strahlenkegel im vierdimensionalen Raum.

§ 4. Eindeutigkeitssätze und Abhängigkeitsgebiet bei Anfangswertproblemen[1].

1. Die Wellengleichung. Die grundsätzlichen Betrachtungen über *Eindeutigkeit, Abhängigkeitsgebiet* und Wirkungsgebiet aus Kapitel V, § 3 lassen sich auf mehr unabhängige Veränderliche übertragen. Wir brauchen diese Überlegungen nicht zu wiederholen und können uns mit der Durchführung der Eindeutigkeitsbeweise begnügen, wobei wir uns auf eine Reihe typischer Beispiele beschränken. Als erstes Beispiel betrachten wir die Wellengleichung in zwei Raumdimensionen:

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{1}$$

und geben hier für sie eine Wendung des Eindeutigkeitsbeweises, die von der entsprechenden Betrachtung in Kapitel V in einem Punkte abweicht. Es sei C eine beliebige raumartige Anfangsfläche $\varphi(x, y, t) = 0$ mit

$$\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0$$

oder

$$t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 > 0,$$

wobei mit x_ν, y_ν, t_ν die Komponenten des zur Fläche normalen Einheitsvektors bezeichnet sind, d. h. $x_\nu = \frac{}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}$, $y_\nu = \frac{\varphi_y}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}$, $t_\nu = \frac{\varphi_t}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2}}$. Wir nehmen an, daß eine Lösung u der Differentialgleichung mit ihren ersten Ableitungen auf C verschwindet, wozu lediglich das Verschwinden von u und u_t vorausgesetzt zu werden braucht. Die Behauptung ist: *u verschwindet identisch für alle Punkte, für welche der charakteristische Kegel,* wie in Abb. 36, *durch die Fläche C zu einem Gebiet G abgeschlossen wird.* Der charakteristische Kegel ist der Kegel im x, y, t-Raum, dessen Seitenlinien gegen die Ebene $t = 0$ einen Neigungswinkel von 45° haben, d. h. charakteristische Strahlen sind.

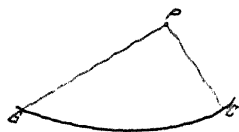



Abb. 36.

Zum Beweise gehen wir aus von der Identität

$$2 u_t L[u] = -2(u_t u_x)_x - 2(u_t u_y)_y + (u_x^2)_t + (u_y^2)_t + (u_t^2)_t. \tag{2}$$

Integrieren wir diese Gleichung über das Gebiet G, so ergibt sich, da rechts ein Divergenzausdruck steht, nach dem Gauss'schen Integralsatz wegen der Anfangsbedingung

$$0 = \iint_M (u_x^2 t_\nu + u_y^2 t_\nu + u_t^2 t_\nu - 2 u_t u_x x_\nu - 2 u_t u_y y_\nu)\, do$$

$$= \iint_M \frac{1}{t_\nu} \left((u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2 + (u_y t_\nu - u_t y_\nu)^2\right) do,$$

---

[1] Die Methode dieses Paragraphen ist ZAREMBA zuzuschreiben: Rendic. Acc. Lincei, Ser. 5, Bd. 14 (1915) S. 904. Sie ist später wiedergefunden und erweitert worden von RUBINOVICZ: Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 30 (1920) S. 65 ff. und Phys. Ztschr. Bd. 27 (1926) S. 707 ff.; sowie FRIEDRICHS u. LEWY: Math. Ann. Bd. 98 (1928) S. 192 ff.

wobei M den zur Begrenzung von G gehörige Teil des Kegelmantels mit dem Flächenelement $d\,o$ bedeutet und auf M die Relation $t_\nu^2 - x_\nu^2 - y_\nu^2 = 0$ berücksichtigt ist. Es muß somit das letzte Integral über dem Kegelmantel und daher der Integrand verschwinden; d. h. es ist auf M überall $u_x t_\nu - u_t x_\nu = 0$ und $u_y t_\nu - u_t y_\nu = 0$, also verschwinden auf M zwei linear unabhängige innere Ableitungen von u. Es muß also dort u konstant und wegen der Anfangsbedingung identisch Null sein, woraus das Verschwinden von u im Punkt P folgt, wie behauptet wurde.

Gleichzeitig gibt diese Betrachtung wiederum das *Abhängigkeitsgebiet* für unsere Differentialgleichung in folgendem Sinn: *Die Werte einer Lösung u im Punkt P bei vorgeschriebenen Anfangswerten auf C hängen nur von den Anfangswerten in demjenigen Teil von C ab, welcher aus C durch den charakteristischen Kegel durch P ausgeschnitten wird.*

Entsprechend erledigt sich die Frage nach Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet für drei und mehr Raumdimensionen nach dem Muster von Kapitel V für die allgemeine Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u + a u_x + b u_y + c u_t + d u = 0,$$

wobei die Koeffizienten a, b, c, d beliebige stetige Funktionen von t und den Raumvariablen sein können.

Wir beweisen noch die *Eindeutigkeit für das „charakteristische Anfangswertproblem der Wellengleichung“*. Bei diesem Anfangswertproblem sind Anfangswerte nicht mehr längs einer raumartigen Anfangsmannigfaltigkeit mit $\varphi_t^2 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2 > 0$ gegeben, sondern längs einer speziellen charakteristischen Mannigfaltigkeit, nämlich längs eines charakteristischen Halbkegels K:

$$(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0. \qquad (t \geqq t_0) \tag{3}$$

Hier aber können wir in Übereinstimmung mit unseren früheren Überlegungen nicht mehr willkürlich die Funktion u und eine herausführende Ableitung (d. h. alle Ableitungen) vorgeben, sondern müssen uns mit der Vorgabe der Funktion u selbst begnügen. Diese Anfangswerte seien dabei gegeben als diejenigen Werte, welche eine in einer Umgebung des Kegelmantels, einschließlich der Spitze stetig differenzierbare Funktion auf dem Kegelmantel annimmt. Wir zeigen: *Durch die Vorgabe von u auf dem durch* (3) *definierten Halbkegel K ist u überall im Innern des Halbkegels*, d. h. für $(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 > 0$ und $t > t_0$ *in eindeutiger Weise bestimmt*. Der Beweis folgt aus unseren obigen Formeln.

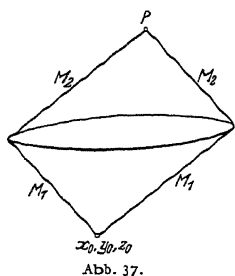



Abb. 37.

Nehmen wir nämlich an, die Anfangswerte u einer Lösung verschwinden auf dem charakteristischen Kegel und integrieren den Ausdruck (2) über ein Gebiet G, das einerseits von diesem Kegel, andererseits von dem charak-

teristischen Kegel durch P begrenzt wird, und nennen M_1 bzw. M_2 die Teile der entsprechenden Kegelmäntel, so erhalten wir mit den obigen Bezeichnungen sofort wieder

$$\iint_{M_1} \frac{1}{t_\nu}\left((u_x t_\nu - u_t x_\nu)^2 + (u_y t_\nu - u_t y_\nu)^2\right) do = 0.$$

Denn das Integral über den unteren Kegelmantel verschwindet, weil in dem Integranden lauter innere Ableitungen von u auf diesem Kegelmantel stehen, die wegen der Voraussetzung sämtlich Null sind. Also verschwinden auch die voneinander unabhängigen inneren Ableitungen $u_x t_\nu - u_t x_\nu$; $u_y t_\nu - u_t y_\nu$ auf dem zu P gehörigen Kegelmantel; d. h. u ist auf diesem Mantel konstant und daher Null, weil u auf dem Schnitt beider Mäntel verschwindet.

2. Die Differentialgleichung $u_{tt} - \Delta u + \frac{\lambda}{t} u_t = 0$ (Darboux). Ein anderes, später (§ 6) verwendetes Beispiel für unsere Methode mit einer etwas anderen Variante der Schlußweise bietet das Eindeutigkeitsproblem der nach DARBOUX genannten Differentialgleichung

$$L[u] = u_{tt} + \frac{\lambda}{t} u_t - \Delta u = 0, \tag{4}$$

wobei λ eine beliebige nicht negative, stetig differenzierbare Funktion der Variablen x_i und t sein darf. Wiederum ist die charakteristische Gleichung durch

$$\varphi_t^2 - \varphi_{x_1}^2 - \cdots - \varphi_{x_m}^2 = 0 \tag{5}$$

oder

$$\left(\frac{\partial t}{\partial \nu}\right)^2 - \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2 = 0 \tag{5'}$$

gegeben, und die charakteristischen Kegel $\varphi(x,t) = (t-\tau)^2 - \sum_{i=1} (x_i - \xi_i)^2 = 0$ sind dieselben wie in Nr. 1. Wir zeigen: *Wenn auf der Grundfläche B in der Ebene $t = 0$ eines charakteristischen Kegels mit der Spitze in P $(t > 0)$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung u unserer Differentialgleichung* (4) *und ebenso die Ableitung u_t verschwindet, so verschwindet u in P und überall im Inneren G des Kegels.*

Beweis: Es wird

$$0 = -2u_t L[u] = 2\sum_{i=1}(u_t u_{x_i})_{x_i} - \left(\sum_{i=1} u_{x_i}^2 + u_t^2\right)_t - \frac{2\lambda}{t} u_t^2$$

und daher, wenn wir über das Gebiet G mit dem Volumenelement $d\tau$ integrieren, die Anfangsbedingung auf B berücksichtigen und auf den Divergenzausdruck rechts den Gauss'schen Integralsatz anwenden

$$= \iiint \frac{2\lambda}{t} u_t^2 \, d\tau$$

$$+ \iint \left(-2u_t \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \nu} + u_t^2 \frac{\partial t}{\partial \nu} + \sum_{i=1} u_{x_i}^2 \frac{\partial t}{\partial \nu}\right) do,$$

wo M den Mantel des Kegels, do das Oberflächenelement auf M bedeuten. Den Integranden des Integrals über M können wir in der Form schreiben

$$\frac{1}{t_\nu}\sum^{m}\left(u_{x_i}\frac{\partial t}{\partial \nu}-u_t\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)^2,$$

wobei auf M die Charakteristikenrelation (5') berücksichtigt ist. Wegen $\lambda \geqq 0$ folgt nunmehr unmittelbar überall in G die Beziehung $u_t = 0$. Es wird also, wie behauptet wurde, u identisch Null in G.

3. Maxwellsche Gleichungen im Äther. Als erstes Beispiel eines Systems von Differentialgleichungen mit vier unabhängigen Veränderlichen betrachten wir wiederum das System der Maxwellschen Gleichungen[1] (vgl. Kap. III, § 4), wobei wir die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ setzen:

$$(6) \qquad \mathfrak{E}_t - \operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0; \qquad \mathfrak{H}_t + \operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0.$$

Wir betrachten für dies Differentialgleichungssystem das Anfangswertproblem speziell für die Ebene $t = 0$, wobei dann die Anfangswerte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ vorgegeben sein sollen. Unser Ziel ist zu beweisen: *Wenn die Anfangswerte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verschwinden, so verschwinden die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ identisch.*

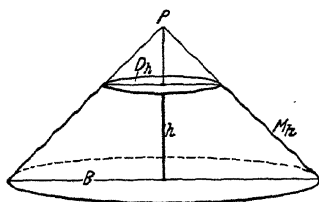



Abb. 38.

Zu irgendeinem Punkt P des vierdimensionalen x, y, z, t-Raumes gehört der charakteristische Kegel, welcher aus der Anfangsebene $t = 0$ eine dreidimensionale Kugel B ausschneidet. Durch eine Parallelebene $t = h$ schneiden wir aus diesem vierdimensionalen Kegel G einen Kegelstumpf G_h aus (vgl. Abb. 38) begrenzt von B, einem Stück M_h des Kegelmantels und dem kugelförmigen Randstück D_h auf $t = h$. Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt

$$0 = 2\,\mathfrak{E}(\mathfrak{E}_t - \operatorname{rot}\mathfrak{H}) + 2\,\mathfrak{H}(\mathfrak{H}_t + \operatorname{rot}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)_t + 2\operatorname{div}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]$$

wegen der bekannten Vektorrelation $\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{E} - \mathfrak{E}\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \operatorname{div}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]$. Nunmehr integrieren wir über G_h bei festem t nach x, y, z und dann nach t zwischen den Grenzen 0 und h. Dabei ergibt sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$ auf $t = 0$ sofort

$$(7) \quad \iiint\limits_{M_h}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\,t_\nu\,do + 2\iiint\limits_{M_h}[\mathfrak{E}\times\mathfrak{H}]\,\mathfrak{x}_\nu\,do + \iiint\limits_{D_h}(\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2)\,dx\,dy\,dz = 0,$$

wobei mit $\mathfrak{x}_\nu$ der Normalenvektor im dreidimensionalen x, y, z-Raum auf der Kugel mit dem Radius t um die Projektion von P und mit

[1] Zu den Maxwellschen Gleichungen gehören noch die zusätzlichen Relationen

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Man zeigt leicht, daß diese Relationen auf Grund von (6) überall bestehen, wenn sie im Anfangsraume $t = 0$ bestehen.

$t_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ die t-Komponente der Normalen auf M_h bezeichnet wird.

Auf dem Kegelmantel M_h ist gemäß der Charakteristikenbedingung $t_\nu^2 = \mathfrak{x}_\nu^2$, also wird dort

$$(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, t_\nu^2 + 2\, t_\nu\, \mathfrak{x}_\nu [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}] = \mathfrak{E}^2 t_\nu^2 + 2\,\mathfrak{E}\, [\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_\nu]\, t_\nu + \mathfrak{H}^2 \mathfrak{x}_\nu^2$$

und hier ist wegen $[\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_\nu]^2 = \mathfrak{H}^2 \mathfrak{x}_\nu^2 - (\mathfrak{H}\, \mathfrak{x}_\nu)^2$ die rechte Seite gleich

$$(\mathfrak{E} t_\nu + [\mathfrak{H} \times \mathfrak{x}_\nu])^2 + (\mathfrak{H}\, \mathfrak{x}_\nu)^2.$$

Somit folgt sofort aus (7):

$$0 = \iiint\limits_{D_h} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{M_h} ((\mathfrak{E}\, t_\nu + [\mathfrak{H} + \mathfrak{x}_\nu])^2 + (\mathfrak{H}\, \mathfrak{x}_\nu)^2)\, do,$$

und daraus, daß auf D_h und also überall in G identisch $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$ gilt, was zu beweisen war. Gleichzeitig zeigt unsere Betrachtung wiederum: *Das Abhängigkeitsgebiet bei unserem Anfangswertproblem wird durch den charakteristischen Kegel gegeben,* d. h. *die Werte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Punkt P können lediglich von denjenigen Anfangswerten abhängen, welche zu dem aus $t = 0$ vom charakteristischen Kegel ausgeschnittenen Kugelgebiet B gehören.*

4. Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet bei den Differentialgleichungen der Krystalloptik. Für die Differentialgleichungen der Krystalloptik (12) aus § 3 wollen wir folgenden Satz beweisen, welcher die Frage nach Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet beim Anfangswertproblem beantwortet. *Durch einen Punkt P des vierdimensionalen x, y, z, t-Raumes ziehe man die konvexe Hülle des Strahlenkegels der Krystalloptik. B sei das Gebiet, welches durch diesen Kegel aus der Ebene $t = 0$ ausgeschnitten wird* (d. h. B ist die konvexe Hülle der entsprechenden mit einem Faktor vergrößerten Strahlenfläche). *Sind in B die Anfangswerte des Vektors $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_t$ Null, so verschwindet $\mathfrak{E}$ im Punkt P.*

Zum Beweise kombinieren wir die drei Differentialgleichungen (12) des § 3 mit den Faktoren $2\dot{u}_1, 2\dot{u}_2, 2\dot{u}_3$. Wir erhalten dann

$$(\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2)_t - 2\,\dot{\mathfrak{E}}(\Delta\, \mathfrak{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{E}) = 0$$

oder

$$(\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2)_t = -2\,\dot{\mathfrak{E}} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E}$$
$$= -(\operatorname{rot} \dot{\mathfrak{E}} \operatorname{rot} \mathfrak{E})_t - 2 \operatorname{div} [\operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \dot{\mathfrak{E}}],$$

wobei die Vektorformel $\mathfrak{b} \operatorname{rot} \mathfrak{a} - \mathfrak{a} \operatorname{rot} \mathfrak{b} = \operatorname{div} [\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}]$ benutzt ist. Wiederum schneiden wir durch eine Ebene $t = h$ aus dem projizierenden Strahlenhüllkegel G einen Kegelstumpf G_h ab, begrenzt von den beiden zueinander ähnlichen parallelen ebenen Flächen B und D_h und dem Stück M_h des Kegelmantels M. Wir integrieren unsere obige Gleichung über G_h, wobei wir zunächst die Integration nach x, y, z bei festem t und dann die Integration nach t vornehmen. Bezeichnen wir wieder mit do das Oberflächenelement auf M_h, mit $\mathfrak{x}_\nu$, den zu M normalen Vektor im x, y, z-Raum (jeweils bei festem t), mit $\mathfrak{x}_\nu, t_\nu$ die Normalenkomponenten des Einheitsvektors auf M_h, so wird

$$(8) \quad \iint\limits_{M_h} \frac{1}{t_\nu} \{ (\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2)\, t_\nu^2 + 2\, [\operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \dot{\mathfrak{E}}]\, \mathfrak{x}_\nu t_\nu + (\operatorname{rot} \mathfrak{E})^2 t_\nu^2 \}\, do$$
$$+ \iiint\limits_{D_h} (\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2 + (\operatorname{rot} \mathfrak{E})^2)\, dx\, dy\, dz = 0\,.$$

Den Integranden A des ersten Integrals formen wir mit Hilfe der Formel $[\operatorname{rot} \mathfrak{E} \times \dot{\mathfrak{E}}]\, \mathfrak{x}_\nu = [\dot{\mathfrak{E}} \times \mathfrak{x}_\nu] \operatorname{rot} \mathfrak{E}$ um. Es wird also

$$A = (\sigma_1 \dot{u}_1^2 + \sigma_2 \dot{u}_2^2 + \sigma_3 \dot{u}_3^2)\, t_\nu^2 + (t_\nu \operatorname{rot} \mathfrak{E} + [\dot{\mathfrak{E}} \times \mathfrak{x}_\nu])^2 - [\dot{\mathfrak{E}} \times \mathfrak{x}_\nu]^2$$

oder in Komponenten geschrieben, mit $\mathfrak{x}_\nu = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$; $t_\nu = \tau$

$$A = \tau^2 \sum_i \sigma_i \dot{u}_i^2 - \sum_i \xi_i^2 \sum \dot{u}_i^2 + (\sum_i \xi_i \dot{u}_i)^2 + (t_\nu \operatorname{rot} \mathfrak{E} + [\dot{\mathfrak{E}} \times \mathfrak{x}_\nu])^2$$
$$= Q + (t_\nu \operatorname{rot} \mathfrak{E} + [\dot{\mathfrak{E}} \times \mathfrak{x}_\nu])^2.$$

Dabei ist Q eine quadratische Form in den drei Größen $\dot{u}_i = \lambda_i$, welche wir in der Form

$$Q = \tau^2 \sum_i \sigma_i \lambda_i^2 - \varrho^2 \sum_i \lambda_i^2 + (\sum_i \lambda_i \xi_i)^2$$

mit

$$\varrho^2 = \sum \xi_i^2$$

schreiben. Wir wollen zeigen: *Auf der konvexen Hülle des Strahlenkegels gilt* $Q \geqq 0$. Dann folgt aber aus unserer obigen Relation (8) auf D_h sofort

$$\sum_{i=1}^{3} \sigma_i \dot{u}_i^2 = 0,$$

also wegen der Anfangsbedingungen $u_i = 0$, also $\mathfrak{E} = 0$ auf D_h, d. h. überall im Innern unseres Kegels. Hiermit ist der gewünschte Beweis erbracht.

Wir haben also lediglich noch unseren Hilfssatz: $Q \geqq 0$ auf M_h, zu beweisen. Dieser ergibt sich leicht aus folgender Betrachtung: Es sei $\tau^2 = \varkappa$ das Maximum der quadratischen Form $\varrho^2 \sum \lambda^2 - (\sum \lambda_i \xi_i)^2$ unter der Nebenbedingung $\sum \sigma_i \lambda_i^2 = 1$. Der Wert dieses Maximums ist gemäß der elementaren Eigenwerttheorie nichts anderes als die größte der Wurzeln τ^2 der Determinantengleichung $\| Q \| = 0$ bei gegebenem ξ_1, ξ_2, ξ_3; dabei bezeichnet $\| Q \|$ die Determinante der quadratischen Form Q. Nun beachten wir, daß die Gleichung des Normalenkegels gegeben war durch $\| Q \| = 0$. Eine der Wurzeln ist also die triviale Wurzel Null, und die größere der beiden Wurzeln bei festem ξ_1, ξ_2, ξ_3 definiert den inneren Mantel des Normalenkegels. Auf diesem Mantel ist somit

$$\varrho^2 \sum \lambda_i^2 - (\sum \lambda_i \xi_i)^2 - \tau^2 \sum \sigma_i \lambda_i^2 \leqq 0$$

und da diesem Mantel bei der Reziprokaltransformation die konvexe Hülle des Strahlenkegels entspricht, so ist unser Hilfssatz bewiesen.

Diese letzte Betrachtung ist, wie hier hervorgehoben sei, ohne weiteres verallgemeinerungsfähig und kann dazu dienen, den hier gegebenen

Eindeutigkeitsbeweis auf beliebige total hyperbolische Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auszudehnen.

5. Bemerkungen über Abhängigkeits- und Wirkungsgebiete. Notwendigkeit des konvexen Charakters von Abhängigkeitsgebieten. Nochmals sei bemerkt, daß der Begriff des *Abhängigkeitsgebietes* mit dem Begriff des *Wirkungsbereiches* verbunden ist (vgl. Kap. V, § 3). *Abhängigkeitsbereich zu einem Punkt* P ist derjenige Bereich der Anfangswerte, welcher auf die Lösung des Problems in einem Punkt P Einfluß hat. *Wirkungsbereich eines Anfangsgebietes* B ist die Gesamtheit aller derjenigen Punkte P, für welche das Abhängigkeitsgebiet Punkte mit B gemeinsam hat. Wir erhalten gemäß unserer Eindeutigkeitsbetrachtung die Wirkungsbereiche eines Anfangsgebietes B als die Vereinigung aller konvexen Hüllen der Strahlenkegel mit Spitze in B.

Die Tatsache, daß wir in unserer Betrachtung über Eindeutigkeit und Abhängigkeitsgebiet bei dem für höhere Fälle typischen Problem der Krystalloptik nicht den Strahlenkegel selbst, sondern seine konvexe Hülle zugrunde legen müssen, läßt sich durch folgende Betrachtung noch genauer beleuchten. Wir setzen voraus, daß wir ein Anfangswertproblem mit folgenden Eigenschaften vor uns haben. Die Lösung $u(S)$ in einem Punkt S des x, t-Raumes sei nur abhängig von Werten zur Zeit $r < t$ in einem Gebiet B_r, welches durch einen Kegel mit Spitze in S aus der Ebene $t = r$ ausgeschnitten wird, dessen Form und Orientierung von S unabhängig ist. *Unter dieser Voraussetzung muß das Gebiet B_r konvex sein.* Zum Beweise beachten wir, daß alle Gebiete B_r einander ähnlich sind; wir bezeichnen das Gebiet B_0 mit B. Ist P irgendein Punkt in B und S' irgendein Punkt auf dem Strahl PS, so muß das Abhängigkeitsgebiet B_0' zu S' in B_0 liegen. Die Gebiete B_0 und B_0' sind ähnlich und ähnlich gelegen mit P als Ähnlichkeitszentrum. Wenn nun S' gegen P rückt, dann zieht sich das Gebiet B_0' auf den Punkt P zusammen. Ebenso dehnt sich das Gebiet B_0' auf das Gebiet B_0 aus, wenn S' gegen S rückt. Also kann man einen beliebigen Punkt P von B_0 in einen beliebigen anderen Punkt auf B_0 geradlinig überführen, was die Konvexität von G ausdrückt.

Über einen anderen die Notwendigkeit der Einführung konvexer Hüllen beleuchtenden allgemeinen Satz vgl. Anhang § 2.

§ 5. Hyperbolische lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Wir wollen in diesem Paragraphen, ohne dabei direkt an die Charakteristikentheorie anzuknüpfen, in expliziter Weise das Anfangswertproblem für lineare *Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom hyperbolischen Typus* mit n unabhängigen Veränderlichen lösen und diese Lösungen diskutieren.

Die Wellengleichung mit zwei und drei unabhängigen Veränderlichen haben wir schon früher in Kapitel III, § 6 und auch in Kapitel VI, § 2, 8

behandelt. Hier wird das Wesentliche die Aufstellung allgemeiner Formeln für n Variable sein[1].

Wir schreiben wieder $n = m + 1$ und sehen $x_n = t$ als Zeitvariable an. Gemäß unserer allgemeinen Überlegungen Kapitel III, § 3, 2 genügt es dann, die Differentialgleichung

$$(1) \qquad u_{tt} - \Delta u - c u = 0$$

zu behandeln, wobei c eine Konstante ist. Zunächst werden wir uns auf den Fall $c = 0$, also auf die Differentialgleichung

$$(2) \qquad u_{tt} - \Delta u = 0$$

beschränken, auf die wir nachher den allgemeinen Fall zurückführen können. Wir behandeln das Anfangswertproblem dieser Differentialgleichung (1), wobei als Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = \varphi(x)$$

gegeben sind; dabei schreiben wir, wie auch häufig sonst, zur Abkürzung vielfach x statt des Wertsystems $x_1, \ldots, x_m$ und verstehen unter $\varphi(x)$ eine Funktion, für welche wir voraussetzen, daß sie für ungerade m mindestens $\frac{m+1}{2}$-mal und für gerade m mindestens $\frac{m+2}{2}$-mal stetig differenzierbar ist — diese Voraussetzung wird im Verlauf unserer Rechnungen motiviert werden.

Ist u die Lösung dieses Anfangswertproblems, so ist $v = u_t$ die Lösung eines entsprechenden Anfangswertproblems, wobei $v(x, 0) = \varphi(x)$ und $v_t(x, 0) = 0$ vorgegeben ist. Es genügt also auf Grund des Superpositionsprinzips, die Lösung für das erstgenannte Anfangswertproblem explizite darzustellen, um das Anfangswertproblem für beliebige vorgeschriebene Anfangswerte von u und u_t zu lösen.

Wir werden jetzt zunächst durch ein heuristisches Verfahren mit Hilfe der *Fourierschen Methode* formal die Lösung gewinnen und das Ergebnis nachher verifizieren. (Eine andere Methode zur Gewinnung der Lösung werden wir im § 6 erörtern.) Sodann werden wir die Gestalt der Lösung diskutieren und daraus prinzipielle Folgerungen ziehen, werden ferner aus unseren Resultaten die Lösung auch für das Anfangswertproblem der unhomogenen Differentialgleichung und das der allgemeinen Differentialgleichung (1) bzw. der Telegraphengleichung herleiten. Von vornherein sei daran erinnert, daß die Betrachtungen von § 4 die *eindeutige Bestimmtheit der Lösungen* unseres Anfangswertproblems garantieren.

Für die folgenden Rechnungen ist es zweckmäßig, einige einfache Tatsachen der Integralrechnung in m Dimensionen zusammenzustellen. Es sei $x_1^2 + \cdots + x_m^2 = r^2$ eine Kugel vom Radius r in m Dimensionen

[1] Vgl. Hadamard loc. cit. und die dort angegebene Literatur, insbesondere auch die Arbeiten von Volterra: Acta Math. Bd. 18, und Tedone Annal. di Mat. 3. Serie, Bd. 1, S. 1, wo zuerst explizite Darstellungen angegeben wurden.

mit der Oberfläche O_m und dem Oberflächenelement do_m. Wir setzen $x_i = r\beta_i$. Dabei ist $\beta_1^2 + \cdots + \beta_m^2 = 1$, also β ein Punkt auf der Einheitskugel Ω_m mit dem Flächenelement $d\omega_m$. Die Größe der Oberfläche von Ω_m wird mit ω_m bezeichnet. Dann gilt[1]

$$O_m = r^{m-1}\omega_m; \qquad \omega_m = \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{}$$

und für das Integral einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_m)$ über O_m

$$\underset{O_m}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_m)\, do_m = r^{m-1} \int \cdots \int f(r\beta_1, \ldots, r\beta_m)\, d\omega_m,$$

wobei das Integral rechts über die Oberfläche der Einheitskugel Ω_m zu erstrecken ist. Es gelten die folgenden Umformungen

$$\int_{O_m} \cdots \int f\, do_m = \int_{\varrho \leq r} \cdots \int f(x_1, \ldots, x_m) \frac{dx_1, \ldots, dx_{m-1}}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}},$$

wobei $\varrho^2 = x_1^2 + \cdots + x_{m-1}^2$ gesetzt ist und das Integral rechts über das Innere der $(m-1)$-dimensionalen Kugel $\varrho = r$ zu erstreckt wird. Ferner können wir schreiben:

$$\underset{O_m}{\int \cdots \int} f\, do_m = r^{m-1} \int_{-1}^{1} (1-\beta_m^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta_m \int \cdots \int f(r\beta_1, \ldots, r\beta_m)\, d\omega_{m-1},$$

wobei rechts das innere Integral über die Oberfläche der $(m-1)$-dimensionalen Einheitskugel Ω_m zu erstrecken ist.

Hängt speziell f nur von einer Variabeln, z. B. von x_m ab, so wird

$$\underset{O_m}{\int \cdots \int} f\, do_m = \omega_{m-1} r^{m-1} \int_{-1}^{1} f(r\beta_m)\, (1-\beta_m^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta_m.$$

1. Konstruktion der Lösung. Gemäß der allgemeinen in Kapitel III, § 6, 3 entwickelten Idee versuchen wir die gesuchte Lösung unseres Anfangswertproblems in der folgenden Form darzustellen

$$(3) \qquad u = \int_{}^{\infty} \cdots \int A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\, e^{i(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m)} \sin \varrho t\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_m,$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\varrho = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2}$$

setzen. Die Anfangsbedingung für $t = 0$ liefert uns, wenn wir hier wie auch später unbekümmert Differentiation unter dem Integralzeichen und andere Vertauschungsoperationen vornehmen, deren Berechtigung sich durch Verifikation des Resultates ergeben wird,

$$\varphi(x) = \int_{}^{\infty} \cdots \int \varrho A(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\, e^{i(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_m.$$

[1] Vgl. COURANT: Differential- und Integralrechnung II, 2. Aufl., S. 245ff.

Für die zu bestimmende Funktion $A(\alpha)$ ergibt nunmehr die Fouriersche Umkehrformel unmittelbar

$$(4)\qquad \varrho A = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \varphi(\xi_1,\ldots,\xi_m)\, e^{-i(\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_m\xi_m)}\, d\xi_1\ldots d\xi_m.$$

Tragen wir für A diesen Ausdruck in den Ansatz (3) ein und vertauschen die Integrationen, so würde sich formal ergeben

$$u = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \varphi(\xi)\, d\xi_1\ldots d\xi_m \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int e^{i[\alpha_1(x_1-\xi_1)+\cdots+\alpha_m(x_m-\xi_m)]}\frac{\sin\varrho t}{\varrho}\, d\alpha_1\ldots d\alpha_m.$$

Jedoch konvergiert hier das innere Integral für $m > 2$ nicht, da bei Einführung von Polarkoordinaten $d\alpha_1\ldots d\alpha_m = \varrho^{m-1}d\omega_m d\varrho$ wird, wobei $d\omega_m$ das Flächenelement der m-dimensionalen Einheitskugel bedeutet. Dieser formalen Schwierigkeit entgehen wir durch folgenden Kunstgriff. Wir betrachten bei ungeradem $m \geqq 3$ den Ausdruck

$$(5)\qquad v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \frac{A(\alpha)}{\varrho^{m-2}}\, e^{i(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_mx_m)}\cos\varrho t\, d\alpha_1\ldots d\alpha_m,$$

bei geradem $m \geqq 2$ den Ausdruck

$$(5')\qquad w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \frac{A(\alpha)}{\varrho^{m-2}}\, e^{i(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_mx_m)}\sin\varrho t\, d\alpha_1\ldots d\alpha_m.$$

Dabei gilt formal bei ungeradem $m \geqq 3$:

$$u(x,t) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}v(x,t)$$

und bei geradem $m \geqq 2$:

$$u(x,t) = (-1)^{\frac{m-2}{2}}\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}w(x,t).$$

Für diese neuen Ausdrücke v und w konvergieren nunmehr die inneren Integrale, und es ergibt sich sowohl für ungerades m wie gerades m als Resultat:

$$(6)\qquad u = \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int \varphi(x_1+\xi_1,\ldots,x_m+\xi_m)\, K_m(r,t)\, d\xi_1\ldots d\xi_m,$$

wobei $r = \sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_m^2}$ gesetzt ist und K_m den Wert

$$(7)\qquad K_m(r,t) = \begin{cases} \dfrac{\pi\,\omega_{m-1}}{(2\pi)^m r}\left(\dfrac{t^2}{r^2}-1\right)^{\frac{m-3}{2}} & (\text{für } r < t)\\[2ex] 0 & (\text{für } r > t)\end{cases}$$

besitzt

Wir begnügen uns, den Beweis für ungerades m zu führen, da er für gerades m ähnlich verläuft und im übrigen nachher das Resultat

auf gerade m übertragen werden wird. Zunächst führen wir statt $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ Polarkoordinaten $\varrho = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_m^2}$ und $\beta_1, \ldots, \beta_m$ mit

$$\beta_1^2 + \cdots + \beta_m^2 = 1$$

ein, d. h. Parameter β_ν auf der m-dimensionalen Einheitskugel. Es wird dann nach Einsetzung von (4) in (5):

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \varphi(x_1 + \xi_1, \ldots, x_m + \xi_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m$$

$$\frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int \frac{e^{-i(\alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_m \xi_m)} \cos \varrho t}{\varrho^{m-1}}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_m,$$

und hier läßt sich das innere Integral in der Form schreiben

$$(8) \qquad S_m(r, t) = \frac{\omega_m}{(2\pi)^m} \int_0^{\infty} M(\varrho r) \cos \varrho t \, d\varrho,$$

wobei $M(r)$ der Mittelwert

$$(9) \qquad M(r) = \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int e^{i(\beta_1 \xi_1 + \cdots + \beta_m \xi_m)}\, d\omega_m, \qquad r = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2}$$

über die Oberfläche der m-dimensionalen Einheitskugel ist. Wegen der Orthogonal-Invarianz dieses Integrals können wir zu seiner Berechnung $\xi_1 = r$, $\xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_m = 0$ setzen und erhalten

$$M(r) = \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int e^{i \beta_1 r}\, d\omega_m,$$

also

$$(10) \qquad M(r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_0^1 (1 - \beta_1^2)^{\frac{m-3}{2}} e^{i\beta_1 r}\, d\beta_1 \text{[1]}.$$

In (8) setzen wir nunmehr $\varrho r = s$ und erhalten

$$S_m(r, t) = \frac{\omega_m}{(2\pi)^m r} \int M(s) \cos s \frac{t}{r}\, ds = \frac{\omega_m}{2(2\pi)^m r} \int M(s)\, e^{i s \frac{t}{r}}\, ds$$

oder wegen (10) nach einfacher Umformung

$$S_m(r, t) = \frac{\omega_{m-1}}{(2\pi)^m r} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-1}^{1} (1 - \beta_1^2)^{\frac{m-3}{2}} \frac{\sin \lambda \left(\beta_1 + \frac{t}{r}\right)}{\beta_1 - \frac{t}{r}}\, d\beta_1.$$

[1] Vgl. COURANT, Differential- und Integralrechnung II, a. a. O. Nach COURANT-HILBERT I, S. 418 ergibt sich daher beiläufig

$$M(r) = 2^{\frac{m-2}{2}}\, \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \frac{J_{\frac{m-2}{2}}(r)}{r^{\frac{m-2}{2}}}.$$

Auf Grund der elementaren Eigenschaften des hier rechts stehenden Dirichletschen Integrals (vgl. Bd. I, S. 66) wird nun [1]

$$(11)\qquad S_m(r,t) = \begin{cases} \dfrac{\pi\,\omega_{m-1}}{(2\pi)^m r}\left(1-\dfrac{t^2}{r^2}\right)^{\frac{m-3}{}} & (r>t) \\ 0 & (r<t) \end{cases}$$

Nunmehr erhalten wir für v die Darstellung

$$v = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\dots\!\int \varphi(x_1+\xi_1,\dots,x_m+\xi_m)\,S_m(r,t)\,d\xi_1\dots d\xi_m.$$

Führen wir Polarkoordinaten

$$r=\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_m^2},\qquad \beta_1,\dots,\beta_m$$

ein und setzen zur Abkürzung für den Mittelwert der Funktion φ auf der Kugel mit dem Radius r um den Punkt x

$$(12)\qquad Q(x_1,\dots,x_m;r) = \frac{1}{\omega_m}\int\dots\int\varphi(x_1+\beta_1 r,\dots,x_m+\beta_m r)\,d\omega_m$$
$$= \frac{1}{\omega_m}\int\dots\int\varphi(x+\beta r)\,d\omega_m,$$

so wird

$$v = \omega_m\int_0^{\infty} Q(x,r)\,r^{m-1}S_m(r,t)\,dr$$

oder ausgeschrieben

$$v = \frac{v_{m-1}\,\omega_m}{(2\pi)\,m}\int_0 (r^2-t^2)^{\;\;2}\; r\,Q(x,r)\,dr.$$

Beachten wir, daß der Ausdruck

$$\int_t^{\infty}(r^2-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\,r\,Q(x,r)\,dr$$

bei ungeradem $m\geqq 3$ ein Polynom $(m-3)^{\text{ten}}$ Grades in t ist, dessen $(m-2)^{\text{te}}$ Ableitung nach t daher verschwindet, so ergibt sich für

$u = (-1)^{\overline{\;\;2\;\;}}\;\dfrac{}{\partial t^{m-2}}\,v$ die Darstellung

$$u(x,t) = C_n\,\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\int (t^2-r^2)^{\;\;2}\; r\,Q(x,r)\,dr,$$

die mit (6) identisch ist. Die Konstante C_m findet man entweder aus unseren obigen Formeln oder noch einfacher, indem man $\varphi=1$, $u=t$ spezialisiert, wobei $Q=1$ wird. Es ergibt sich $C=\dfrac{}{(m-2)!}$. Somit er-

[1] Man beachte, daß $S=0$ für $r>t$ gilt, während in (7) der Ausdruck $K_m(r,t)$ für $r>t$ identisch verschwindet.

halten wir die gesuchte Auflösungsformel für unser Anfangswertproblem:

$$(13)\qquad u(x,t) = \frac{1}{(m-2)!}\,\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}}\, r\, Q(x,r)\, dr.$$

Genau dieselbe Formel erhalten wir, wenn wir von dem Ansatz (5′) ausgehen, auch für gerades m. Die Rechnungen verlaufen hier jedoch, obwohl im Prinzip analog, etwas umständlicher. Wir ziehen daher vor, die Formel (13) vermöge der „Absteigemethode" auf den Fall gerader Dimensionszahl zu übertragen, wie wir in der nächsten Nummer ausführen wollen.

2. Bemerkungen über die Absteigemethode. Die insbesondere von HADAMARD[1] in ihrer Wichtigkeit betonte *Absteigemethode* beruht auf dem einfachen Gedanken, daß man aus der Lösung unseres Problems für m unabhängige Raumvariable durch Spezialisierung die Lösung für $m-1$ oder weniger Raumvariable erhalten kann, wobei man also gewissermaßen von dem höheren Problem zu dem niederen absteigt. Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes können wir aus der Auflösungsformel für m Raumvariable die Auflösungsformel für $m-1$ Raumvariable erhalten, indem wir in der ersten Formel die Voraussetzung einführen, daß die Anfangsfunktion $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ nicht mehr von der Variablen x_m abhängt. Dann wird auch die entsprechende Lösung u nicht mehr von x_m abhängen und somit das Anfangswertproblem für $m-1$ Raumvariable lösen. Ebenso können wir von m Raumvariablen zu $m-2$ Raumvariablen absteigen, indem wir in der Formel (13) die Voraussetzung einführen, daß φ nur noch von $x_1, \ldots, x_{m-2}$ abhängt, usw.

Naturgemäß erwarten wir, daß bei diesem Absteigeprozeß die Formel (13) von selbst in die genau entsprechende Formel übergeht, die wir bei Ersetzung von m durch $m-1$ bzw. durch $m-2$ erhalten. Diese Tatsache wollen wir nunmehr verifizieren.

Wir ersetzen dabei m durch $m+1$ und betrachten in einer Funktion von nur m Variablen $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ den Mittelwert im $m+1$ dimensionalen Raum

$$\varrho_{m+1}(x_1, \ldots, x_m; r) = \frac{1}{\omega_{m+1}} \int \cdots \int \varphi(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r)\, d\omega_{m+1};$$

wegen

$$\varrho_{m+1}(x,r) = \frac{2}{\omega_{m+1}}\,\frac{1}{r^{m-1}} \int \cdots \int_{\varrho \leq r} \frac{\varphi(x_1 + \alpha_1, \ldots, x_m + \alpha_m)}{\sqrt{r^2 - \varrho^2}}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_m$$

und

$$\omega_m = \frac{2(\sqrt{\pi})^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

[1] Vgl. wieder HADAMARD: Lectures on Cauchy's Problem, New Haven 1923 und die erweiterte französische Ausgabe: Problème de CAUCHY. Paris 1932. Siehe auch Kap. III, § 6,5.

wird nunmehr

$$(14)\qquad Q_{m+1}(x, r) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\, r^{m-1}} \int^{r} \frac{\varrho^{m-1} Q_m(x, \varrho)}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\, d\varrho,$$

wobei mit

$$Q_m(x, r) = \frac{1}{\omega_m}\int\cdots\int \varphi(x_1+\beta_1 r, \ldots, x_m+\beta_m r)\, d\omega_m$$

der entsprechende Mittelwert von φ im m-dimensionalen Raum bezeichnet wird. Ebenso erhält man in nunmehr selbstverständlicher Bezeichnung

$$Q_m(x, r) = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-2}} \frac{\varrho^{m-2} Q_{m-1}(x, \varrho)}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\, d\varrho,$$

falls die Funktion φ nur von den Variablen $x_1, \ldots, x_{m-1}$ abhängt. Durch Kombination ergibt sich dann

$$Q_{m+1}(x, r) = \frac{4\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\pi\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-1}} \int^{r} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{r^2-\varrho^2}} \int^{\varrho} \frac{s^{m-2} Q_{m-1}(x, s)}{\qquad}\, ds$$

$$= \frac{4\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\pi\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{1}{r^{m-1}} \int s^{m-2} Q_{m-1}(x, s)\, ds \int \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{r^2-\varrho^2}\,\sqrt{\varrho^2-s^2}}.$$

Diese letzte Formel können wir durch die Substitution

$$\varrho^2 - s^2 = z\,(r^2 - s^2$$

und die Relation

$$\int_0 \frac{dz}{\sqrt{z}\,\sqrt{1-z}} = \pi$$

sofort in die Gestalt setzen:

$$(15)\qquad Q_{m+1}(x, r) = \frac{m-1}{r^{m-1}} \int_0^r \varrho^{m-2}\, Q_{m-1}(x, \varrho)\, d\varrho.$$

Die Formeln (14) und (15) bilden die Grundlage für das einmalige bzw. zweimalige Absteigen. Daß bei zweimaligem Absteigen die Auflösungsformel (13) unmittelbar in die entsprechende bei Ersetzung von m durch $m-2$ übergeht, folgt sofort. Das entsprechende Resultat bei einmaligem Absteigen ergibt sich durch folgende kleine Rechnung.

Es wird bei einmaligem Absteigen auf Grund der für $m+1$ gebildeten Formel (13), indem wir für $Q_{m+1}(x,r)$ den Ausdruck (14) einführen:

$$u = C\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} t\int_0^t \varrho^{m-1} Q_m(x,\varrho)\,d\varrho \int_\varrho^t \frac{(t^2-r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2}\sqrt{r^2-\varrho^2}}\,dr,$$

wobei C eine Konstante ist. Vermöge der Substitution

$$\left(1-\frac{\varrho^2}{r^2}\right) = \left(1-\frac{\varrho^2}{t^2}\right)z,$$

wobei wir z statt r als Integrationsvariable einführen, ergibt sich

$$(16)\qquad \int_\varrho^t \frac{(t^2-r^2)^{\frac{m-4}{2}}}{r^{m-2}\sqrt{r^2-\varrho^2}}\,dr = \frac{(t^2-\varrho^2)^{\frac{m-3}{2}}}{2t\varrho^{m-2}}\int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{m-4}{2}}\,dz;$$

somit

$$u = C_m\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\int (t^2-\varrho^2)^{\frac{m-3}{2}}\varrho\, Q_m(x,\varrho)\,d\varrho,$$

wobei die Konstante C_m sich durch Spezialisierung wiederum als $C_m = \frac{1}{(m-2)!}$ ergibt.

Damit ist gezeigt, daß die gewonnenen Lösungen durch Absteigen auf niedere Werte von m ihre Gestalt behalten. Es genügt also tatsächlich, unser Resultat (13) nur für ungerade m zu beweisen, da wir dann zu den geraden Werten von m durch Absteigen gelangen können.

3. Nähere Diskussion der Lösungen. Prinzip von Huyghens. Bevor wir die gewonnenen Ausdrücke als Lösungen unseres Anfangswertproblems verifizieren, wollen wir sie in eine andere Gestalt bringen, welche eine nähere Diskussion ihres Verhaltens gestattet. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst für den Fall ungerader Dimensionszahl m Ausdrücke der Gestalt

$$(17)\qquad U_\lambda(t) = \frac{1}{(2\lambda+1)!}\frac{\partial^{2\lambda+1}}{\partial t^{2\lambda+1}}\int^t (t^2-r^2)^\lambda\, r\, G(r)\,dr, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

wobei wir die hier nicht wesentliche Abhängigkeit der Größen U und G von den Variablen x nicht hervorheben. G möge λ-fach stetig differenzierbar sein. Man beweist leicht die Rekursionsformel

$$(18)\qquad U_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda+1}\left(t U'_{\lambda-1} + 2\lambda U_{\lambda-1}\right).$$

Da

$$U_0 = t\,G(t)$$

ist, so folgt

$$(19)\qquad U_\lambda = t\sum_{\nu=0} a_{\lambda,\nu}\, t^\nu G^{(\nu)}(t),$$

wobei die Größen $a_{\lambda,\nu}$ numerische Konstanten sind. Symbolisch geschrieben, wenn wir mit $P_\nu(t)$ das Polynom

$$P_\lambda(t) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} a_{\lambda,\nu} t^\nu$$

bezeichnen, haben wir

$$U_\lambda(t) = t\ P_\lambda(t\,G)\,, \tag{20}$$

wobei dann Potenzen von G durch die entsprechenden Ableitungen zu ersetzen sind. Unsere Lösung (13) des Anfangswertproblems können wir also jetzt für ungerades $m = 2\lambda + 3$ in der Form schreiben:

$$u = t\ P_{m-3}(t\,G) \tag{21}$$

mit

$$G(t) = Q(x, t) = \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int \varphi\,(x + \beta\,t)\, d\omega_m.$$

Auch für eine gerade Anzahl m von Raumdimensionen können wir aus diesem Resultat gemäß den Bemerkungen von Nr. 2 über die Absteigemethode eine symbolische Darstellung der Lösung gewinnen. In der Tat erhalten wir sofort, wenn wir von der ungeraden Dimensionszahl $m + 1$ auf m absteigen:

$$u = t\,P_{\frac{m-2}{2}}(t\,G)\,, \tag{22}$$

wobei aber nunmehr für G der Ausdruck

$$G = \frac{1}{\omega_{m+1}} \int \cdots \int \varphi(x_1 + \beta_1 t, \ldots, x_m + \beta_m t)\, d\,\omega_{m+1},$$

d. h. nach Nr. 2 der Ausdruck

$$G(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{t^{m-1}} \int^{t} \frac{\ldots(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, d\,r \tag{22'}$$

einzutragen ist. Die Lösung wird also dargestellt durch die Ableitungen nach t dieser Funktion $G(x, t)$ bis zur Ordnung $\frac{1}{2}(m - 2)$.

Wir können aber auch leicht in Analogie zu den Überlegungen bei ungerader Dimensionszahl eine entsprechende Darstellung durch die Ableitungen des Ausdrucks

$$H(x, t) = \int^{t} \frac{r\,Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, d\,r$$

erlangen, welcher sich für $m = 2$ direkt als Lösung einstellt. Zu diesem Zweck setzen wir

$$Z_\lambda = \frac{1}{(2\lambda)!} \frac{\partial^{2\lambda}}{\partial t^{2\lambda}} \int^{t} (t^2 - r^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}\, r\,Q\,(r)\, d\,r \tag{23}$$

und erhalten für Z_ν die Rekursionsformel

$$Z_\lambda = \frac{1}{2\lambda}\left((2\lambda - 1)\, Z_{\lambda-1} + t Z'_{\lambda-1}\right) \tag{24}$$
$$Z_0 = H.$$

Es folgt

$$Z_\lambda = \sum_{\lambda=0} b_{\lambda,\nu}\, t^\nu H^{(\nu)}(t) \tag{25}$$

oder vermöge der Polynome

$$\Pi_\lambda(t) = \sum_{\nu=0}^{\lambda} b_{\lambda,\nu}\, t^\nu$$

symbolisch geschrieben:

$$Z_\lambda = \Pi_\lambda(tH). \tag{26}$$

Die Lösung des Anfangswertproblem bei gerader Dimensionszahl ist somit

$$u = \Pi_{\frac{m-2}{2}}(tH) \tag{27}$$

mit

$$H(x, t) = \int_0^t \frac{r\, Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dr.$$

Die Formeln (21) und (27) zeigen, daß u stetig ist, wenn die Anfangsfunktion bei ungeradem m stetige Ableitungen bis zur Ordnung $\frac{m-2}{2}$, bei ungeradem m stetige Ableitungen bis zur Ordnung $m-3$ besitzt; um die Möglichkeit von zwei weiteren Differentiationen von u zu sichern, wie es die Differentialgleichung (2) verlangt, wollen wir somit bei ungeradem m die Anfangsfunktion φ als $\frac{m+1}{2}$-fach, bei geradem m als $\frac{m+2}{2}$-fach stetig differenzierbar voraussetzen[1].

Unsere Formeln setzen folgende wichtige Tatsache in Evidenz: *Bei den Anfangswertproblemen der Wellengleichung gilt für ungerade Anzahl m von Raumdimensionen das Prinzip von* HUYGHENS, *dagegen gilt dieses Prinzip nicht für gerade Anzahl von Raumdimensionen.* Dabei bedeutet das *Huyghenssche Prinzip*, von welchem hier die Rede ist: *Die Werte der Lösungen hängen nur vom Rand des Abhängigkeitsgebietes in der Ebene $t = 0$ ab,* d. h. nur von den Anfangswerten φ auf dem *Rande der Grundfläche des charakteristischen Kegels, nicht aber im Inneren dieser Grundfläche.*

Wir haben damit das schon für $m = 2$ und $m = 3$ beobachtete verschiedenartige Verhalten der Wellengleichung gegenüber dem Huyghensschen Prinzip[2] als ein allgemeines Gesetz erkannt.

---

[1] Wie weit sie für die Lösbarkeit des Anfangswertproblems unabhängig von unserer Darstellungsformel wirklich notwendig ist, bleibe hier dahingestellt. Vgl. hierzu Anhang § 4.

[2] Von VOLTERRA anscheinend zuerst klar erkannt (vgl. Fußnote S. 386).

Es ist nicht ohne Interesse, daß man die Polynome P und Π in einfacher Weise explizite ausdrücken und dadurch neue Darstellungen für die Lösungen der Anfangswertprobleme finden kann.

Um die Polynome P_λ leicht explizite zu bestimmen, machen wir in dem allgemeinen Ausdruck U_λ die Einsetzung $G(t) = e^t$, dann wird

$$U_\lambda = t\, e^t\, P_\lambda(t).$$

Also folgt aus (18) für P_λ die Rekursionsformel

$$P_\lambda(t) = \frac{1}{2\lambda+1}\left(t\, P'_{\lambda-1} + (2\lambda + 1 + t)\, P_{\lambda-1}\right) \tag{28}$$

mit den Anfangswerten

$$P_0 = 1\,.$$

Wir erhalten so

$$P_0 = 1\,, \qquad P_1 = 1 + \frac{t}{3}, \qquad P_2 = 1 + \frac{9}{15}\,t + \frac{1}{15}\,t^2 \tag{29}$$

Allgemein ist das konstante Glied der Polynome gleich 1. Für die Lösungen unseres Anfangswertproblems ergeben sich in den ersten ungeraden Fällen die folgenden expliziten Formeln

$$\begin{aligned} m = 3:&\quad u = t\, Q(x, t) \\ m = 5:&\quad u = t\, Q(x, t) + \frac{1}{3}\, t^2\, \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} \\ m = 7:&\quad u = t\, Q(x, t) + \frac{9}{15}\, t^2\, \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{15}\, t^3\, \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{30}$$

In analoger Weise bestimmen wir die Polynome Π_λ; wir setzen $H = e^t$ und haben

$$Z_\lambda = e^t\, \Pi_\lambda(t).$$

Für Π_λ entsteht also die Rekursionsformel

$$\begin{cases} \Pi_\lambda = \dfrac{1}{2\lambda}\left(t\Pi'_{\lambda-1} + (2\lambda - 1 + t)\,\Pi_{\lambda-1}\right). \\ \Pi_0 = 1\,. \end{cases} \tag{31}$$

Z. B. berechnet man

$$\Pi_0 = 1\,, \qquad \Pi_1 = \tfrac{1}{2}(1 + t)\,, \qquad \Pi_2 = \tfrac{1}{8}\,(3 + 5\,t + t^2). \tag{32}$$

Allgemein ist dabei die Summe der ersten beiden Koeffizienten $b_{\lambda 0} + b_{\lambda 1} = 1$, woraus leicht folgt, daß die Lösung $u = \Pi_{n-2}(t\, H)$ die richtigen Anfangswerte $u(x, 0) = 0\; u_t(x, 0) = \varphi(x)$ besitzt. Für die ersten geraden Dimensionszahlen ergibt sich also

$$\begin{cases} n = 2: & u = H(x, t) \\ n = 4: & u = \dfrac{1}{2}\left(H + t\,\dfrac{\partial H}{\partial t}\right) \\ n = 6: & u = \dfrac{1}{8}\left(3\, H + 5\, t\,\dfrac{\partial H}{\partial t} + t^2\,\dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2}\right), \end{cases} \tag{33}$$

wobei überall für H der Ausdruck $H = \int\limits^{t} \frac{r\, Q(x, r)}{\sqrt{t^2 - r^2}}\, dr$ einzusetzen ist.

Stellen wir dieselben Lösungen (33) durch die Polynome P_λ dar, so gilt

$$(33')\quad \begin{aligned} n=2:&\quad u=tG, && \text{mit}\quad G=\frac{1}{t}\int_0^t \frac{rQ(x,r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr \\ n=4:&\quad u=tG+\frac{1}{3}t^2\frac{\partial G}{\partial t}, && \text{mit}\quad G=\frac{3}{2t^3}\int_0^t \frac{r^3Q(x,r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr \\ n=6:&\quad u=tG+\frac{9}{15}t^2\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{15}t^3\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} && \text{mit}\quad G=\frac{15}{8}\frac{1}{t^5}\int_0^t \frac{r^5Q(x,r)}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr. \end{aligned}$$

Die Polynome P_λ und Π_λ lassen sich in elementarer Weise darstellen; wir führen zunächst statt U_λ und Z_λ neue Ausdrücke R_λ und S_λ ein durch

$$(34)\quad \begin{aligned} R_\lambda &= \frac{1\cdot 3\ldots 2\lambda+1}{2^\lambda}U_\lambda = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}U_\lambda \\ t\,S_\lambda &= \lambda!\,Z_\lambda. \end{aligned}$$

Die Rekursionsformeln (18) und (24) gehen dann über in

$$(35)\quad \begin{aligned} R_\lambda &= \lambda R_{\lambda-1}+\frac{t}{2}R'_{\lambda-1}=\lambda R_{\lambda-1}+t^2\frac{d}{dt^2}R_{\lambda-1} \\ R_0 &= U_0 = tG \end{aligned}$$

und ebenso

$$(35')\quad \begin{aligned} S_\lambda &= \lambda S_{\lambda-1}+t^2\frac{d}{dt^2}S_{\lambda-1} \\ S_0 &= \frac{1}{t}Z_0=\frac{1}{t}H. \end{aligned}$$

Dabei ist unter $\frac{d}{dt^2}$ der Differentiationsoperator $\frac{1}{2t}\frac{d}{dt}$ zu verstehen. Nun kann man allgemein das Rekursionsproblem (35) lösen durch den Ausdruck $R_\lambda=\left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda(t^{2\lambda}R_0)$. Also ist in unserem Fall

$$(36)\quad \begin{aligned} R_\lambda &= \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda+1}G) \\ S_\lambda &= \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda-1}H). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß sich die Lösung (13) unseres Anfangswertproblems auch in der Form schreiben läßt

$$(37)\quad \begin{aligned} m \text{ ungerade:}&\quad u=\frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{m-3}{2}}(t^{m-2}Q) \\ m \text{ gerade:}&\quad u=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{m-2}{2}}(t^{m-3}H) \end{aligned}$$

oder auch im letzten Fall gemäß der Absteigemethode

$$u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{\frac{m-2}{2}} (t^{m-1} G), \tag{37'}$$

wobei nun für G der Ausdruck (22') einzutragen ist.

Setzen wir in (36) speziell $G = H = e^t$, so ergeben sich für unsere Polynome die Ausdrücke

$$\begin{aligned} P_\lambda(t) &= \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-t}}{2t\,\Gamma\left(\frac{2\lambda+3}{2}\right)} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^\lambda (t^{2\lambda+1} e^t) \\ \Pi_\lambda(t) &= \frac{t\, e^{-}}{\lambda!} \quad [\text{illegible}] \frac{d}{dt^2}\Big) (t^{2\lambda-1} e^t). \end{aligned} \tag{38}$$

Beiläufig bemerkt, lassen sich unsere Polynome auch leicht durch eine *erzeugende Funktion* darstellen; es sei

$$E(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{R_\nu(t)}{\nu!} x^\nu.$$

Für diese Funktion ergibt sich aus der Funktionalgleichung (35) die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1-x) E_x - t^2 \frac{\partial E}{\partial t^2} = E,$$

deren Lösung allgemein

$$E = \frac{1}{1-x} F\left(\frac{t^2}{1-x}\right)$$

lautet. Für $x = 0$ wird $E(0, t) = R_0(t) = F(t^2)$. Also stellt

$$E(x, t) = \frac{1}{1-x} R_0\left(\frac{t}{\sqrt{1-x}}\right) \tag{39}$$

die Lösung unserer Rekursionsformel (35) dar.

Als erzeugende Funktion für die Polynome P_λ ergibt sich hieraus vermöge unserer obigen Bezeichnungen die Funktion

$$E(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2\nu+1)}{2^\nu\, \nu!} P_\nu(t)\, x^\nu = \frac{e^{t\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)}}{(1-x)^{[\text{illegible}]}} \tag{40}$$

In analoger Weise findet man für die Polynome Π_λ die erzeugende Funktion:

$$E(x, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Pi_\nu(t)\, x^\nu = \frac{e^{t\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)}}{\sqrt{1-x}} \tag{41}$$

4. Verifikation der Lösung. Wir wollen nunmehr durch direkte Verifikation den folgenden Satz beweisen: *Es sei $\varphi(x)$ eine für ungerade m*

mindestens $\frac{m+1}{2}$ *mal und für gerade* m *mindestens* $\frac{m+2}{2}$ *mal stetig differenzierbare Anfangsfunktion. Dann ist der Ausdruck*

$$(42)\qquad u = \frac{1}{(m-2)!}\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\, r\, Q(x,r)\, dr$$

mit

$$(43)\qquad Q(x,r) = \frac{1}{\omega_m}\int\cdots\int \varphi(x_1+\beta_1 r,\ldots,x_m+\beta_m r)\, d\omega_m$$

Lösung der Wellengleichung $u_{tt}-\Delta u = 0$ *mit der Anfangsbedingung* $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=\varphi(x)$.

Ebenso wird der Ausdruck

$$(44)\qquad u = \frac{1}{(m-2)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\, r\, Q(x,r)\, dr$$

Lösung der Wellengleichung mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=0.$$

Wir schicken zunächst die folgende Bemerkung voraus: Setzen wir

$$(45)\qquad v = \int\limits_0^t (t^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\, r\, Q(x,r)\, dr$$

und schreiben diesen Ausdruck, indem wir für Q den Wert (43) einführen, in der Form

$$(46)\qquad \begin{aligned} v &= \int\cdots\int\limits_{r\leq t} \varphi(\xi)\, K(r,t)\, d\xi_1\ldots d\xi_m \\ r &= \sqrt{(x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_m-\xi_m)^2} \end{aligned}$$

so erfüllt der Kern

$$K(r,t) = \frac{1}{\omega_m}\frac{(t^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}}{r^{m-2}}$$

unserer Integralformel (46) selbst die Differentialgleichung $K_{tt}-\Delta K = 0$. Er verschwindet für $m>3$ auf der Kugeloberfläche $r=t$ von der Ordnung $\frac{1}{2}(m-3)$.

Wir führen nun den Beweis zunächst unter der Annahme $m \geqq 7$, da wir uns in diesem Fall leicht in dem Ausdruck für v von der Veränderlichkeit des Integrationsgebietes befreien können. Wir denken uns nämlich bei festem ξ den Kern K als identisch Null in den Außenraum der Kugel $r=t$ fortgesetzt. Dann ist wegen $\frac{1}{2}(m-3)\geqq 2$ der Kern K im ganzen ξ-Raum außer im Punkte $x=\xi$ stetig, besitzt stetige Ableitungen erster Ordnung und hat auf der Kugel $r=t$ höchstens sprunghafte Unstetigkeiten in den Ableitungen zweiter Ordnung. Als Funktion von $x_1,\ldots,x_m,t$ betrachtet, genügt also K überall, und zwar

bei beliebigen Parameterwerten $\xi_1, \ldots, \xi_m$ der Differentialgleichung $K_{tt} - \Delta K = 0$.

Daß u die gegebenen Anfangsbedingungen befriedigt, folgt unmittelbar aus den Darstellungen (21) bzw. (22), da, wie wir bemerkten, der erste Koeffizient der Polynome P gleich Eins ist. Es bleibt also nur noch die Differentialgleichung zu verifizieren. Dies geschieht, indem wir zunächst für v das Bestehen der Differentialgleichung $v_{tt} - \Delta v = t^{m-3} \varphi$ beweisen, woraus das gewünschte Resultat durch Differentiation nach t sofort folgt. Gemäß der obigen Bemerkung ist mit dem als identisch Null fortgesetzten Kern K nunmehr

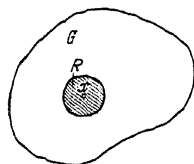



Abb. 39.

$$v = \int \underset{G}{\ldots} \int \varphi(\xi) K(r, t) \, d\xi_1 \ldots d\xi_m,$$

wobei G ein die betrachteten Kugeln $r^2 < t^2$ im Inneren enthaltendes, festes, d. h. von t und x unabhängiges Gebiet ist. Wir betrachten ferner eine kleine, den betrachteten Punkt x enthaltende Kugel R und das Restgebiet $D = G - R$. Die Funktion v zerlegen wir in die Summe $v = y + z$, wobei

$$y = \int \underset{R}{\ldots} \int \varphi K \, d\xi_1 \ldots d\xi_m \qquad z = \int \underset{D}{\ldots} \int \varphi K \, d\xi_1 \ldots d\xi_m$$

ist. Offenbar ist

$$z_{tt} - \Delta z = 0,$$

denn die Differentiation kann für das feste Gebiet D unter dem Integralzeichen vorgenommen werden, und K genügt überall in D der Differentialgleichung. Wir betrachten nun den Ausdruck

$$w = \frac{t^{m-3}}{\omega_m} \int \underset{G}{\ldots} \int \frac{\varphi}{r^{m-2}} \, d\xi_1 \ldots d\xi_m, \tag{47}$$

wobei das Integral auf der rechten Seite konvergiert und infolge der Voraussetzung über φ der Gleichung[1] $\Delta w = -t^{m-3} \varphi$ genügt, und bilden die Differenz

$$y - w = \frac{1}{\omega_m} \int \underset{R}{\ldots} \int \varphi \frac{(t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} - (t^2)^{\frac{m-3}{2}}}{r^{m-2}} \, d\xi_1 \ldots d\xi_m$$

$$= \frac{1}{\omega_m} \int \underset{R}{\ldots} \int \varphi \frac{S(r, t)}{r^{m-2}} \, d\xi_1 \ldots d\xi_m.$$

Hier ist $S(r, t)$ im Bereich R eine nach r und t zweimal stetig differenzierbare Funktion (insbesondere bei ungeradem m ein Polynom). Also dürfen wir den Ausdruck $(y - w)_{tt} - \Delta (y - w)$ durch Differentiation unter dem Integralzeichen bilden (vgl. die Betrachtung in Kap. IV, § 1) und

[1] Vgl. hierzu die Überlegungen von Kapitel IV, § 1, deren Übertragung auf mehr unabhängige Variable selbstverständlich ist.

der nach Differentiation entstehende Integrand bleibt nach Einführung von Polarkoordinaten beschränkt. Somit wird mit $R \to 0$

$$(y - w)_{tt} - \Delta (y - w) \to 0 .$$

Ersichtlich strebt dabei auch der Ausdruck w_{tt} gegen Null. So ergibt sich für $R \to 0$

$$y_{tt} - \Delta\, y \to - \Delta\, w = t^{m-3} \varphi ,$$

und wir erhalten, da bei jedem R die Gleichung $v_{tt} - \Delta v = y_{tt} - \Delta y$ besteht:

$$v_{tt} - \Delta v = t^{m-3} \varphi ,$$

womit die gewünschte Verifikation geleistet ist.

Auf die Fälle $m < 7$ könnten wir die obige Verifikation unmittelbar durch die Absteigemethode übertragen. Indessen müßte man dann die für $m = 7$ benötigte Bedingung, daß φ stetige Ableitungen bis zur $\frac{m+1}{2}$ = vierten Ordnung besitzt, auch für die Fälle niedriger Dimension fordern. Es ist daher vorzuziehen, den obigen Beweis durch eine einfache Zusatzbetrachtung für $m < 7$ zu ergänzen. Setzen wir wieder K in der früheren Weise fort, und zerlegen v in die Summe $v = y + z$, so folgt nunmehr, wie man leicht bestätigt,

$$\begin{aligned} z_{tt} - \Delta z = \int_D \!\cdots\! \int \varphi \, [K_{tt} - \Delta K] \, d\xi_1, \ldots, d\xi_m \\ + \int_{r=t} \!\cdots\! \int \varphi \left[2 (K_r + K_t) + \frac{m-1}{t} K \right] d o , \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral über die Kugelfläche vom Radius $r = t$ um den Punkt x zu erstrecken ist.

Die Rechnung zeigt für alle $m \geqq 2$:

$$2 (K_r + K_t) + \frac{m-1}{t} K = 0; \qquad (r = t)$$

daher ist wie oben $z_{tt} - \Delta z = 0$. Die übrigen Überlegungen verlaufen für $m \geqq 3$ genau wie früher. Im Falle $m = 2$ endlich ist

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_R \!\cdots\! \int \frac{\varphi (\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{t^2 - r^2}} \, d\xi_1 \, d\xi_2 ,$$

und hier ist der Kern $K = \frac{\quad}{2\pi \sqrt{t^2 - r^2}}$ in R überall regulär; es folgt unmittelbar $y_{tt} - \Delta y = 0$.

5. Integration der unhomogenen Gleichung. Zur Integration der unhomogenen Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f(x, t) \tag{48}$$

mit gegebener rechter Seite $f(x, t)$ benutzen wir wiederum die schon in Kapitel III, § 6, 4 auseinandergesetzte *Methode der Variation der Konstanten oder der Stöße*, wobei wir als Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \tag{48'}$$

annehmen. Die Funktion f sei wiederum $\frac{m+1}{2}$ bzw. $\frac{m+2}{2}$ mal stetig differenzierbar. Es sei die von dem Parameter τ abhängige Funktion $v(x, t, \tau)$ eine solche Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$v_{tt} - \Delta v = 0,$$

für welche die Anfangsbedingungen

$$v(x, 0, \tau) = 0, \qquad v_t(x, 0, \tau) = f(x, \tau)$$

bestehen. Dann ist[1]

$$u = \int^t v(x, t-\tau, \tau)\, d\tau. \tag{49}$$

Hieraus ergibt sich sofort, durch Anwendung unserer vorausgehenden Resultate die Lösung unseres Anfangswertproblems für die unhomogene Gleichung (48) mit den Anfangsbedingungen (48′). Wir bilden den Mittelwert

$$Q(x, r, \tau) = \frac{1}{\omega_m} \int f(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r, \tau)\, d\omega_m.$$

Dann ist

$$v(x, t; \tau) = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0 (t^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r\, Q(x, r, \tau)\, dr$$

und somit

$$u(x, t) = \frac{1}{(m-2)!} \int d\tau \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^{t-\tau} ((t-\tau)^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r\, Q(x, r, \tau)\, dr$$

oder

$$u(x, t) = \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} \int_0^t d\tau \int_0^\tau (\tau^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r\, Q(x, r, t-\tau)\, dr, \tag{50}$$

wobei die rechte Umformung möglich ist, weil man Differentiation und Integration hier vertauschen darf auf Grund der für $\tau = t$ bestehenden Relation

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \int^{t-\tau} ((t-\tau^2) - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r\, Q(x, r, \tau)\, dr$$

$$= \frac{\partial}{\partial t^\nu} (t-\tau)^{m-1} \int_0 (1 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} r\, Q(x, r(t-\tau), \tau)\, dr = 0.$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, m-2)$$

Man kann die Lösung u auch mit Hilfe der Polynome P_λ schreiben, nämlich

$$u = \int^t (t-\tau)\, P_{\frac{m-3}{2}}((t-\tau)\, Q(x, t-\tau; \tau))\, d\tau \tag{51}$$

[1] Vgl. hierzu auch DUHAMELS Integral, Kap. III, Anh. § 1, 3.

für ungerades m und

$$u = \int_0 (t-\tau)\, P_{\frac{m-2}{2}}((t-\tau)\, G(x, t-\tau; \tau)\, d\tau \tag{52}$$

mit

$$G = \frac{2\,\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{1}{(t-\tau)^{m-1}} \int_0^{t-\tau} \frac{\varrho^{m-1}\, Q(x,\varrho,\tau)\, d\varrho}{\sqrt{(t-\tau)^2-\varrho^2}}$$

für gerades m. Z. B. erhält man in Übereinstimmung mit unserem Resultat von Kapitel III für $m = 2$

$$u = \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\varrho\, Q(x,\varrho,t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-\varrho^2}}\, d\varrho = \frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau \iint\limits_{\varrho \leqq \tau} \frac{f(\xi,\eta;t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-\varrho^2}}\, d\xi\, d\eta \tag{53}$$

$$(\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2)$$

und für $m = 3$

$$u = \int_0^t \varrho\, Q(x,\varrho,t-\varrho)\, d\varrho = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\varrho \leqq t} \frac{f(\xi,\eta,\zeta;t-\varrho)}{\varrho}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{54}$$

$$(\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)$$

6. Das Ausstrahlungsproblem. Das Resultat von Nr. 5 erlaubt uns, durch einen einfachen Grenzübergang auch das *Ausstrahlungsproblem* für die allgemeine Wellengleichung in m Dimensionen zu lösen. Dieses Ausstrahlungsproblem formulieren wir folgendermaßen: *Es soll für $t > 0$ eine Lösung der homogenen Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = 0$ gefunden werden, welche außer im Nullpunkt des x-Raumes zugleich mit der Ableitung u_t für $t = 0$ verschwindet und welche für $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2} = 0$ derart singulär wird, daß*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \cdots \int \frac{\partial u}{\partial \nu}\, do = -g(t) \tag{55}$$

gilt, wobei das Integral links zur Zeit t über eine Kugel K_ε um den Nullpunkt des x-Raumes erstreckt wird, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ normale Differentiation auf dieser Kugeloberfläche, do das Oberflächenelement bedeutet und der Radius ε der Kugel auf Null zusammengezogen wird. Die Funktion $g(t)$ ist die vorgeschriebene *Intensität der Ausstrahlung* als Funktion der Zeit.

Wir konstruieren die Lösung durch Grenzübergang aus der in Nr. 5 gegebenen Lösung $u = u_h$ für $f(x,t) = \varphi(x)\, g(t)$, wobei

$$\varphi = 0 \quad \text{für} \quad r > h \quad \text{und} \quad \varphi \geqq 0 \quad \text{für} \quad r < h$$

wird und $\int \cdots \int\limits_{r \leqq h} \varphi\, dx_1 \ldots dx_m = 1$ gilt. Dabei sei $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_m^2$.

Die gesuchte Ausstrahlungsfunktion wird konstruiert als Grenzwert der Lösung u_h für $h \to 0$. Es ergibt sich

$$u_h = \frac{1}{(m-2)!}\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\int^t g(t-\tau)\,d\tau \int^\tau (\tau^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\, r\, Q(x,r)\,dr$$

mit
$$Q(x,r) = \frac{1}{\omega_m}\int\cdots\int \varphi(x_1+\beta_1 r,\ldots,x_m+\beta_m r)\,d\omega_m.$$

Schreiben wir das innere Integral in der Form

$$\int^\tau (\tau^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\, r\, Q(x,r)\,dr = \frac{1}{\omega_m}\int\underset{s\leqq\tau}{\cdots}\int \frac{(\tau^2-s^2)^{\frac{m-3}{2}}}{s^{m-2}}\varphi(\xi)\,d\xi_1\ldots d\xi_m$$

$$(s^2 = (x_1-\xi_1)^2+\cdots+(x_m-\xi_m)^2)$$

und nehmen dann den Grenzübergang $h \to 0$ vor, so ergibt sich mit $r^2 = x_1^2+\cdots+x_m^2$

$$\lim_{h\to 0}\int (\tau^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\, r\, Q(x,r)\,dr = \begin{cases} 0 & \text{für } r \geqq \tau \\ \dfrac{(\tau^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}}{\omega_m r^{m-2}}, & \text{für } r < \tau \end{cases}$$

also
$$u = 0 \quad \text{für} \quad r > t \quad \text{und für} \quad r > t:$$

$$u = \frac{1}{\omega_m(m-2)!}\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\int^t g(t-\tau)\,(\tau^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,d\tau$$

oder

$$u = \frac{1}{\omega_m(m-2)!}\frac{1}{r^{m-2}}\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\int g(\tau)\,((t-\tau)^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,d\tau \tag{56}$$

als die gesuchte Lösung des Ausstrahlungsproblems.

Die einfache Verifikation sei als Aufgabe gestellt. In der Tat genügt u der Differentialgleichung, wie man sofort sieht, und besitzt die vorgeschriebenen Anfangswerte, während sich für die Intensität bei $r \to 0$ die Relation

$$\lim_{r\to 0}(r^{m-2}u) = \frac{1}{\omega_m(m-2)!}\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\int_0^t g(\tau)\,(t-\tau)^{m-3}\,d\tau = \frac{g(t)}{(m-2)\,\omega_m} \qquad (m>2)$$

ergibt, woraus auch das Bestehen der vorgeschriebenen Unstetigkeit (55) leicht erkannt wird. In den schon früher diskutierten Beispielen $m=2$ und $m=3$ ergibt sich wieder

$$u = \frac{1}{2\pi}\int^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau \tag{57}$$

bzw.

$$\frac{\quad}{4\pi r}\, g(t-r). \tag{58}$$

Wiederum kann man die Gestalt der Ausstrahlungslösung explizite gewinnen. Hierzu betrachten wir die Ausdrücke

$$m \text{ ungerade:}\quad V_\lambda = \frac{1\cdot 3 \ldots (\lambda+1)}{(\lambda+1)!}\,\frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial t^{\lambda+1}} \int\limits_0^{t-r} g(\tau)\,((t-\tau)^2 - r^2)^{\frac{\lambda}{2}}\, d\tau \tag{59}$$

und

$$m \text{ gerade:}\quad W_\lambda = \frac{2\cdot 4 \ldots \lambda}{\lambda!}\,\frac{\partial^\lambda}{\partial t^\lambda} \int\limits_0^{t-r} g(\tau)\,((t-\tau)^2 - r^2)^{\frac{\lambda-1}{2}}\, d\tau, \tag{60}$$

$$\lambda = 0, 2, 4.$$

Durch diese Funktionen ausgedrückt, lautet dann die Ausstrahlungslösung

$$\begin{aligned} &m \text{ ungerade:}\quad u = \frac{\quad}{2\,(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\, r^{m-2}}\\ &m \text{ gerade:}\quad u = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\,\frac{1}{r^{m-2}}\, W_{m-2}. \end{aligned} \tag{61}$$

Wir gewinnen für V_λ und W_λ leicht die Rekursionsformeln

$$V_\lambda = (\lambda-1)\, V_{\lambda-2} - r V'_{\lambda-2}; \qquad V_0 = g(t-r) \tag{62}$$

$$W_\lambda = (\lambda-2)\, W_{\lambda-2} - r W'_{\lambda-2}; \qquad W_0 = \int\limits_r^t \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\, d\tau, \tag{63}$$

$$(\lambda = 0, 2, 4, \ldots)$$

wobei der Strich Ableitung nach r bedeutet.

Hieraus folgen Darstellungen der Form

$$V_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda/2} A_{\lambda,\nu}\, r^\nu\, V_0^{(\nu)} \tag{64}$$

$$W_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda/2} B_{\lambda,\nu}\, r^\nu\, W_0^{(\nu)}. \tag{65}$$

$A_{\lambda,\nu}$ und $B_{\lambda,\nu}$ sind feste Zahlenkoeffizienten, die sich leicht durch Spezialisierung der Anfangsfunktionen explizit gewinnen lassen. Zunächst folgt durch Differentiation der Gleichungen (62), daß V'_λ derselben Rekursionsformel genügt wie W_λ, d. h. W_λ berechnet sich aus W_0 ebenso wie V'_λ aus V'_0. Differenzieren wir nun (64) nach r, so folgt

$$V'_\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} ((\nu+1)\, A_{\lambda,\nu+1} + A_{\lambda,\nu})\, r^\nu\, V_0^{(\nu+1)} + A_{\lambda,\frac{\lambda}{2}}\, r^{\frac{\lambda}{2}}\, V_0^{(\frac{\lambda}{2}+1)}$$

also bei Vergleich mit (65) die Relationen

$$B_{\lambda,\nu} = (\nu+1)\,A_{\lambda,\nu+1} + A_{\lambda,\nu}, \quad \left(\nu = 0, 1, \ldots, \frac{\lambda}{2} - 1\right)$$
$$B_{\lambda,\frac{\lambda}{2}} = A_{\lambda,\frac{\lambda}{2}}. \tag{66}$$

Es genügt hiernach, die Koeffizienten $A_{\lambda,\nu}$ zu bestimmen.

Hierzu führen wir in (64) für $V_0 = g(t-r)$ die Funktion $\frac{(t-r)^\alpha}{\alpha!}$ mit $\alpha \leqq \frac{\lambda}{2}$ ein und setzen alsdann $t = r$; es folgt

$$V_\lambda(t,t) = A_{\lambda,\alpha}(-1)^\alpha t^\alpha. \tag{67}$$

Andererseits wird für dieses $g(t)$ gemäß (59)

$$V_\lambda = \frac{1\cdot3\cdots(\lambda+1)}{(\lambda+1)!\,\alpha!}\frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial t^{\lambda+1}}\int^{t}(t-\tau)^\alpha(\tau^2-r^2)^{\frac{\lambda}{2}}\,d\tau$$

$$= \frac{1\cdot3\cdots(\lambda+1)}{(\lambda+1)!}\frac{\partial^{\lambda-\alpha}}{\partial t^{\lambda-\alpha}}(t^2-r^2)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Führen wir hier die Differentiation nach der Leibnizschen Regel aus und setzen $r = t$, so erhalten wir

$$V_\lambda(t,t) = \frac{1\cdot3\cdots(\lambda+1)}{(\lambda+1)!}\binom{\lambda-\alpha}{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{\lambda}{2}\right)!\,\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\cdots(\alpha+1)(2t)^\alpha$$

also durch Vergleich mit (67):

$$A_{\lambda,\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha}}{2^{\frac{\lambda}{2}-\alpha}}\,\frac{(\lambda-\alpha)!}{\alpha!\left(\frac{\lambda}{2}-\alpha\right)!}. \tag{68}$$

Gemäß (66) folgt sodann

$$B_{\lambda,\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda-\alpha}\,\frac{(-1)^\alpha}{2^{\frac{\lambda}{2}-\alpha}}\,\frac{(\lambda-\alpha)!}{\alpha!\left(\frac{\lambda}{2}-\alpha\right)!}. \tag{69}$$

Für die Ausstrahlungslösung u ergeben sich nunmehr nach leichter Rechnung die folgenden expliziten Darstellungen

$$\text{(70)}\quad m \text{ ungerade: } u = \frac{r^{2-m}}{(4\pi)^{\frac{m-1}{2}}}\sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}}\frac{(m-3-\nu)!}{\nu!\left(\frac{m-3}{2}-\nu\right)!}(2r)^\nu g^{(\nu)}(t-r)$$

$$\text{(71)}\quad m \geqq 2 \text{ gerade: } u = \frac{r^{2-m}}{2^{m-1}\pi^{\frac{m}{2}}}\sum_{\nu=1}^{m-2}\frac{(-1)^\nu(m-3-\nu)!}{(\nu-1)!\left(\frac{m-2}{2}-\nu\right)!}(2r)^\nu\frac{\partial^\nu G(r,t)}{\partial r^\nu},$$

wobei im letzten Fall

$$G(r, t) = \int^{t} \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \, d\tau,$$

d. h. die Lösung für $m = 2$ zu setzen ist.

Wenn wir die Ausdrücke $g^{(\nu)}(t-r)$ in (70) durch $(-1)^{\nu} g^{(\nu)}(t+r)$ ersetzen, so erhalten wir entsprechende Lösungen, welche einem analogen *Einstrahlungsprozeß* entsprechen. Ausdrücke der obigen Form (70) bzw. (71) nennen wir *fortschreitende Wellen höherer Stufe* (vgl. die Diskussion des Wellenbegriffs in § 10).

Wiederum haben wir hier das bemerkenswerte Ergebnis: *Für das Ausstrahlungsproblem bei ungeradem m gilt das Huyghenssche Prinzip*: Der Effekt der im Nullpunkt lokalisierten Erregung auf eine Stelle x zur Zeit t hängt nur von der Erregung in einem einzigen Zeitmoment, nämlich im Zeitmoment $t - r$ ab, der gerade so weit zurückliegt, daß die Erregung vom Nullpunkt mit der Geschwindigkeit 1 ausgehend den betrachteten Raumpunkt P erreichen kann. Zeitlich scharf begrenzte Erregungsstöße im Nullpunkt dargestellt durch Funktionen $g(t)$, welche nur in einem kurzen Zeitintervall von Null verschieden sind, werden somit an irgendeiner Stelle r nur in einem entsprechend langen um r Zeiteinheiten späteren Zeitintervall wahrgenommen werden.

Das Huyghenssche Ausstrahlungsprinzip gilt jedoch nicht für gerade Raumdimensionen, wie unmittelbar aus der Form (71) hervorgeht. Zwar wird auch hier eine zeitlich scharf begrenzte Erregung im Nullpunkt an einer anderen Stelle mit der Entfernung r erst um r Zeiteinheiten später bemerkbar sein. Der Effekt an dieser Stelle wird aber nicht nach dem entsprechenden kurzen Zeitintervall verschwinden, es wird vielmehr für den gesamten späteren Zeitverlauf der Effekt, d. h. die Lösung allgemein noch von Null verschieden bleiben. In einem Raum von gerader Dimensionszahl würden wir also bei der Signalübermittlung von Signalen, welche der Wellengleichung genügen, nicht wieder die Möglichkeit einer scharfen Aufnahme haben, sondern es würde die Übermittlung von Signalen durch ein Nachhallen gestört werden. Dieser Umstand und weitere Betrachtungen später in § 10 zeigen, daß der dreidimensionale Raum tatsächlich vom Standpunkt der Möglichkeit der physikalischen Signalübermittlung wesentlich ausgezeichnet ist.

Für $m = 2$ und $m = 3$ haben wir die Ausstrahlungslösungen schon in Kapitel III, § 6 aufgestellt. Im Fall $m = 5$ ergibt sich

$$u = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{r^3} \left(g(t-r) + r g'(t-r) \right),$$

im Falle $m = 4$:

$$u = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{r} \int^{t} \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \, d\tau.$$

Zum Schluß sei bemerkt, daß sich die Rekursionsformeln (62) und (63) in der Form

$$(72)\qquad \frac{V_\lambda}{r^{\lambda+1}} = -2\frac{d}{dr^2}\left(\frac{V_{\lambda-2}}{r^{\lambda-1}}\right), \qquad \frac{W_\lambda}{r^\lambda} = -2\frac{d}{dr^2}\left(\frac{W_{\lambda-2}}{r^{\lambda-2}}\right)$$

schreiben lassen. Infolgedessen ergibt sich sofort die Auflösung

$$(73)\qquad V_\lambda = (-2)^{\frac{\lambda}{2}} r^{\lambda+1}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{V_0}{r}\right), \qquad W_\lambda = (-2)^{\frac{\lambda}{2}} r^\lambda \left(\frac{d}{dr^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} W_0, \qquad \lambda = 2, 4, \ldots$$

Daraus gewinnt man für die Ausstrahlungslösung die explizite Darstellung

$$(74)\qquad m \text{ ungerade: } u = \frac{(-1)^{\frac{m-3}{2}}}{4\pi^{\frac{m-1}{2}}}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{\frac{m-3}{2}} \frac{g(t-r)}{r}$$

$$(75)\qquad m \text{ gerade: } u = \frac{(-1)^{\frac{m-2}{2}}}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\left(\frac{d}{dr^2}\right)^{\frac{m-2}{2}} \frac{g(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2-r^2}}\,d\tau.$$

7. Das Anfangswertproblem für die Gleichung $\Delta u + c^2 u = u_{tt}$ und für die Telegraphengleichung. Auf Grund unserer Resultate von Nr. 5 können wir nunmehr durch die Absteigemethode leicht auch die Anfangswertprobleme für die allgemeine hyperbolische Differentialgleichung zweiter Ordnung lösen; wir können uns zunächst mit der Differentialgleichung

$$(76)\qquad \Delta u + c^2 u = u_{tt}$$

unter den Anfangsbedingungen

$$(76')\qquad u(x, 0) = 0 \qquad u_t(x, 0) = \varphi(x)$$

begnügen, auf welche sich der allgemeinste Fall nach Kap. III, § 3 zurückführen läßt. Die explizite Lösung ergibt sich wiederum unmittelbar durch die Absteigemethode. Wir erhöhen künstlich die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen auf $m+2$, indem wir nunmehr $x_{m+1} = z$ und $x_{m+2} = t$ setzen, und betrachten das Anfangswertproblem der Differentialgleichung

$$(77)\qquad \Delta v = v_{tt}$$

für $v(x_1, \ldots, x_{m+1}, t)$ unter den Anfangsbedingungen

$$(77')\qquad v(x, 0) = 0 \qquad v_t(x, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_m)\, e^{c\, x_{m+1}} = \varphi(x)\, e^{cz}.$$

Der Ansatz

$$v = e^{cz} u(x_1, \ldots, x_m) \tag{78}$$

liefert dann u als Lösung unseres obigen Anfangswertproblems (76). Tatsächlich zeigen die früheren Lösungsformeln, daß die Lösung v des Anfangswertproblems (77) die Form $e^{cz} u(x_1, \ldots, x_m)$ haben muß. Setzen wir aber die Funktion v in die Differentialgleichung (77) ein, so ergibt sich für u unmittelbar das ursprüngliche Anfangswertproblem der Differentialgleichung (76). Nach den in §4 bewiesenen Eindeutigkeitssätzen kann es nur eine einzige Lösung u unseres Problems geben, und somit ist $u = v e^{-cz}$.

Wir können nunmehr unmittelbar v und damit auch u auf Grund des Resultats von Nr. 5 hinschreiben. Es ergibt sich nämlich für *gerades* m, also ungerades $m+1$

$$v = t P_{\frac{m-2}{2}}(t G^*)$$

mit

$$G^*(t) = \frac{e^{cz}}{\omega_{m+1}} \int \cdots \int \varphi(x_1 + \beta_1 t, \ldots, x_m + \beta_m t) e^{ct\beta_{m+1}} d\omega_{m+1},$$

und hieraus

$$u = t P_{\frac{m-2}{2}}(t G)$$

mit

$$G(t) = \frac{1}{\omega_{m+1}} \int \cdots \int \varphi(x_1 + \beta_1 t, \ldots, x_m + \beta_m t) e^{ct\beta_{m+1}} d\omega_{m+1},$$

wobei wie früher mit $d\omega_{m+1}$ das Flächenelement auf der $m+1$-dimensionalen Einheitskugel $\beta_1^2 + \cdots + \beta_{m+1}^2 = 1$ bezeichnet ist. Da die Funktion φ von der letzten Variablen $z = x_{m+1}$ nicht abhängt, erhalten wir wegen

$$t^{m-1} d\omega_{m+1} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \varrho^2}} d\xi_1 \ldots d\xi_m = \frac{1}{\sqrt{t^2 - \varrho^2}} \varrho^{m-1} d\omega_m d\varrho$$

die Relation

$$G(x, t) = \frac{1}{\omega_{m+1}} \frac{1}{t^{m-1}} \int \frac{\varrho^{m-1}}{\sqrt{t^2 - \varrho^2}} e^{c\sqrt{t^2 - \varrho^2}} Q(x, \varrho)\, d\varrho$$

oder

$$G(x, t) = \frac{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) t^{m-1}} \int_0^t \frac{\varrho^{m-1}}{\sqrt{t^2 - \varrho^2}} \operatorname{Cof} c\sqrt{t^2 - \varrho^2}\, Q(x, \varrho)\, d\varrho \tag{79}$$

mit

$$Q(x, \varrho) = \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int \varphi(x_1 + \beta_1 \varrho, \ldots, x_m + \beta_m \varrho)\, d\omega_m.$$

Die Lösung lautet also mit diesem Ausdruck für G

$$u = t P_{\frac{m-2}{2}}(t G). \tag{80}$$

Ebenso ergibt sich für *ungerades* m als Lösung

(81)
$$u = t\, P_{\frac{m-1}{2}}(t\, G)$$

mit

(82)
$$G(x,t) = \frac{m}{t^m}\int_0^t \varrho^{m-1} J_0\left(i c \sqrt{t^2-\varrho^2}\right) Q(x,\varrho)\, d\varrho .$$

wobei J_0 die nullte Besselsche Funktion ist.

Denn es ist
$$v = t\, P_{\frac{m-1}{2}}(t\, G^*)$$

mit
$$G^*(x,t) = \frac{2\, e^{cz}}{\omega_{m+2}\, t^m}\int\cdots\int_{\varrho^2+\xi_{m+1}^2 \leqq t^2} \frac{\varphi(x_1+\xi_1,\ldots,x_m+\xi_m)}{\sqrt{t^2-\varrho^2-\xi_{m+1}^2}}\, e^{c\,\xi_{m+1}}\, d\xi_1 \ldots d\xi_{m+1} .$$

Integration nach ξ_{m+1} von $-\sqrt{t^2-\varrho^2}$ bis $+\sqrt{t^2-\varrho^2}$ ergibt im inneren Integral den Ausdruck $\pi J_0\left(i c \sqrt{t^2-\varrho^2}\right)$ und somit

$$G(x,t) = G^*(x,t)\, e^{-cz}$$
$$\frac{2\pi}{\omega_{m+2}}\cdot\frac{1}{t^m}\int\cdots\int_{\varrho\leqq t} \varphi(x+\xi)\, J_0\left(i c\sqrt{t^2-\varrho^2}\right) d\xi_1 \ldots d\xi_m .$$

Dieser Ausdruck aber läßt sich sofort auf die Form (82) bringen.

Um unser Resultat auf die *Telegraphengleichung*

(83)
$$\Delta u = u_{tt} + u$$

mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = \varphi(x)$ anzuwenden, haben wir $u = v\, e^{-\frac{t}{2}}$ zu setzen und erhalten für v die Differentialgleichung

(84)
$$v_{tt} = \Delta v + \tfrac{1}{4} v ,$$

d. h. die Gleichung (76) für $c = \frac{1}{2}$. Es ergibt sich beispielsweise als Lösung der Telegraphengleichung für

(85)

$$m = 1:\quad u = e^{-\frac{t}{2}}\int_0^t J_0\left(\frac{i}{2}\sqrt{t^2-\varrho^2}\right) Q(x,\varrho)\, d\varrho$$
$$Q(x,\varrho) = \tfrac{1}{2}\left(\varphi(x+\varrho) + \varphi(x-\varrho)\right)$$

$$m = 2:\quad u = e^{-\frac{t}{2}}\int_0^t \varrho\, \frac{\operatorname{Cof} \frac{1}{2}\sqrt{t^2-\varrho^2}}{\sqrt{t^2-\varrho^2}}\, Q(x,\varrho)\, d\varrho$$
$$Q(x,\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int \varphi(x_1+\beta_1\varrho_1,\, x_2+\beta_2\varrho)\, d\omega_2$$

$$m = 3:\quad u = e^{-\frac{t}{2}}\,\frac{1}{t}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \varrho^2 J_0\left(\frac{i}{2}\sqrt{t^2-\varrho^2}\right) Q(x,\varrho)\, d\varrho$$
$$Q(x,\varrho) = \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \varphi(x_1+\beta_1\varrho_1,\, x_2+\beta_2\varrho_1,\, x_3+\beta_3\varrho)\, d\omega_3 .$$

§ 6. Mittelwertmethode. — Wellengleichung und Gleichung von Darboux.

Das Anfangswertproblem der Wellengleichung und weitere damit zusammenhängende Probleme lassen sich durch eine andere Methode behandeln, welche auf Mittelwertbildungen über Kugeloberflächen des x-Raums beruht und die nebst einigen Anwendungen dargestellt werden soll[1].

1. Die Darbouxsche Differentialgleichung für Mittelwerte. Ist $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \psi(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der m Variablen x_i, so betrachten wir den Mittelwert

$$
\begin{aligned}
& v(x_1, \ldots, x_m, r) = v(x, r) \\
(1) \qquad & = \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int_{\Omega_m} \psi(x_i + \beta_i r)\, d\omega_m = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int \cdots \int \psi\, do
\end{aligned}
$$

dieser Funktion auf einer Kugeloberfläche vom Radius r um den Mittelpunkt x. In unserem Integral bedeutet dann β einen Einheitsvektor mit den Komponenten $\beta_1, \ldots, \beta_m$ und Ω_m, die m-dimensionale Einheitskugel mit dem Flächenelement $d\omega$ und dem Inhalt ω_m, ferner O_m die Kugeloberfläche vom Radius r um den Punkt x mit dem Flächenelement do. Dann gilt für die Mittelwertfunktionen v die *Differentialgleichung von* Darboux (vgl. § 4, 2)

$$
(2) \qquad v_{rr} + \frac{m-1}{r} v_r - \Delta v = 0
$$

mit den Anfangsbedingungen

$$
(2') \qquad v_r(x, 0) = 0, \qquad v(x, 0) = \psi(x).
$$

Wir können dann v auch für negative r stetig differenzierbar als Lösung der Differentialgleichung fortsetzen durch die Definition

$$
\cdot\, r) = v(r)
$$

was wir ausdrücken durch die Aussage: *v ist eine mit Bezug auf die Variable r gerade Lösung* der Darbouxschen Gleichung.

Zum Beweise bilden wir

$$
\begin{aligned}
v_r(x, r) &= \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int \left(\sum^{m} \beta_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) d\omega = \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int \cdots \int \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, do \\
&= \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int \int_{G_m} \cdots \int \Delta \psi\, dg,
\end{aligned}
$$

wobei G_m das Innere der Kugelfläche O_m, dg das Raumelement $dx_1 \ldots dx_m$, $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ Differentiation nach der äußeren Normalen auf der Kugel-

[1] Vgl. zur Verwendung dieser Mittelbildungen und zu verschiedenen Betrachtungen dieses und der beiden folgenden Paragraphen die Arbeiten von Fritz John: Math. Ann. Bd. 109 (1934) S. 488f. und Bd. 111 (1935) S. 542f.

oberfläche O_m bedeutet und die letzte Umformung auf Grund des Gaussschen Integralsatzes vorgenommen ist. Nochmalige Differentiation nach r liefert

$$v_{rr} = -\frac{m-1}{\omega_m r^m} \int\int_{G_m} \cdots \int \Delta\psi\, dg + \frac{1}{\omega_m r^{m-1}} \int_{O_m} \cdots \int \Delta\psi\, do$$
$$= -\frac{m-1}{r} v_r + \Delta v,$$

womit unsere Behauptung folgt.

Nehmen wir speziell an, daß die Funktion $\psi(x_1, \ldots, x_m) = \varphi(x_1)$ nur von der einen Variablen x_1, und zwar zweimal stetig differenzierbar, abhängt, dann läßt sich der Mittelwert in der Form

$$v(x_1, r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \varphi(x_1 + r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta \tag{3}$$

schreiben und genügt dann der Differentialgleichung

$$v_{rr} + \frac{m-1}{r} v_r - v_{xx} = 0, \tag{4}$$

wobei $x = x_1$ geschrieben ist.

Wir entnehmen aus § 4,2: Die Formeln (1) bzw. (3) liefern die einzigen Lösungen des Anfangsproblems der Darbouxschen Gleichung (2) bzw. (4) mit den Anfangsbedingungen (2').

2. Zusammenhang mit der Wellengleichung und Auflösung der Wellengleichung. Wir stellen nunmehr einen eindeutig umkehrbaren Zusammenhang zwischen der Darbouxschen Gleichung und der Wellengleichung her. Differenzieren wir die Formel (3) zweimal nach x, so folgt

$$v_{xx} = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \varphi''(x + r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta.$$

Aus dem Bestehen der Darbouxschen Gleichung ergibt sich also

$$\frac{m-1}{r} v_r + v_{rr} = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \varphi''(x + r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta.$$

In dieser Formel ist der zu $r\beta$ additiv hinzutretende Parameter x unwesentlich. Wir sprechen demgemäß folgendes Resultat aus:

Wenn die Funktionen $v(r)$ und $\varphi(r)$ durch die Integraltransformation

$$v(r) = \int_{-1}^{1} \varphi(r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}, \tag{5}$$

zusammenhängen, so wird

$$v'' + \frac{m-1}{r} v' = \int_{-1} \varphi''(r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta. \tag{6}$$

Es entspricht also der Operation φ'' *auf* $\varphi(r)$ *die Operation* $v'' + \frac{m-1}{r} v'$ *auf* $v(r)$.

Aus dieser Tatsache ergibt sich der angekündigte Zusammenhang folgendermaßen. Es sei u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der Wellengleichung mit $u_t(x, 0) = 0$, — eine „in t grade" Lösung — dann wird

$$v(x_1, \ldots, x_m, r) = \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} u(x_1, \ldots, x_m, r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta$$

eine gerade Lösung der Darbouxschen Gleichung mit

$$v_r(x, 0) = 0, \qquad v(x, 0) = u(x, 0) = \psi(x).$$

Denn es wird unter Benutzung unseres oben erhaltenen Resultats

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} \Delta u(x, r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta \\ & \frac{\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{-1}^{1} u_{tt}(x, r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta \\ &= v_{rr} + \frac{m-1}{r} v_r, \end{aligned}$$

und die Anfangsbedingungen $v_r(x, 0) = 0$; $v(x, 0) = \psi$ sind wegen der Definition von v als Kugelmittelwert erfüllt.

Das Anfangswertproblem für die Darbouxsche Gleichung können wir aber auf Grund von (1) sofort in der folgenden Form lösen

$$v(x_1, \ldots, x_m, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int_{\Omega_m} \psi(x + r\beta)\, d\omega.$$

Es besteht also für die als in t gerade vorausgesetzte Lösung u der Wellengleichung die Beziehung

$$\frac{2\,\omega_{m-1}}{\omega_m} \int_{0}^{1} u(x_1, \ldots, x_m; r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta = \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int \psi(x + r\beta)\, d\omega.$$

Wir wollen nun umgekehrt aus dieser Beziehung die Lösung u der Wellengleichung finden und werden zeigen, daß dies auf eindeutige Weise möglich ist. Diese Aufgabe läuft darauf hinaus, die Funktionalgleichung (5) zwischen φ und v umzukehren. Da nach unserer Voraussetzung v zweimal stetig differenzierbar ist, können wir die Lösung in folgender Weise finden: Wir setzen $r = \sqrt{s}$; $r\beta = \sqrt{\sigma}$, dann wird

$$v(\sqrt{s})\, s^{\frac{\quad}{2}} = \int \frac{\varphi(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}} (s-\sigma)^{\frac{\quad}{2}}\, d\sigma.$$

Mit der Bezeichnung

$$w(s) = v(\sqrt{s})\, s^{\frac{m-2}{2}}, \qquad \frac{\varphi(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}} = \chi(\sigma)$$

haben wir nunmehr

$$w(s) = \int_0^s \chi(\sigma)\,(s-\sigma)^{\frac{m-3}{2}}\,d\sigma. \tag{7}$$

Ist *m ungerade*, dann wird die Auflösung in eindeutiger Weise einfach durch

$$\left(\frac{m-3}{2}\right)!\,\chi(s) = \frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{d s^{\frac{m-1}{2}}}\, w(s) \tag{8}$$

gegeben, also die Auflösung unserer ursprünglichen Gleichung durch

$$\varphi(r) = \frac{1}{\left(\frac{m-3}{2}\right)!}\, r\, \frac{d^{\frac{m-1}{2}}}{(d r^2)^{\frac{m-1}{2}}}\left(r^{m-2} v(r)\right). \tag{9}$$

Ist *m gerade*, so handelt es sich um eine *Abelsche Integralgleichung*, und die Umkehrung wird durch „halbzahlige", und zwar $\frac{m-1}{2}$-fache Differentiation (vgl. Kap. III, Anhang § 2, 5), d. h. durch

$$\chi(s) = \frac{[illegible]}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}\,\frac{d}{d s}\,[illegible]\left(\frac{m-2}{2}\right)[illegible]\,d\sigma \tag{10}$$

geliefert. Es folgt also

$$\varphi(r) = \frac{2r}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left([illegible]\right)}\,\frac{d}{d r^2}\,[illegible]\,\frac{[illegible]}{\sqrt{r^2-\varrho^2}}\,\frac{d^{m-2}}{(d\varrho^2)^{\frac{m-2}{2}}}\left(\varrho^{m-2} v(\varrho)\right) d\varrho. \tag{11}$$

Hieraus ergibt sich, indem man $\varphi(r) = u(x, r)\,\frac{\omega_{m-1}}{\omega_m}$ setzt, als Lösung unseres Anfangswertproblems für die Wellengleichung für *gerades* *m* die Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\,\frac{\partial^{\frac{m-2}{2}}}{\partial r^{2\,\frac{m-2}{2}}}\, r^{m-2} Q(x,r)\,dr \tag{12}$$

mit

$$Q(x, r) = \frac{1}{\omega_m}\int\cdots\int_{\Omega_m} \psi(x + r\beta)\,d\omega_m \tag{13}$$

und für *ungerades* m die Formel

$$(14) \qquad u(x,t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, t \cdot \frac{\partial^{\frac{m-1}{2}}}{(\partial t^2)^{\frac{m-1}{2}}}\, t^{m-2}\, Q(x,t)$$

mit demselben Ausdruck für $Q(x,t)$. Somit haben wir für die Lösung der Wellengleichung explizite neue Ausdrücke gefunden, deren Identifizierung mit den Ausdrücken von § 5 durch Schluß von m auf $m-2$ leicht ausgeführt werden kann.

3. Das Ausstrahlungsproblem der Wellengleichung. Auch für die Lösungen der Wellengleichungen, welche *Strahlungsvorgängen* entsprechen, können wir aus den in 2. hergestellten Zusammenhängen eine andere interessante Darstellung der Lösung gewinnen. Wir gehen von der Frage aus: Welche Lösungen der Wellengleichung hängen nur von $r^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$ und der Zeit t ab. Diese Lösungen $u(r,t)$ müssen in r gerade sein und, wie man leicht erkennt, der Differentialgleichung

$$(15) \qquad u_{tt} - \frac{m-1}{r}\, u_r - u_{rr} = 0$$

genügen, welche genau mit der Darbouxschen Differentialgleichung (2) identisch ist, wenn man gegenüber Nr. 2 die Rolle der Raumvariablen r und der Zeitvariablen t vertauscht. Ihre Lösung wird nach Nr. 1 gegeben durch

$$(16) \qquad u(r,t) = \int_{-1}^{1} \varphi(t + r\beta)\,(1-\beta^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\beta$$

bei willkürlichen φ. Für ungerades m ergibt sich durch Entwicklung der Potenz unter dem Integralzeichen nach dem Binomischen Satz

$$(17) \qquad u(r,t) = \frac{1}{r^{m-2}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} \binom{\frac{m-3}{2}}{\nu} r^{m-3-2\nu} (-1)^\nu \int_{-r}^{r} \varphi(t+\varrho)\, \varrho^{2\nu}\, d\varrho .$$

Ist g eine Funktion, für welche $g^{(m-2)}(x) = f(x)$ gilt, so erhalten wir mittels Produktintegration leicht

$$(18) \qquad u(r,t) = \frac{1}{r^{m-2}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} A_\nu\, r^\nu \left((-1)^\nu g^{(\nu)}(t+r) - g^{(\nu)}(t-r)\right),$$

wobei man die Koeffizienten z. B. durch Einsetzen in (15) bestimmt. Es ergibt sich vgl. § 5, 6

$$(19) \qquad A_\nu = \binom{\frac{m-3}{2}}{\nu} \frac{2^\nu}{\nu!} : \binom{m-}{\nu}$$

und man erkennt ferner, daß auch die einzelnen Summanden

$$\frac{1}{r^{m-2}} \sum (-1)^\nu A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t+r) \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^{m-2}} \sum A_\nu r^\nu g^{(\nu)}(t-r)$$

schon selbst der Wellengleichung genügen, da der Funktionsverlauf von g an der Stelle $t+r$ von dem an der Stelle $t-r$ außer für $r=0$ unabhängig ist.

4. Ein Satz von Friedrichs. Für $m=1$ ist die Darbouxsche Gleichung mit der Wellengleichung identisch und hat dann als gerade Lösungen Funktionen $g(t+r)+g(t-r)$ bei willkürlichem g. Bei höherem m wird weder die Darbouxsche Gleichung noch die Wellengleichung durch solche einfach fortschreitende Wellen gelöst. Jedoch gilt folgender merkwürdige Satz.

Führen wir für den Darbouxschen Ausdruck die Bezeichnung

$$L_m[u(r,t)] = u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - u_{tt} \tag{20}$$

ein, und ist m ungerade, so genügt bei willkürlichem g sowohl die Funktion $g(t+r)$ wie die Funktion $g(t-r)$ der $m+1$ mal iterierten Darbouxschen Differentialgleichung

$$L_m^{\left(\frac{m+1}{2}\right)}[u] = 0. \tag{21}$$

Um diese Behauptung zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß für beliebiges φ und ganzzahliges $\nu \geqq 0$ gilt

$$L_m \int_{-1}^{1} \varphi(t+r\beta)(1-\beta^2)^{\nu} d\beta = d_{m,\nu} \int_{-1}^{1} \varphi''(t+r\beta)(1-\beta^2)^{\nu+1} d\beta, \tag{22}$$

wobei $d_{m,\nu} = \frac{m-3}{2} - \nu$ gesetzt ist[1]. Denn, wird das Integral links mit $w(r,x)$ bezeichnet, so ist nach Nr. 1:

$$L_{2\nu+3} w = 0;$$

also gilt wegen $L_m = L_{2\nu+3} + \frac{m-(2\nu+3)}{r}\frac{d}{dr}$:

$$L_m w = \frac{m-(2\nu+3)}{r} w_r$$

$$- \frac{m-(2\nu+3)}{} \int_{-1} \varphi'(t+r\beta)\beta(1-\beta^2)^{\nu} d\beta.$$

Für die rechte Seite ergibt sich schließlich durch partielle Integration die in (22) behauptete Form. Nunmehr folgt durch wiederholte Anwendung

$${}_{n}^{\frac{m-1}{2}} \int_{-1}^{1} \varphi(t+r\beta)\, d\beta$$

$$= d_{m,0}\, d_{m,1} \cdots d_{m,\frac{m-3}{2}} \int^{1} \varphi^{(m-1)}(t+r\beta)(1-\beta^2)^{\frac{m-1}{2}} d\beta$$

[1] Für ν = $m-3$ ergibt sich als Spezialfall das Resultat von Nr. 1.

und hier verschwindet wegen $d_{m,\frac{m-3}{2}}=0$ die rechte Seite. Es ist also bei beliebigem $(m-1)$-mal stetig differenzierbarem φ:

$$L_m^{\frac{m-1}{2}}\int_{-1}^{1}\varphi(t+r\beta)\,d\beta=0. \tag{23}$$

Setzt man $\varphi=g''$, so folgt

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t+r\beta)\,d\beta=\frac{g'(t+r)-g'(t-r)}{r}=\frac{1}{m-1}L_m[g(t+r)+g(t-r)]$$

und dies in Gleichung (23) eingesetzt, ergibt die Behauptung (21) q.e.d.

§ 7. Ultrahyperbolische Differentialgleichungen und allgemeine Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

1. Der allgemeine Mittelwertsatz von Asgeirsson[1]. Die in § 6 gegebene Auflösungsmethode durch Umkehrung einer Mittelwertgleichung erfährt eine neue Beleuchtung durch einen einfachen, aber tiefgehenden Mittelwertsatz, den LEIFUR ASGEIRSSON für beliebige lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten entdeckt hat. Nach Kapitel III, § 4,2 können wir eine beliebige nicht parabolisch ausgeartete homogene solche Differentialgleichung nach passender linearer Transformation der Koordinaten und gegebenenfalls nach Abspaltung eines Exponentialfaktors in die Form setzen

$$u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_nx_n}=u_{y_1y_1}+\cdots+u_{y_my_m}-cu,$$

wobei $x_1,\ldots,x_n$ und $y_1,\ldots,y_m$ die unabhängigen Veränderlichen sind. Auch den Koeffizienten c, den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als nicht negativ annehmen dürfen, können wir (falls er nicht verschwindet) formal beseitigen, indem wir eine künstliche neue Veränderliche $z=x_{n+1}$ einführen und $u=ve^{\sqrt{c}\,x_{n+1}}$ setzen. Die Differentialgleichung geht dann in die Differentialgleichung

$$u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_{n+1}x_{n+1}}=u_{y_1y_1}+\cdots+u_{y_my_m}$$

über. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nun, indem wir unter Umständen annehmen, daß die Funktion v, anstatt welcher wir nunmehr wieder u schreiben, von gewissen der Variablen x_i oder y_i gar nicht abhängt, die Differentialgleichung in der Form schreiben

$$\Delta_x u=\Delta_y u, \tag{1}$$

d. h.

$$\sum_{i=1}^{m}u_{x_ix_i}=\sum_{i=1}^{m}u_{y_iy_i}, \tag{1'}$$

[1] Vgl. LEIFUR ASGEIRSSON: Göttinger Dissertation (1932). Math. Ann. Bd. 113 936) S. 321ff.

wobei wir also nunmehr die Anzahl der x-Variablen und die Anzahl der y-Variablen als gleich annehmen.

Wir bezeichnen diesen Differentialgleichungstypus als *ultra-hyperbolisch*. Für den Spezialfall, daß u von keiner der Variablen y abhängt, erhalten wir die Potentialgleichung, für den Fall, daß u nur von einer der Variablen y abhängt, die hyperbolische Wellengleichung.

Wir nehmen nunmehr an, daß u eine für den gesamten betrachteten Bereich des x, y-Raumes zweimal stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichung (1) ist. Dann bilden wir mit u die folgenden Integrale über die Einheitskugel $\beta_1^2 + \cdots + \beta_m^2 = 1$

$$\mu(x, y, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int u(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r; y_1, \ldots, y_m)\, d\omega_m \tag{2}$$

und

$$\nu(x, y, r) = \frac{1}{\omega_m} \int \cdots \int u(x_1, \ldots, x_m; y_1 + \beta_1 r, \ldots, y_m + \beta_m r)\, d\omega_n \tag{3}$$

Es wird also $\nu(x, y, r)$ der Mittelwert der Funktion u über eine Kugeloberfläche vom Radius r um den y-Punkt im y-Raum, wobei x fest bleibt und entsprechend $\mu(x, y, r)$ der Mittelwert im x-Raum, wenn y fest bleibt. ν und μ denken wir für negative r als grade Funktionen fortgesetzt.

Ferner bilden wir den Mittelwert

$$w(x, y; r, s) = \tag{4}$$
$$\frac{1}{\omega_m^2} \int_{\Omega_m} \cdots \int \int_{\Omega'_m} \cdots \int u(x_1 + \beta_1 r, \ldots, x_m + \beta_m r; y_1 + \beta'_1 s, \ldots, y_m + \beta'_m s)\, d\omega_m\, d\omega'_m,$$

d. h. den Mittelwert über eine Kugel vom Radius r im x-Raum und eine Kugel vom Radius s im y-Raum. Natürlich gilt dann

$$\mu(x, y, r) = w(x, y; r, 0)$$
$$\nu(x, y, r) = w(x, y; 0, r).$$

Der zu beweisende Mittelwertsatz wird nun einfach durch die Gleichung

$$\mu(x, y, r) = \nu(x, y, r) \tag{5}$$

ausgedrückt, d. h.

Mittelwertbildung bei festem x im y-Raum über eine Kugel vom Radius r liefert denselben Wert wie Mittelwertbildung bei festem y über eine Kugel vom Radius r im x-Raum. Allgemeiner gilt

$$w(x, y, r, s) = w(x, y, s, r), \tag{6}$$

d. h. *das Ergebnis der doppelten Mittelwertbildung ist in den Radien r und s symmetrisch.*

Wir beweisen zunächst den speziellen Satz. Beide Mittelwerte μ und ν genügen gemäß § 6 der Darbouxschen Differentialgleichung

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\Delta_x \mu - \frac{m-1}{r}\mu_r - \mu_{rr} = 0 \\ &\Delta_y \nu - \frac{m-1}{r}\nu_r - \nu_{rr} = 0, \end{aligned}$$

wobei in der ersten Gleichung y, in der zweiten Gleichung x als Parameter auftreten. Aus (1) folgt: $\Delta_x \mu = \Delta_y \mu$ und $\Delta_y \nu = \Delta_x \nu$, somit auch

$$\Delta_x \nu - \frac{m-1}{r}\nu_r - \nu_{rr} = 0 .$$

Außerdem wird nach Definition

$$\mu(x, y, 0) = u(x, y)\,; \qquad \mu_r(x, y, 0) = 0\,,$$
$$\nu(x, y, 0) = u(x, y)\,; \qquad \nu_r(x, y, 0) = 0\,.$$

Die Funktionen μ und ν in ihrer Abhängigkeit von x und r, mit y als Parametern, sind also Lösungen desselben Anfangswertproblems der Darbouxschen Gleichung und daher auf Grund des Eindeutigkeitssatzes von § 4, 2 miteinander identisch.

Die allgemeine Relation (6) ergibt sich jetzt folgendermaßen: Für den doppelten Mittelwert haben wir wiederum $\Delta_x w = \Delta_y w$ und andererseits die Darbouxsche Gleichung

$$\Delta_x w = \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr}$$

$$\Delta_y w = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss}\,,$$

d. h.

$$(8)\qquad \frac{m-1}{r} w_r + w_{rr} = \frac{m-1}{s} w_s + w_{ss}\,.$$

Für $s = 0$ betrachten wir $w(x, y, r, 0)$ als bekannt und haben außerdem $w_s(x, y, r, 0) = 0$. Durch diese Anfangsbedingungen ist $w(x, y, r, s)$ wiederum eindeutig bestimmt, wie man genau nach dem Muster von § 4, 2 erkennt.

Setzt man $w(x, y; r, s) = u(r, s)$ und $w(x, y; s, r) = v(r, s)$, so genügen beide Funktionen u und v derselben Differentialgleichung (8) mit den Anfangsbedingungen $u(r, 0) = w(r, 0)$; $u_s(r, 0) = 0$ und $v(r, 0) = w(0, r)$; $v_s(r, 0) = 0$. Da aber auf Grund des speziellen Mittelwertsatzes (5): $w(0, r) = w(r, 0)$ gilt, so müssen wegen des Eindeutigkeitssatzes die beiden Lösungen miteinander übereinstimmen, es ist also $v(r, s) = w(r, s) = w(x, y, r, s)$ identisch in r und s. q. e. d.

Da die Mittelwertgleichung (5) für jede Kugeloberfläche vom Radius r besteht, so erhalten wir durch Integration nach r sofort einen entsprechenden *Mittelwertsatz für das Innere von Kugeln*, nämlich die Gleichung

$$(5')\qquad \begin{cases} \int\limits_{\varrho \leqq r}\!\!\cdots\!\int u(x_1 + \xi_1, \ldots, x_m + \xi_m; y_1, \ldots, y_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m \\ \qquad = \int\limits_{\varrho \leqq r}\!\!\cdots\!\int u(x_1, \ldots, x_m; y_1 + \xi_1, \ldots, y_m + \xi_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m, \end{cases}$$

wobei auf beiden Seiten über das Innere der Kugel $\varrho^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2 \leqq r^2$ zu integrieren ist.

Hieraus folgt sodann ein entsprechender Satz auch für den Fall $n > m$, d. h. für den Fall der Differentialgleichung

$$u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = u_{y_1 y_1} + \cdots + u_{y_m y_m}.$$

Denn ist in der für $m = n$ geschriebenen Relation (5′) u von den Variablen $y_{m+1}, \ldots, y_n$ unabhängig, so ergibt sich die allgemeinere Aussage

$$\int_{\varrho \leqq r} \cdots \int u(x_1 + \xi_1, \ldots, x_n + \xi_n; y_1, \ldots, y_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$$

$$(5'') \qquad = \frac{\omega_{n-m}}{n-m} \int_{\varrho_1 \leqq r} \cdots \int (r^2 - \varrho_1^2)^{\frac{n-m}{2}} u(x_1, \ldots, x_n; y_1 + \xi_1, \ldots, y_m + \xi_m)\, d\xi_1 \ldots d\xi_m$$

mit $\varrho_1^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2$ und $\varrho^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$, in der dann im Fall $n = m$ der Faktor $\frac{\omega_{n-m}}{n-m}$ rechts durch 1 zu ersetzen ist.

2. Anderer Beweis des Mittelwertsatzes. Ein zweiter Beweis des allgemeinen Mittelwertsatzes (6) unter stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ergibt sich, indem wir mit Hilfe einer Funktion $v(a, b)$ setzen

$$(9) \qquad w(r, s) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} v(\alpha r, \beta s)\, (1 - \alpha^2)^{\frac{m-3}{2}} (1 - \beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\alpha\, d\beta$$

und w als hinreichend oft differenzierbar annehmen, so daß gemäß § 6 die gerade Funktion v zu w eindeutig bestimmt werden kann. Dabei ist nach § 6:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (v_{aa}(\alpha r, \beta s) - v_{bb}(\alpha r, \beta s))\, (1 - \alpha^2)^{\frac{m-3}{2}} (1 - \beta^2)^{\frac{m-3}{2}} d\alpha\, d\beta$$

$$\frac{m-1}{\;} w_r + w_{rr} - \frac{m-1}{\;}$$

woraus sich wegen (8) ergibt:

$$v_{aa} = v_{bb}$$

also

$$v(a, b) = g(a + b) + h(a - b);$$

dieser Ausdruck in (9) eingesetzt, ergibt einen in r und s symmetrischen Ausdruck und daher die gewünschte Gleichung $w(r, s) = w(s, r)$.

3. Anwendung des Mittelwertsatzes auf die Wellengleichung. Als Anwendung des Mittelwertsatzes betrachten wir wiederum das Anfangswertproblem der Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = 0$ mit den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = \psi(x)$; $u_t(x, 0) = 0$ mit anderen Worten, wir suchen wiederum in der Zeit t gerade Lösungen der Wellengleichung. Zu diesem Zweck fassen wir die Wellengleichung als Spezialfall der ultrahyperbolischen Differentialgleichung (1) auf, indem wir $y_1 = t$ setzen und die zusätzliche Bedingung stellen, daß die Lösung u nicht von

$y_2, \ldots, y_m$ abhängt. Nunmehr wenden wir den Mittelwertsatz an für einen beliebigen Punkt x des x-Raums und den Nullpunkt $y_i = 0$ des y-Raumes. Es wird dann

$$(10) \qquad \frac{1}{\omega_m} \int_{\Omega_m} \cdots \int u(x_1 + \beta_1 t, \ldots, x_m + \beta_m t; 0)\, d\omega_m = \frac{1}{\omega_m} \int_{\Omega_m} \cdots \int u(x_1, \ldots, x_m; t\beta_1)\, d\omega_m.$$

Der eine der beiden Mittelwerte ist also der schon früher betrachtete und aus den Anfangsbedingungen a priori bekannte Mittelwert $Q(x, t)$ der Anfangsfunktion ψ. Der andere Mittelwert rechts läßt sich, da der Integrand außer von den Parametern x nur von der einen Größe $t\beta_1$ abhängt, wiederum als ein einfaches Integral schreiben, nämlich

$$\frac{2\,\omega_{m-1}}{\omega_m\, t^{m-2}} \int^t u(x_1, \quad x_m, \varrho)\, (t^2 - \varrho^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\varrho.$$

Somit liefert der Mittelwertsatz die Integralrelation

$$(11) \qquad Q(x, t) = \frac{2\,\omega_{m-1}}{\omega_m\, t^{m-}} \qquad x, \varrho)\, (t^2 - \varrho^2)^{\frac{m-3}{2}}\, d\varrho,$$

welche mit der in § 6, 2 betrachteten identisch ist und dort durch ganzzahlige bzw. halbzahlige Differentiation gelöst wurde.

Der Mittelwertsatz enthält somit den tieferen Kern der dort dargelegten Lösungsmethode. Diese Anwendung läuft darauf hinaus, daß man in der Wellengleichung die räumlichen Parameter und den Zeitparameter als völlig gleichwertig behandelt durch Einführung weiterer künstlicher „Zeitparameter“.

4. Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems der Wellengleichung. Eine weitere Anwendung des Asgeirssonschen Mittelwertsatzes ist die folgende Methode zur Lösung des in § 4, 1 formulierten charakteristischen Anfangswertproblems der Wellengleichung

$$(12) \qquad u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0$$

in drei Raumdimensionen. Die Werte u seien vorgegeben auf dem Kegel

$$K = x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

und es sei also

$$u\left(x, y, z, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \psi(x, y, z)$$

bekannt. Gesucht ist eine (für $K \leqq 0$ reguläre) Lösung der Gleichung (12), die auf $K = 0$ stetig die vorgegebenen Werte annimmt.

Wir konstruieren die Lösung dieses Problems zunächst auf der Achse $x = y = z = 0$ des Kegels und wenden hierzu den Mittelwertsatz an, welcher liefert:

$$2\pi t \int^{2t} u(0, 0, 0, r)\, dr = t^2 \iint \psi(\alpha t, \beta t, \gamma t)\, d\omega$$

oder

$$2\pi \int_0^t u(0,0,0,r)\,dr = t \iint_\Omega \psi\left(\frac{\alpha}{2}t, \frac{\beta}{2}t, \frac{\gamma}{2}t\right) d\omega,$$

wobei rechts über die Oberfläche der Einheitskugel des α, β, γ-Raumes zu integrieren ist. Daraus folgt durch Differentiation sofort

$$u(0,0,0,t) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Omega \psi\left(\frac{\alpha t}{2}, \frac{\beta t}{2}, \frac{\gamma t}{2}\right) d\omega + \frac{t}{4\pi} \iint_\Omega (\alpha\,\psi_x + \beta\,\psi_y + \gamma\psi_z)\,d\omega.$$

Hierbei sind auch im letzten Integral in ψ_x, ψ_y, ψ_z die Argumente $\frac{\alpha}{2}t$, $\frac{\beta}{2}t$, $\frac{\gamma}{2}t$ einzutragen. Um u in einem beliebigen nicht auf der t-Achse liegenden Punkte P mit $K < 0$ zu bestimmen, haben wir ihn lediglich durch eine *Lorentz-Transformation*, d. h. eine Transformation, welche den charakteristischen Kegel unverändert läßt, in einen Punkt der Zeitachse hineinzutransformieren. Wenn P die Koordinaten $x = x_0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = t_0$ mit $x_0 < t_0$ besitzt, so wird diese Transformation durch die Substitution

$$(14)\qquad \begin{aligned} x &= - \qquad\qquad x' + \qquad\qquad t' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= -\frac{}{\sqrt{t_0^2 - x_0^2}}\, x' + \frac{}{\sqrt{t_0^2 - x_0^2}} \end{aligned}$$

geleistet, wobei P übergeht in einen Punkt P' mit den Koordinaten

$$x' = y' = z' = 0$$
$$t' = \sqrt{t_0^2 - x_0^2}.$$

Unsere Formel (13) bleibt, da bei der Lorentztransformation (14) die Differentialgleichung nicht verändert wird, anwendbar auf die Funktion

$$v(x', y', z', t') = u(x, y, z, t)$$

mit den Randwerten

$$\chi(x', y', z') = \psi(x, y, z)$$

und es folgt daher

$$\begin{aligned} u(x_0, 0, 0, t_0) &= v\left(0, 0, 0, \sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_\Omega \chi\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}, \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}, \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right) d\omega \\ &\quad + \frac{t'}{4\pi} \iint_\Omega (\alpha\,\chi_{x'} + \beta\,\chi_{y'} + \gamma\,\chi_{z'})\,d\omega, \end{aligned}$$

wobei wiederum im letzten Integral als Argumente in $\chi_{x'}, \chi_{y'}, \chi_{z'}$ die Größen $\frac{\alpha}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}$, $\frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}$, $\frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}$ einzutragen sind.

Drücken wir sodann wieder χ durch ψ aus, so folgt leicht:

$$u(x_0, 0, 0, t_0) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \psi\left(\frac{1}{2}(x_0 + \alpha t_0), \frac{\beta}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}, \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}\right) d\omega \tag{15}$$
$$+ \frac{t_0}{4\pi} \iint \alpha \psi_x d\omega + \frac{\sqrt{t_0^2 - x_0^2}}{4\pi} \iint\limits_{\Omega} (\beta \psi_y + \gamma \psi_z)\, d\omega.$$

Die Argumente in ψ_x, ψ_y, ψ_z sind dabei die gleichen wie in ψ, also:

$$(x_0 + \alpha t_0), \qquad\qquad \frac{\gamma}{2}\sqrt{t_0^2 - x_0^2}.$$

Danach ist u durch die Vorgabe von ψ in jedem Punkte P mit $t > 0$ und $Q < 0$ eindeutig bestimmt, indem man den Punkt P vorher durch eine Drehung des Koordinatensystems in die Ebene $y = z = 0$ transformiert denkt. Man erkennt: *Der Wert von u in einem Punkte P ist nur abhängig von den Anfangswerten v längs der Schnittellipse einer Ebene mit dem charakteristischen Kegel, welche mit dem Schnitt des Anfangskegels mit dem charakteristischen Kegel durch P identisch ist.*

Es sei als Aufgabe gestellt, zu verifizieren, daß die so konstruierte Funktion wirklich die Differentialgleichung und die Anfangsbedingung befriedigt. Beiläufig sei erwähnt, daß man in ähnlicher Weise auch das charakteristische Anfangswertproblem der ultrahyperbolischen Differentialgleichungen diskutieren kann.

5. Andere Anwendungen. Mittelwertsatz für konfokale Ellipsoide. Naturgemäß enthält der Asgeirssonsche Mittelwertsatz andere bekannte Mittelwertsätze aus der Theorie des Potentials und der hyperbolischen Differentialgleichungen. Z. B. erhalten wir den Mittelwertsatz der Potentialtheorie, indem wir eine Potentialfunktion $u(x_1, \ldots, x_m)$ als eine solche spezielle Lösung der Differentialgleichung (1) auffassen, welche überhaupt von keiner der Variablen y abhängt. Anwendung des Mittelwertsatzes (5) für einen beliebigen Punkt x und den Nullpunkt $y_i = 0$ liefert dann unmittelbar den Mittelwertsatz der Potentialtheorie. Ebenso folgt dieser Satz direkt aus dem allgemeineren Satz (5″) für $m = 0$.

Einen weniger trivialen Mittelwertsatz der Potentialtheorie erhalten wir folgendermaßen: Es sei $u(x_1, \ldots, x_m)$ eine Lösung der Potentialgleichung $\Delta u = 0$. Wir führen statt der m Koordinaten x_i künstlich $2m$ neue Koordinaten ξ_i und η_i ein durch ein System von Gleichungen

$$x_i = \xi_i \operatorname{Cof} \alpha_i + \eta_i \operatorname{Sin} \alpha_i, \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

wo die Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ willkürliche Zahlen sein können. Dabei geht $u(x)$ in eine Funktion $\omega(\xi, \eta)$ der Variabeln $\xi_1, \ldots, \xi_m; \eta_1, \ldots, \eta_m$ über, und aus der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ wird die ultrahyperbolische Differentialgleichung

$$\Delta_\xi \omega = \Delta_\eta \omega.$$

Nunmehr wenden wir den Asgeirssonschen Mittelwertsatz in der Form (5′) an, und zwar für den Punkt $\xi_i = \eta_i = 0$ und auf die Kugel K_1:

$\xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2 \leqq r^2$ im ξ-Raum und die entsprechende Kugel K_2: $\eta_1^2 + \cdots + \eta_m^2 \leqq r^2$ im η-Raum. Diesen Kugeln entsprechen im x-Raum die beiden konfokalen Ellipsoide

$$S_1\colon \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\mathfrak{Cof}^2 \alpha_i} \leqq r^2$$

und

$$S_2\colon \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i^2}{\mathfrak{Sin}^2 \alpha_i} \leqq r^2;$$

die Mittelwerte über die Kugeln gehen in die Mittelwerte der Funktion $u(x)$ für das Innere der entsprechenden beiden Ellipsoide über. Da durch passende Wahl der Größen α_i und r mit unseren Formeln jedes beliebige Paar von konfokalen Ellipsoiden dargestellt werden kann, so erhalten wir unmittelbar den folgenden Satz:

In einer Schar konfokaler Ellipsoide ist der Mittelwert einer regulären Potentialfunktion über das Innere eines Ellipsoides für die ganze Schar konstant. Dieser Satz ist für $m = 3$ im wesentlichen äquivalent klassischen Resultaten über die Anziehung von Ellipsoiden.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß unsere letzte Anwendung sich einem allgemeinen Gesichtspunkt unterordnet: Man kann die ultrahyperbolische Differentialgleichung (1) durch eine Gruppe von linearen Transformationen in sich transformieren. Diese linearen Transformationen sind diejenigen, welche die charakteristische Form

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - y_i^2)$$

bis auf einen Faktor in sich transformieren und daher auch den charakteristischen Kegel unserer Differentialgleichung invariant lassen. Naturgemäß enthält diese — noch nicht näher studierte[1] — Gruppe als Unter-

[1] Vgl. jedoch für $m=3$ z. B. Felix Klein. Höhere Geometrie, 2. Aufl. Berlin 1926; hier erscheint diese Gruppe als Gruppe der Transformationen der Gesamtheit der Graden des dreidimensionalen Raumes in sich.

Dieser Zusammenhang findet seinen Ausdruck in einer weiteren Anwendung des Asgeirssonschen Mittelwertsatzes, die F. John für $m = 2$ und die ultrahyperbolische Gleichung

$$u_{x_1 y_1} = u_{x_2 y_1}$$

gemacht hat. (Vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit in Bull. Amer. math. Soc.) Wir deuten x_1, x_2, y_1, y_2 als Linienkoordinaten der Graden eines dreidimensionalen ξ, η, ζ-Raumes im Sinne der Liniengeometrie. Dann ist die allgemeinste im ganzen Raum definierte und gewissen Regularitätsvoraussetzungen im Unendlichen genügende Lösung dieser Differentialgleichung gegeben durch die Integrale einer willkürlichen Funktion von ξ, η, ζ über die Graden des Raumes. Der Asgeirssonsche Mittelwertsatz kann hier unter Bezugnahme auf die beiden Gradenscharen eines beliebigen einschaligen Hyperboloides des ξ, η, ζ-Raumes folgendermaßen ausgesprochen werden: Das Integral jeder Lösung u über die Graden der einen Schar ist gleich dem Integral über die Graden der anderen Schar.

gruppe nicht nur die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen, sondern auch die Lorentzgruppe in räumlich entsprechend niedrigeren Dimensionen. Anwendung einer Substitution der allgemeinen „Ultra-Lorentzgruppe" vor Anwendung des Mittelwertsatzes liefert eine Quelle für die Gewinnung von weiteren Mittelwertsätzen für Lösungen von Spezialfällen der ultrahyperbolischen Differentialgleichung.

§ 8. Betrachtungen über nichthyperpolische Anfangswertprobleme.

Der Asgeirssonsche Mittelwertsatz von § 7 bildet ein wertvolles Mittel, um Einblick in die eigentümlichen Verhältnisse zu gewinnen, welche bei *Anfangswertproblemen für ultrahyperbolische Differentialgleichungen* bzw. für hyperbolische Differentialgleichungen bei *nicht raumartigen Anfangsmannigfaltigkeiten* bestehen. Insbesondere werden wir erkennen, warum Anfangswertprobleme dieser Art nicht sachgemäß sind (vgl. Kap. III, § 7).

1. Bestimmung einer Funktion aus gewissen Kugelmittelwerten. Wir behandeln zunächst die folgende Vorfrage: Es sei eine stetig differenzierbare Funktion $f(x_1, \ldots, x_m, t)$ in der Umgebung von $t = 0$ des x, t-Raumes gesucht, welche gerade in t ist, d. h. für welche

$$f(x, t) = f(x, -t) \tag{1}$$

und dementsprechend

$$\frac{df}{dt}(x, 0) = 0$$

gilt und für welche die Integrale

$$g(x_1, \ldots, x_m, r) = g(x, r) = \int_{O_r}\!\!\cdots\!\int f(x_1 + \xi_1, \ldots, x_m + \xi_m, \tau)\, do = Q[f] \tag{2}$$

über Kugeloberflächen O_r:

$$\xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2 + \tau^2 = r^2$$

vom Radius r um die Punkte x, 0 eines gewissen Gebietes des x, t-Raumes als Mittelpunkte vorgegeben sind. Mit g ist auch der Ausdruck

$$G(x, r) = \int_0^r g(x, \varrho)\, d\varrho, \tag{3}$$

d. h. das Integral der unbekannten Funktion f über das ganze Innere der Kugel vom Radius r im $m+1$-dimensionalen x, t-Raum um den betreffenden Punkt der Ebene $t = 0$ gegeben. Wir können nunmehr $G(x, r)$ nach x_i differenzieren, wenn nur die Stetigkeit von f vorausgesetzt wird. Es ergibt sich, indem man G als Integral über das Kugelinnere auffaßt und von der Definition

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_m) - G(x_1, \ldots, x_m)}{h} = G_{x_i},$$

ausgeht,

$$(4) \qquad \frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{1}{r} \int_{O_r} \cdots \int f(x_1 + \xi_1, \ldots, x_m + \xi_m, \tau)\, \xi_i\, do.$$

Somit ist nicht nur das Integral der unbekannten Funktion f über die Oberfläche O_r der Kugel vom Radius r bestimmt, sondern auch das Integral

$$(5) \quad \int_{O_r} \cdots \int f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau)\, \eta_i\, do = x_i\, g(x_1, \ldots, x_m, r) + r G_{x_i} = D_i g, = Q[x_i f],$$

wobei

$$\eta_i = x_i + \xi_i \quad \text{und} \quad \tau$$

die Koordinaten auf der Oberfläche dieser Kugel $\sum_1^m \xi_i^2 + \tau^2 = r^2$ bedeuten. Die Operation D_i ist also dieselbe Mittelbildung wie in (2), nur angewandt auf $x_i f$, statt auf f.

Wenn wir nunmehr dieselbe Betrachtung statt auf die Funktion f auf die Funktion $x_i f$ anwenden und diesen Prozeß beliebig oft wiederholen, erkennen wir, daß aus der Vorgabe der Integrale g auch die Integrale

$$\int_{O_r} \cdots \int f(\eta_1, \ldots, \eta_m, \tau)\, P(\eta_1, \ldots, \eta_m)\, do = P(D_1, \ldots, D_m)\, g$$

bekannt sind, wobei P irgendein Polynom bedeutet.

Indem wir das Oberflächenelement der Kugel O_r durch

$$do_r = \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_m}{\sqrt{\Omega^2 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_m^2}}$$

ausdrücken, formen wir diesen bekannten Ausdruck in

$$\int \cdots \int (f(\eta_1, \ldots, \eta_m \tau) + f(\eta_1, \ldots, \eta_m, -\tau))\, P(\eta_1, \ldots, \eta_m) \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_m}{\sqrt{r^2 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_m^2}}$$

um. Wegen der Vollständigkeit der Polynome P in der m-dimensionalen Kugel $\xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2 \leqq r^2$ und wegen der Voraussetzung (1) ist also durch die bekannten Ausdrücke $P(D_1, \ldots, D_m)\, g$ die Funktion $(r^2 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_m^2)^{-1/2} f$, also auch f selbst eindeutig bestimmt:

Eine stetige in t gerade Funktion f ist durch ihre Kugelmittelwerte g eindeutig bestimmt, und zwar kennen wir f für alle Punkte auf Kugeln, mit Radien r, wenn die Mittelwerte g für alle Kugeln mit benachbarten Mittelpunkten und Radien bis zu $r + \varepsilon$ bekannt sind. Lassen wir die Voraussetzung (1) fallen, so ist jedenfalls $f(x, t) + f(x, -t)$ in dem betreffenden Bereiche bestimmt.

Nunmehr beachten wir die folgende wichtige Tatsache: Zur Berechnung des Operators $D_i g$ für irgendein Wertsystem $x_1^0, \ldots, x_m^0, r^0$ genügt es, den Mittelwert $g(x, r)$ von $f(x, t)$ für

$$(6) \qquad \begin{gathered} 0 \leqq r \leqq r^0 \\ \sum^m (x_i - x_i^0)^2 \leqq \varepsilon^2 \end{gathered}$$

zu kennen, wo ε beliebig klein sein darf, und dasselbe gilt für die Berechnung aller Polynome $P(D_1, \ldots, D_m)\, g$.

Daraus folgt, daß durch Vorgabe von g für die durch (6) gekennzeichneten Wertsysteme unter der Voraussetzung eines in t geraden f die Funktion f in der ganzen Kugel

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leqq r_0^2$$

eindeutig bestimmt ist. Dadurch aber, daß f in dieser Kugel bekannt ist, können wir nunmehr um jeden Punkt mit $t = 0$ im Innern dieser Kugel als Mittelpunkt wiederum das entsprechende Integral $g(x, t, r)$ in eindeutiger Weise bestimmen, vorausgesetzt daß

$$(7) \qquad r + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2}$$

gilt. Zusammengefaßt:

Durch Vorgabe von g in dem zylindrischen Bereich (6) *von beliebig kleiner Dicke ε ist g schon eindeutig in dem ganzen Doppelkegel* (7) *bestimmt*; (dies gilt übrigens auch für nichtgrade f) (vgl. Abb. 40).

Abb. 40.

2. Anwendungen auf das Anfangswertproblem. Wir betrachten die ultrahyperbolische Gleichung

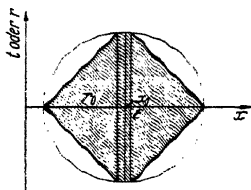
$$(8) \qquad \sum_{i=1} u_{y_i y_i} = \sum_{i=1} u_{x_i x_i} + u_{tt},$$

wobei wir $x_n = x_{m+1} = t$ auszeichnen, $n \geqq 2$ voraussetzen und nicht notwendig $l = n$ vorauszusetzen brauchen. Wir suchen z. B. eine in t gerade Lösung durch Vorgabe ihrer Werte auf der Ebene $t = 0$ festzulegen; es sei also für $t = 0$

$$u_t(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad u = \psi(x, y)$$

vorgegeben. Wir betrachten nun die Anfangswerte in einem Gebiet des x, y-Raumes, wobei y in irgendeinem Gebiet G des y-Raumes R liegt, während x innerhalb der kleinen Kugel

$$(9) \qquad \sum^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqq \varepsilon^2$$

variiert. Das Gebiet, in dem die Anfangswerte vorgeschrieben sind, ist also das „Produktgebiet" einer kleinen Kugel im x-Raum mit irgendeinem Gebiet G im y-Raum. Betrachten wir die Lösung u als Funktion von x, t mit y als Parameter, so sind durch diese Vorgaben die Integrale

von u über die Kugeloberflächen des x, t-Raumes bestimmt, für deren Mittelpunkte x_i, t:

$$t = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqq \varepsilon^2$$

ist und deren Radien kleiner oder gleich einer gewissen Zahl r^0 bleiben; dabei ist r^0 der Radius der größten Kugel um den Punkt y im y-Raume R, welche noch ganz in G liegt.

Dies folgt aus dem Mittelwertsatz von § 7 unmittelbar für $n > l$. Ist $n < l$, so liefert dieser Mittelwertsatz zunächst nur die Integrale $\iint\limits_{V_r} u(x, t) \left(r^2 - t^2 - \sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{\frac{l-n}{2}} dx\,dt$ über das Innere V_r jeder Kugel im x, t-Raum vom Radius $r \leqq r^0$ und einem Mittelpunkt $x_1, \ldots, x_m$; $t = 0$ mit $\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqq \varepsilon^2$. Bezeichnen wir das Integral von u über die Oberfläche einer solchen Kugel vom Radius r mit $J(r)$, so wird das obige Integral $\int_0^r J(\varrho)(r^2 - \varrho^2)^{\frac{l-n}{2}} d\varrho$. Kennt man aber diesen Ausdruck für $r < r^0$, so ist auch $J(r)$ für $r \leqq r^0$ eindeutig bestimmt, wie aus unseren früheren Betrachtungen (vgl. § 6, 2) durch Zurückführung auf eine Abelsche Integralgleichung folgt. Damit ist auch für $l > n$ die behauptete Aussage bewiesen.

Nach Nr. 1 ist infolgedessen die gesuchte gerade Funktion $u(x, y, t)$ in der ganzen Kugel

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 + t^2 \leqq r^{0\,2}$$

eindeutig bestimmt. Insbesondere sind also auch für $t = 0$ die Anfangswerte $u(x, y, 0)$ in der Kugel

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqq r^{0\,2} \tag{10}$$

des m-dimensionalen Anfangsraumes R_m bestimmt, und wir erhalten also das merkwürdige Resultat:

Sind für eine in der Zeit t gerade Lösung der ultrahyperbolischen Gleichung (8) *die Anfangswerte u für y in G und x in einer beliebig kleinen Kugel $\sum (x_i - x_i^0)^2 \leqq \varepsilon^2$ bekannt* (vgl. Nr. 1), *so sind dadurch die Anfangswerte in eindeutiger Weise überall in der größeren Kugel*

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 \leqq r^{0\,2}$$

bestimmt, wobei r^0 wie oben definiert ist. Dasselbe Resultat besteht auch für nichtgrade Lösungen.

Daraus folgt die *Unmöglichkeit willkürlicher Vorgabe von Anfangswerten $u(x, y, 0)$.*

Gibt man z. B. bei der Gleichung

$$u_{y_1 y_1} + u_{y_2 y_2} - u_{xx} - u_{tt} = 0 \tag{11}$$

die Anfangswerte $u(y_1, y_2, x, 0)$ vor in einem Kreis G: $(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2 \leqq a^2$ der y-Ebene und $|x - x^0| \leqq \varepsilon$, d. h. in einer dünnen zylindrischen Scheibe des y_1, y_2, x-Raumes parallel zur y_1, y_2-Ebene, so ist a priori $u(y_1, y_2, x)$ in dem Doppelkegel

$$\sqrt{(y_1 - y_1^0)^2 + (y_2 - y_2^0)^2} + |x - x^0| \leqq a$$

eindeutig bestimmt.

Ist entsprechend bei der Wellengleichung

$$u_{yy} - u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} - u_{tt} = 0, \tag{12}$$

wobei aber „unsachgemäß" die Rolle der Raumvariablen y und der Zeitvariablen t vertauscht ist, die Funktion $u(y, x_1, x_2, t)$ für $t = 0$ in dem dünnen Zylinder parallel zur y-Achse

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 \leqq \varepsilon^2, \quad (y - y^0) \leqq a$$

Abb. 41.

vorgegeben, so ist der Anfangswert $u(y, x_1, x_2, 0)$ sogleich in dem Doppelkegel

$$\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} + |y - y^0| \leqq a$$

eindeutig bestimmt.

Man sieht also, daß *bei der Wellengleichung Vorgabe der Anfangswerte auf einer nicht raumartigen Ebene nicht in willkürlicher Weise möglich ist.*

Abb. 42.

Ist bei der allgemeinen Gleichung (8) der Anfangswert $u(y_1, y_2, \ldots, y_l; x_1, \ldots, x_m, 0)$ für

$$\sum (y_i - y_i^0)^2 \leqq a^2, \quad \sum (x_i - x_i^0)^2 \leqq \varepsilon^2$$

vorgegeben, so ist er von vornherein auch schon für das Gebilde

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2} \leqq a$$

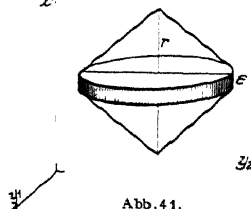
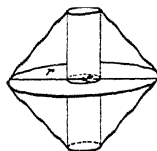
bekannt und die Lösung $u(y, x, t)$ für

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l} (y_i - y_i^0)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 + t^2} \leqq a$$

eindeutig festgelegt.

Für die Potentialgleichung $(l = 0)$

$$u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_m x_m} + u_{tt} = 0 \tag{13}$$

besagt dies: *Eine in t gerade Lösung, für welche $u(x, 0)$ in einer beliebig kleinen Kugel*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqq \varepsilon^2$$

bekannt ist, hat durch diese Vorgaben schon eindeutig bestimmte Werte in dem Gebiet

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + t^2 \leqq a^2$$

und insbesondere auch eindeutig bestimmte Anfangswerte für $t = 0$ *in*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \leqq a^2 .$$

Das Resultat über die Anfangswerte gilt wieder ohne Beschränkung auf grade Lösungen.

Diese letzte Aussage steht im Einklang mit dem uns schon bekannten analytischen Charakter dieser Lösungen. Im Falle von hyperbolischen bzw. ultrahyperbolischen Differentialgleichungen sind jedoch die Zusammenhänge zwischen den Werten einer Lösung auf den Anfangsebenen keineswegs mehr auf einer ähnlichen Grundlage selbstverständlich; vielmehr brauchen ja diese Anfangsfunktionen keineswegs analytisch zu sein. Wir haben es also bei den Werten der Lösungen dieser Differentialgleichungen längs solcher Ebenen mit dem bemerkenswerten Phänomen von nicht notwendig analytischen Funktionen zu tun, deren Verlauf aus ihrer Kenntnis in einem nach einer Richtung beliebig wenig ausgedehnten Gebiet schon für ein wesentlich weiteres Gebiet erschlossen werden kann [1].

§ 9. Die Methode von Hadamard zur Lösung des Anfangswertproblems [2].

In den vorangehenden Lösungen von Anfangswertproblemen bei konstanten Koeffizienten tritt zwar der Begriff der Charakteristiken implizite in den Abhängigkeitsgebieten auf, er spielt aber bei der Auffindung der Lösung — außer dem in § 2, 8 gegebenen Beispiel — keine Rolle. Im Gegensatz dazu bildet bei der *Methode von* HADAMARD, die nunmehr — unabhängig vom Vorangehenden — kurz dargestellt werden soll, die *charakteristische Mannigfaltigkeit* insbesondere das *charakteristische Konoid* den Ausgangspunkt. Diese Methode stellt eine Vertiefung und weitgehende Verallgemeinerung der in Kapitel V, § 4 für $n = 2$ gegebenen Riemannschen Methode dar, ist auf beliebige lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung auch mit nichtkonstanten Koeffizienten anwendbar und läßt sich sogar auf Systeme von Differentialgleichungen und Probleme höherer Ordnung verallgemeinern. Wir werden uns wegen der sonst notwendigen Weitläufigkeit der Rechnungen hier auf die Durchführung bei Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für $n = 3$ bzw. $n = 4$ beschränken, die Methode als solche jedoch in ihrer Allgemeinheit

---

[1] Vgl. hierzu F. JOHN: Math. Ann. Bd. 111, S. 542f., wo für die Gleichung von DARBOUX mit einer anderen Methode noch weitergehende Ergebnisse erzielt werden.

[2] Für den Grenzfall des Ausstrahlungsproblemes, wo die Methode eine etwas einfachere Form annimmt, siehe auch § 10.

skizzieren, wobei wir auf HADAMARDs ausführliches Buch über den Gegenstand verweisen[1].

1. Vorbemerkungen. Grundlösung. Allgemeine Methode. Bei der Integration der Differentialgleichung

$$L[u] = u_{xy} + a u_x + b u_y + c u = f(x, y) \tag{1}$$

mit zwei unabhängigen Veränderlichen war die *Riemannsche Funktion* (vgl. Kap. V, § 4) entscheidend. HADAMARD hat bemerkt, daß diese Riemannsche Funktion eng mit dem ursprünglich nur für elliptische Differentialgleichungen eingeführten Begriff der *Grundlösung* (vgl. Kap. IV, § 1) zusammenhängt. Bei der Potentialgleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ verstanden wir unter einer zum Punkt ξ, η gehörigen Grundlösung eine solche, welche sich in der Form $\log r +$ reguläre Funktion, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, darstellen läßt. Eine Grundlösung ist also auf dem hier aus einem einzigen Punkt $x = \xi$, $y = \eta$ bestehenden „charakteristischen Kegel" $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = 0$ singulär. Bei der hyperbolischen Differentialgleichung (1) ist der *charakteristische Kegel* das Gradenpaar $(x-\xi)(y-\eta) = 0$, und es ist daher zu vermuten, daß auch hier eine *Grundlösung der Form*

$$V = W \log \Gamma + \text{reguläre Funktion} \tag{2}$$

eine Rolle spielen wird, wobei W regulär,

$$\Gamma = (x-\xi)(y-\eta)$$

und

$$\sqrt{\Gamma} = r$$

die *geodätische Distanz* vom Punkt ξ, η bei der zu L gehörigen Maßbestimmung mit dem Linienelement $ds^2 = dx\,dy$ ist; (in § 2 haben wir gesehen, daß eine Singularität dieser Art lediglich auf einer charakteristischen Mannigfaltigkeit auftreten kann). Durch Einsetzen von (2) in die homogene Differentialgleichung (1) folgt

$$0 = L[W] \log \Gamma + \frac{1}{x-\xi}(W_y + aW) + \frac{1}{y-\eta}(W_x + bW) + \text{reguläre Funktion},$$

und wir entnehmen hieraus sofort, daß die Funktion $W(x, y; \xi, \eta)$ die Bedingungen

$$L[W] = 0$$

und

$$W_y + aW = 0 \quad \text{für} \quad x = \xi; \qquad W_x + bW = 0, \quad \text{für} \quad y = \eta$$

erfüllen muß. Mit anderen Worten: *Der Koeffizient W der „Grundlösung" (2) ist genau die in Kapitel V definierte Riemannsche Funktion* des Differentialausdrucks L. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß auch bei $n > 2$ unabhängigen Veränderlichen eine auf einem charakteristischen Kegel bzw. charakteristischen Konoid in analoger Weise

[1] Vgl. wieder Le Problème de CAUCHY et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Paris 1932, sowie die englische Originalausgabe.

singuläre Lösung als Grundlösung eine wichtige Rolle für die Differentialgleichung spielen wird.

Bei den *Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* für $u(x_1, \ldots, x_n, t)$

$$L[u] = u_{tt} - \Delta u - cu = 0 \tag{3}$$

gelangen wir zu einer solchen Grundlösung, indem wir nach Funktionen $v = v(r)$ fragen, welche nur von

$$r = \sqrt{\Gamma} = \sqrt{(t-\tau)^2 - \sum_{\nu=1}^{m} (x_\nu - \xi_\nu)^2} \tag{4}$$

abhängen und die Differentialgleichungen befriedigen. Für v ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v'' + \frac{m}{r} v' - cv = 0, \tag{5}$$

und ihre Lösungen können leicht durch Rekursion gefunden werden, indem man beachtet, daß mit der Lösung v für eine bestimmte Variablenzahl m die Funktion

$$w = \frac{v'}{r}$$

die entsprechende Differentialgleichung

$$w'' + \frac{m+2}{r} w' - cw = 0$$

für den Index $m+2$ erfüllt. Nun erhalten wir für $m = 0$ als Lösungen unserer Differentialgleichung $v = \mathfrak{Sin}\left(\sqrt{c}\, r\right)$ oder $v = \mathfrak{Cof}\left(\sqrt{c}\, r\right)$, ebenso für $n = 2$, $m = 1$ die Lösungen $v = J_0\left(\sqrt{-c}\, r\right)$, $v = N_0\left(\sqrt{-c}\, r\right)$, wobei[1]

$$N_0\left(\sqrt{-c}\, r\right) = \frac{2}{\pi} J_0\left(\sqrt{-c}\, r\right) \log r + R$$

die nullte Neumannsche Funktion ist, und der Ausdruck R eine reguläre Funktion bedeutet. — Die anderen Lösungen kommen, da für $r = 0$ regulär, als Grundlösungen nicht in Betracht. — Hieraus ergibt sich für $m = 2$, $n = 3$ die auf dem charakteristischen Kegel $\Gamma = 0$ in der verlangten Weise singuläre Lösung

$$V = \frac{1}{r} \mathfrak{Cof} \sqrt{c}\, r, \tag{6}$$

für $m = 3$, $n = 4$ die Lösung

$$V = \frac{J_0\left(\sqrt{-c}\, r\right)}{r^2} + \frac{1}{r} \sqrt{-c}\, J_0'\left(\sqrt{-c}\, r\right) \log r + \text{reguläre Funktion}, \tag{7}$$

wobei die Besselsche Funktion

$$J_0\left(\sqrt{-c}\, r\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{c}{4}\right)^{\nu} \frac{r^{2\nu}}{(\nu!)^2}$$

[1] Vgl. Bd. I, Kap. VII, insbesondere S. 432.

und $\frac{\sqrt{-c}}{r} J_0'(-\sqrt{cr})$ überall reguläre Funktionen sind. Allgemein erkennen wir, daß für ungerades

$$m + 1 = n = 2\nu + 1$$

Lösungen der Form

$$V = \frac{U}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} \tag{8}$$

für gerades

$$m + 1 = n = 2\nu$$

Lösungen der Form

$$V = \frac{U}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + W \log \Gamma \tag{9}$$

sich ergeben, wobei U und W reguläre Funktionen bedeuten und $L[W] = 0$ ist. Diese Lösungen (8), (9) heißen *Grundlösungen der Differentialgleichung* (3). Ebenso nennen wir jede Lösung, die aus (8) oder (9) durch Addition einer regulären Lösung entsteht, Grundlösung.

Für eine beliebige Differentialgleichung

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + c u = 0 \tag{10}$$

mit nicht notwendig konstanten Koeffizienten definiert man die *Grundlösung* V als eine solche, welche durch folgende Singularitäten charakterisiert ist. Wir betrachten zunächst in der Maßbestimmung mit dem Linienelement

$$ds^2 = \sum_{i,k} A_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

wobei die A_{ik} die Elemente der zur Matrix (a_{ik}) reziproken Matrix bedeuten, den *geodätischen Abstand* eines Punktes $x = (x_1, \ldots, x_n)$ von einem Punkt $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und nennen ihn

$$r(x, \xi) = \sqrt{\Gamma}. \tag{11}$$

Gemäß Kapitel II, § 9 genügt dann r bzw. das Quadrat

$$\Gamma = r^2$$

der Differentialgleichung

$$\sum_{i,k} A_{ik} r_i r_k = 1 \tag{12}$$

bzw.

$$\sum_{i,k} A_{ik} \Gamma_i \Gamma_k = 4\Gamma. \tag{13}$$

Nunmehr nennen wir *Grundlösung der Differentialgleichung* (10) *für ungerades*

$$n = 2\nu + 1 > 1$$

eine Lösung, welche die Form hat

$$V = \frac{U(x,\xi)}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + \cdots, \tag{14}$$

wobei $U(x, \xi)$ auch für $x = \xi$ eine reguläre Funktion bleibt.

Für $n = 2\nu$ gerade heißt eine Lösung Grundlösung, wenn sie die Form besitzt

$$V = \frac{U(x, \xi)}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + W \log \Gamma + \cdots, \tag{15}$$

wo wiederum U und W auch für $x = \xi$ regulär bleiben und im übrigen die Punkte reguläre Lösungen der Differentialgleichung bedeuten. Es zeigt sich, daß Grundlösungen dieser Art stets existieren und daß

$$L[W] = 0$$

gibt. Die Grundlösungen sind nur bis auf einen von x unabhängigen Faktor erklärt. Wir wählen ihn so, daß

$$u(x, \xi) = 1$$

ist.

Für die Konstruktion der Grundlösung im allgemeinen Fall sei auf das Werk von HADAMARD verwiesen und nur erwähnt, daß dabei die in § 2 diskutierten längs der charakteristischen Konoide geltenden Relationen wesentlich sind.

Das wesentliche formale Hilfsmittel zur Darstellung der Lösung unserer Differentialgleichungen

$$L[u] = f(x_1, \ldots, x_n) = f(x) \tag{17}$$

ist die *Greensche Formel*, welche zwischen dem Differentialausdruck $L[u]$ und dem *adjungierten Differentialausdruck*

$$M[v] = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(a_{ik} v) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + c v \tag{18}$$

besteht. Der adjungierte Differentialausdruck zu $L[u]$ ist ein Differentialausdruck $M[v]$, gekennzeichnet durch die Eigenschaft, daß für beliebige Funktionen v

$$v L[u] - u M[v] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_k - u \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik} v) + b_i u v\right) \tag{19}$$

ein *Divergenzausdruck* wird. Ist dabei $b_i = \sum \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}$, so gilt identisch $M[u] = L[u]$ und L heißt *selbstadjungiert*.

Die *Greensche Formel* für ein Gebiet G, welches von Flächen $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ mit den Richtungskosinus der Normalen

$$\frac{\partial x_i}{\partial \nu} = \frac{\varphi_i}{\sqrt{\sum_i \varphi_i^2}}$$

begrenzt ist, drückt dann einfach den *Gauss'schen Integralsatz* aus:

$$(20)\quad \begin{cases} \int\limits_G \cdots \int (v\,L[u] - u\,M[v])\,dx_1,\ldots,dx_n \\ \displaystyle -\int\limits_O \cdots \int \sum_i \left[v \sum_k a_{ik} u_k - u \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik} v) + b_i u v \right] \frac{\partial x_i}{\partial \nu}\,do = 0, \end{cases}$$

wobei do das Oberflächenelement auf der Oberfläche O von G bedeutet.

Wir betrachten nun das folgende *Anfangswertproblem* der Differentialgleichung (17). Es seien u und die Ableitungen einer Lösung u von $L[u] = f$ längs einer raumartigen Anfangsfläche $C: \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ mit

$$\sum a_{ik}\,\varphi_i \varphi_k > 0$$

vorgegeben. Gesucht ist der Funktionswert $u(P)$ in dem beliebigen Punkt P eines sich an C nach einer Seite anschließenden Bereiches.

Wir setzen voraus, daß das durch P gehende Integralkonoid der charakteristischen Gleichung, gebildet von allen durch P gehenden charakteristischen Strahlen zu (17) regulär bis zu der Anfangsfläche C ist, aus ihr einen $n-1$-dimensionalen Bereich B mit dem Rand β ausschneidet und daß B mit dem Mantel M des Konoids zusammen einen kegelartigen n-dimensionalen Bereich G definiert. Wir werden entsprechend zu den Ausführungen von § 4 sehen, daß der Bereich B das *Abhängigkeitsgebiet für den Punkt* P wird und daß man den Wert $u(P)$ vermöge der Anfangswerte in B eindeutig darstellen kann.

Zu diesem Zwecke liegt es nahe, die Greensche Formel (20) auf das Gebiet G anzuwenden und dabei für v eine Grundlösung V der adjungierten Gleichung $M[v] = 0$, für u die obige Lösung einzusetzen. Dabei würden jedoch wegen der Singularität die verschiedenen auftretenden Integrale divergieren. Nach HADAMARD begegnet man dieser Schwierigkeit durch einen Kunstgriff. Zunächst: Wir schneiden von der Spitze P des Konoidkegels ein kleines etwa ebenes Stück ab, begrenzt durch eine Fläche $D = D_\delta$, welche noch von einem Parameter δ abhängt und für $\delta \to 0$ in P übergehen soll. Zunächst sei δ als fest betrachtet.

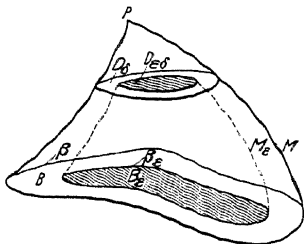



Abb. 43.

Ferner ersetzen wir den Mantel des Konoids durch eine von einem Parameter ε hinreichend oft differenzierbar abhängende, von innen her approximierende Fläche M_ε, welche für $\varepsilon \to 0$ gegen M strebt. M_ε schneide aus C die Anfangsfläche B_ε mit dem Rande β_ε aus, so daß $B_0 = C$ wird. M_ε, B_ε und der entsprechende Teil $D_\varepsilon = D_{\varepsilon,\delta}$ mögen ein Gebiet $G_{\varepsilon,\delta}$ begrenzen. Nunmehr wird die Greensche Formel auf das Gebiet $G_{\varepsilon,\delta}$ angewandt. Dabei zeigt es sich, daß bei festem δ und ungeradem $n = 2\nu + 1$ alle auftretenden Terme die folgende Form besitzen:

$$B(\varepsilon) = b + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\left(b_0 + b_1\varepsilon + \cdots + b_{\frac{n-3}{2}}\varepsilon^{\frac{n-3}{2}}\right) + (\varepsilon),$$

wobei (ε) einen für $\varepsilon \to 0$ gegen Null strebenden Ausdruck bedeutet und die Größen $b, b_0, \ldots$ von ε nicht abhängen. Wenn ε gegen Null strebt, wird dieser Ausdruck $B(\varepsilon)$ gegen ∞ streben. Wir nennen

$$b = {}^*B(\varepsilon)$$

den endlich bleibenden Anteil von $B(\varepsilon)$; er hat bei ungeradem n die wesentliche Eigenschaft, invariant gegen Transformationen des Parameters ε zu sein, weil der halbzahlige Exponent des Faktors vor der Klammer das Auftreten endlich bleibender von Null verschiedener Bestandteile aus dieser Klammer verhindert. Die Greensche Formel (20), angewendet auf $G_{\varepsilon\delta}$ liefert eine Gleichung der Form

$$\sum B^k(\varepsilon) = \sum b^k$$

$$(21) \qquad + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\left(\sum_k b_0^k + \varepsilon \sum_k b_1^k + \cdots + \varepsilon^{\frac{n-3}{2}} \sum_k b^k_{\frac{n-3}{2}}\right) + (\varepsilon) = 0,$$

wobei $\sum\limits_k b^k$ die Summe der endlichen Anteile der drei verschiedenen in der Greenschen Formel auftretenden Summanden, herrührend von Mantel, Deckel, Grundfläche und dem Gebiete selbst, bedeutet. Aus der Greenschen Formel folgt dann sofort, wenn wir ε gegen Null streben lassen, die Relation

$$(22) \qquad \sum_k b^k = 0,$$

d. h. *die Summe der endlichen Anteile in den Bestandteilen des Ausdrucks* (21) *ist Null.*

Die Gleichung (22) stellt eine Relation für die Funktion u dar. Läßt man dann δ gegen Null, also das Gebiet $G_{\varepsilon\delta}$ gegen G streben, so zeigt sich, daß diese Relation (22) für $\delta \to 0$ in die gewünschte Darstellungsformel für u übergeht, und zwar wird u ausgedrückt abgesehen von dem Raumintegral ${}^*\int\limits_G \ldots \int f\, V\, dx_1 \ldots dx_n$ durch Integrale über B und β, welche die Funktion U und die auf B vorgegebenen Anfangsdaten bzw. deren Ableitungen bis zur $\frac{n-3}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung enthalten.

Wesentlich bei der Methode ist, daß der endlich bleibende Anteil von Integralausdrücken der in der Greenschen Formel vorkommenden Art sich invariant leicht für jeden einzelnen Bestandteil berechnen läßt und daß man zur Gewinnung des Resultats dann nur über die verschiedenen Bestandteile zu summieren braucht.

Im Fall eines geraden $n = 2\nu$ können wir im Prinzip genau dieselben Überlegungen anstellen. Jeder einzelne Term unserer Greenschen Formel, angewandt auf $G_{\varepsilon\delta}$, hat dann, wie sich zeigt, die Form

$$(23)\qquad B(\varepsilon) = a \log \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}}\left(a_0 + a_1 \varepsilon + \cdots + a_{\frac{n-2}{2}}\, \varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\right) + (\varepsilon);$$

der endlich bleibende Anteil eines solchen Ausdrucks $a_{\frac{n-2}{2}}$ ist aber nunmehr nicht mehr invariant gegen Transformationen von ε.[1] Obwohl also auch hier die Summe der endlich bleibenden Anteile Null sein muß, würde die Auszeichnung dieser Anteile hier unsachgemäß sein. Daher hat HADAMARD den Fall eines geraden n durch die Absteigemethode, ausgehend von dem nächst höheren ungeraden n durchgeführt.

Man kann jedoch auch bei geradem n direkt zum Ziel kommen, indem man hier statt die endlich bleibenden Anteile die „*logarithmischen Anteile*", d. h. die Koeffizienten

$$a = {}_*B(\varepsilon)$$

betrachtet. Der logarithmische Anteil ist invariant gegen Transformationen von ε. Man erhält unmittelbar aus (23) die Formel

$$(24)\qquad \sum a^k = 0,$$

wobei $\sum a^k$ die Summe aller logarithmischen Anteile für die verschiedenen Terme in der Greenschen Formel ist. Es zeigt sich, daß diese Formel im Fall des geraden n genau wieder das gewünschte Resultat gibt. Wir erhalten so wiederum $u = u(P)$ ausgedrückt durch das Integral ${}_*\int\limits_G \cdots \int f V\, dx_1, \ldots, dx_n$ und Integrale über B und β, welche die Funktionen U und W sowie die Anfangsdaten und deren Ableitungen bis zur $\frac{n-2}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung enthalten[2].

Aus den geschilderten Formeln ergibt sich ein wesentliches Resultat bezüglich des *Prinzips von* HUYGHENS. Wir haben dieses Prinzip ausgesprochen als die Forderung, daß die Werte $u(P)$ nur von den Anfangsdaten längs des Randes β des Abhängigkeitsgebiets B abhängen sollen — wozu im Falle der unhomogenen Gleichung noch der Mantel des charakteristischen Konoides tritt —, nicht aber von den Anfangsdaten im Inneren des Abhängigkeitsgebiets B.

Es zeigt sich nun für gerades n, daß beim Ausdruck für $u(P)$ die auf die Grundfläche B und das Gebiet G bezüglichen Integrale nicht

---

[1] Z. B. geht der Ausdruck $b + \frac{a}{\varepsilon}$ mit dem endlichen Anteil b durch die Transformation $\varepsilon = \eta(1 + \eta)$ in $b + \frac{\alpha}{\eta}(1 + \eta + \cdots)$ über, hat also mit Bezug auf η den endlichen Anteil $b + a$.

[2] Auf die Brauchbarkeit des logarithmischen Anteils für ungerade n hat HADAMARD hingewiesen. Siehe auch FRIEDRICHS: Gött. Nachr. 1927, S. 172ff.

mehr von U, sondern nur von W abhängen, während U nur in den Integralen über den Rand β von B und — beim Vorhandensein einer rechten Seite f — in Integralen über den Mantel des Konoides auftritt. Damit nur diese letzten Integrale auftreten, oder, was gleichbedeutend ist, damit das Huyghenssche Prinzip gilt, ist notwendig und hinreichend, daß der logarithmische Anteil W der Grundlösung identisch verschwindet. Für ungerades n ergeben die Hadamardschen Darstellungsformeln, daß niemals das Huyghenssche Prinzip gelten kann:

Das Huyghenssche Prinzip gilt niemals für ungerades $n > 1$; für gerades $n = m + 1$ gilt es dann und nur dann, wenn der logarithmische Anteil W in der Grundlösung identisch verschwindet. Im Fall der Gleichung (3) mit konstanten Koeffizienten gilt daher mit Rücksicht auf (8), (9) das Huyghenssche Prinzip, nur für die reinen Wellengleichungen, d. h. für $c = 0$ und bei ungerader Anzahl von Raumdimensionen; wir fanden diese Tatsache schon explizite in § 5 bestätigt.

HADAMARD hat die interessante *Vermutung* ausgesprochen, daß im wesentlichen die Wellengleichungen für grades n die einzigen Differentialgleichungen sind, für welche das Huyghenssche Prinzip gilt; nämlich, daß jede andere solche Differentialgleichung durch Transformation der unabhängigen Veränderlichen, Multiplikation der Differentialgleichung mit einem Faktor und Einführung von $g(x_1, \ldots, x_n)\, u$ statt u als unbekannter Funktion aus der Wellengleichung entsteht, oder, wie man sagt, mit ihr gleichwertig ist.

Schließlich sei noch bemerkt, daß das Hadamardsche Resultat nicht nur eindeutig bestimmte Darstellungsformeln für die Lösung liefert, sondern, daß auch die Verifikation dieser Lösungen hinterher durchgeführt werden kann.

Wir beschränken uns daher darauf, die Methode im Fall $n = 3$ und $n = 4$ bei einer Differentialgleichung (3) für die Anfangsfläche $t = 0$ durchzuführen, wobei schon alle für die Technik der Rechnung wesentlichen Gesichtspunkte hervortreten.

2. Die allgemeine Wellengleichung in $m = 2$ Raumdimensionen. Wir betrachten das Anfangswertproblem der Differentialgleichung

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - c\,u = f(x, y, t) \tag{25}$$

für die Anfangswerte

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \qquad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y). \tag{26}$$

Dabei sei f und ψ als zweimal und φ als dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzt.

Da $n = m + 1 = 3$ ungerade ist, besitzen Grundlösungen der selbstadjungierten Gleichung

$$u_{tt} - \Delta u - c\,u = 0$$

die Gestalt

$$V(x, y, t;\ \xi, \eta, \tau) = \frac{U}{\sqrt{\Gamma}}, \tag{27}$$

wobei $r = \sqrt{\Gamma} = \sqrt{(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}$ der geodätische Abstand des Punktes x, y, t vom Punkte ξ, η, τ ist. Nach Nr. 1 ist

$$V = \frac{\operatorname{Cof}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} \tag{28}$$

eine solche Grundlösung; es ist also $U = \operatorname{Cof}\sqrt{c\Gamma}$.

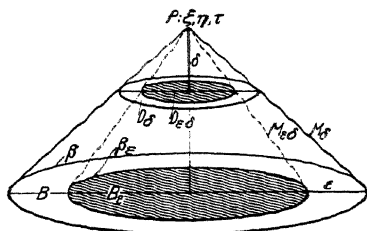
Wir betrachten nun für einen festen Punkt $P: \xi, \eta, \tau$ das Raumgebiet G, welches von dem charakteristischen Kegel $\Gamma = 0$ und dem von ihm aus der x, y-Ebene ausgeschnittenen Kreise B begrenzt wird, d. h. das Gebiet $G: \Gamma > 0,\ 0 < t < \tau$. Von diesem Kegelgebiet schneiden wir die Spitze durch eine ebene Schnittfläche im Abstande δ von P ab. Es entsteht der abgestumpfte Kegel

$$G_\delta: \Gamma > 0; \quad 0 < t < \tau - \delta.$$

Als Näherungsgebiet $G_{\varepsilon\delta}$ wählen wir sodann den abgestumpften Kegel $0 < t < \tau - \delta$; $(1-\varepsilon)^2 (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 > 0$ mit $0 < \varepsilon < 1$. Seine Grundfläche B_ε ist der Kreis

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 < (1-\varepsilon)^2 \tau^2. \qquad (t = 0)$$

Abb. 44.

Seine Deckfläche $D_{\varepsilon\delta}$ ist der Kreis $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \leqq (1-\varepsilon)^2 \delta^2$ $(t = \tau - \delta)$ und seine Mantelfläche $M_{\varepsilon\delta}$ der Kegel $(1-\varepsilon)^2 (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 = 0$. Im Limes $\varepsilon \to 0$ geht $G_{\varepsilon\delta}$ in den abgestumpften Kegel G_δ über mit dem Mantel M_δ, der Grundfläche B und der Deckfläche D_δ. Im Limes $\delta \to 0$ schließlich entsteht aus G_δ der ursprüngliche Kegel G. β sei der kreisförmige Rand von B, β_ε der Rand von B_ε.

Es sei nun u die Lösung der Gleichung $L[u] = f$ mit den Anfangswerten (26). Wir integrieren den Ausdruck

$$\begin{aligned} V L[u] - u L[V] = V f = (V u_t)_t - (V u_x)_x - (V u_y)_y \\ - (u V_t)_t + (u V_x)_x + (u V_y)_y \end{aligned} \tag{29}$$

über das Gebiet $G_{\varepsilon\delta}$ und erhalten die Relation

$$\left\{\begin{aligned} 0 = &-\iiint_{G_{\delta\varepsilon}} V f \,dx\,dy\,dt + \iint_{D_{\varepsilon\delta}} (V u_t - u V_t)\,dx\,dy - \iint_{B_\varepsilon} (V\psi - \varphi V_t)\,dx\,dy \\ &+ \iint_{M_{\varepsilon\delta}} \{ V(u_t t_\nu - u_x x_\nu - u_y y_\nu) - u(V_t t_\nu - V_x x_\nu - V_y y_\nu) \} do. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Dabei bedeuten x_ν, y_ν, t_ν die Richtungskonstanten der äußeren Normalen auf $M_{\varepsilon\delta}$ und übrigens die Kombination $u_t t_\nu - u_x x_\nu - u_y y_\nu$ die „transversale" Ableitung $\frac{\partial u}{\partial s}$ auf $M_{\varepsilon\delta}$. Unser Ziel ist, die bei $\varepsilon \to 0$ *endlich bleibenden Bestandteile* b^k der vier rechts stehenden Integrale zu

bestimmen. Bezeichnen wir den endlich bleibenden Bestandteil eines solchen Integrales wie in Nr. 1 mit ${}^*\iint$ bzw. ${}^*\iiint$, so entsteht aus (30) die Relation

$$(31)\quad \begin{aligned} {}^*\iiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} V f\,dx\,dy\,dt &= {}^*\iint\limits_{D_{\varepsilon\delta}} (V u_t - u V_t)\,dx\,dy - {}^*\iint\limits_{B_\varepsilon} V(\psi - \varphi V_t)\,dx\,dy \\ &+ {}^*\iint\limits_{M_{\varepsilon\delta}} \{V(u_t t_\nu - u_x x_\nu - u_y y_\nu) - u(V_t t_\nu - V_x x_\nu - V_y y_\nu)\}\,do. \end{aligned}$$

Wir werden sogleich erkennen, daß aus dieser Relation die gewünschte Lösung unseres Anfangswertproblems folgt.

Das erste Integral in (30) konvergiert mit $\varepsilon \to 0$ gegen das über G_δ erstreckte uneigentliche Integral. Denn $V = \dfrac{U}{\sqrt{\Gamma}}$ wird auf jeder zur x, y-Ebene parallelen Schnittebene des Kegels nur wie $\dfrac{1}{\sqrt{\tau - t - \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}}$ unendlich, wenn sich x, y einem Punkte des Mantels M nähert. Infolgedessen ist

$$(32)\quad {}^*\iiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} V f\,dx\,dy\,dt = \iiint\limits_{G_\delta} V f\,dx\,dy\,dt.$$

Um die übrigen Terme in (31) zu berechnen, führen wir statt x, y, t neue Integrationsvariable σ, μ, ϑ durch die Gleichungen ein:

$$\begin{aligned} x &= \xi + \sigma(1-\mu)\cos\vartheta \\ y &= \eta + \sigma(1-\mu)\sin\vartheta \\ t &= \tau - \sigma. \end{aligned}$$

Das Gebiet $G_{\varepsilon\delta}$ wird alsdann durch die Ungleichungen

$$\varepsilon \leqq \mu \leqq 1; \qquad \delta \leqq \sigma \leqq \tau; \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$$

charakterisiert. Ferner gilt $\mu = \varepsilon$ auf $M_{\varepsilon\delta}$, $\sigma = \delta$ auf $D_{\varepsilon\delta}$, $\sigma = \tau$ auf B_ε.

Wir untersuchen zunächst das Integral über $M_{\varepsilon\delta}$. Auf $M_{\varepsilon\delta}$ gilt

$$\begin{aligned} t_\nu\,do &= (1-\varepsilon)^2\,\sigma\,d\sigma\,d\vartheta \\ x_\nu\,do &= (1-\varepsilon)\,\sigma\cos\vartheta\,d\sigma\,d\vartheta \\ y_\nu\,do &= (1-\varepsilon)\,\sigma\sin\vartheta\,d\sigma\,d\vartheta \end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned} u_\sigma &= u_x(1-\varepsilon)\cos\vartheta + u_y(1-\varepsilon)\sin\vartheta - u_t \\ u_\mu &= -u_x\sigma\cos\vartheta - u_y\sigma\sin\vartheta, \end{aligned}$$

also folgt

$$V(u_t t_\nu - u_x x_\nu - u_y y_\nu)\,do = V(1-\varepsilon)\{\varepsilon(2-\varepsilon)\,u_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\,u_\sigma\}\,d\sigma\,d\vartheta$$

und analog

$$u(V_t t_\nu - V_x x_\nu - V_y y_\nu) = u(1-\varepsilon)\,\{\varepsilon(2-\varepsilon)\,V_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\,V_\sigma\}\,d\sigma\,d\vartheta.$$

Wegen $\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$ können wir V in der Form $V = \dfrac{R(\sigma,\mu,\vartheta)}{\sqrt{\mu}}$ schreiben, wobei $R(\sigma, \mu, \vartheta)$ eine überall in G_δ stetige und stetig differenzierbare Funktion bedeutet. Tragen wir diesen Ausdruck für V in den beiden

letzten Formeln ein, so folgt, daß unser Integral wegen $\mu = \varepsilon$ die Form besitzt

$$(33)\quad \begin{cases} \iint\limits_{M_{\varepsilon\delta}} \{V(u_t t_\nu - u_x x_\nu - u_y y_\nu) - u(V_t t_\nu - V_x x_\nu - V_y y_\nu)\}\, do \\ \qquad = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int\limits_\delta d\sigma \int\limits_0^{2\pi} R(\sigma, \vartheta)\, d\vartheta + (\varepsilon), \end{cases}$$

wobei $R(\sigma, \vartheta)$ wiederum in σ und ϑ stetig ist und (ε) mit ε gegen Null strebt. D. h.: *Das Integral über $M_{\delta\varepsilon}$ besitzt keinen endlichen Anteil.*

Die beiden übrigen Integrale in (31) behandeln wir gleichzeitig, indem wir das Integral $J_{\varepsilon,\sigma} = \iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} (V u_t - u V_t)\, dx\, dy$ über die Schnittfläche $D_{\varepsilon\sigma}$ des Kegels $G_{\varepsilon\delta}$ mit irgendeiner Ebene $t = \tau - \sigma$ betrachten. Wir schreiben

$$J_{\varepsilon\sigma} = \iint \frac{U u_t - u U_t}{\sqrt{\Gamma}}\, dx\, dy + \frac{1}{2} \iint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{uU - \bar{u}\bar{U}}{\sqrt{\Gamma^3}} \Gamma_t\, dx\, dy + \frac{1}{2} \iint \frac{\bar{u}\bar{U}}{\sqrt{\Gamma^3}} \Gamma_t\, dx\, dy.$$

Hierbei bezeichnen $\bar{u}$ und $\bar{U}$ die Werte von u bzw. U auf dem Randkreise β_σ von D_σ, d. h. genauer:

Ist $u(x, y, t) = u(\sigma, \mu, \vartheta)$, so bezeichnen wir mit $\bar{u}(x, y, t)$ den Wert $u(\sigma, 0, \vartheta)$. Entsprechend ist $\bar{U} = U(\sigma, 0, \vartheta)$ und daher die Funktion $\frac{uU - \bar{u}\bar{U}}{\Gamma}$ in D_σ beschränkt und stetig abgesehen vom Punkte $\mu = 1$.

Wir erkennen sofort, daß die beiden ersten Integrale rechts mit $\varepsilon \to 0$ gegen endliche Grenzwerte konvergieren, so daß also nur noch das letzte Integral zu untersuchen bleibt. Wegen $\Gamma = \sigma^2 \mu (2 - \mu)$; $\Gamma_t = -2\sigma$ und $dx\, dy = \sigma^2 (1 - \mu)\, d\mu\, d\vartheta$ wird

$$\frac{1}{2} \int\limits_{D_{\sigma\varepsilon}} \frac{\bar{u}\bar{U}}{\sqrt{\Gamma^3}} \Gamma_t\, dx\, dy = - \int\limits_0^{2\pi} \bar{u}\bar{U}\, d\vartheta \int\limits_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)\, d\mu}{\mu^{3/2}(2-\mu)^{3/2}}.$$

Setzen wir $1 - \mu = \lambda$, so geht das innere Integral über in

$$\int^{1-\varepsilon} \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}^{\,3}} = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right]_0^{1-\varepsilon}$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{2} \iint\limits_{D_{\sigma,\varepsilon}} \frac{\bar{u}\bar{U}}{\sqrt{\Gamma^3}} \Gamma_t\, dx\, dy = \int\limits_0 \bar{u}\bar{U}\, d\vartheta = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\beta_\sigma} \bar{u}\, U\, ds.$$

Es ist somit

$$(34)\quad {}^*J_{\varepsilon\sigma} = \iint\limits_{D_\sigma} \frac{U u_t - u U_t}{\sqrt{\Gamma}}\, dx\, dy + \frac{1}{2} \iint\limits_{D_\sigma} \frac{uU - \bar{u}\bar{U}}{\sqrt{\Gamma^3}} \Gamma_t\, dx\, dy + \frac{1}{\sigma} \int\limits_{\beta_\sigma} \bar{u}\bar{U}\, ds.$$

Für $\sigma = \delta$ gilt
$$\frac{dx\,dy}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{\delta(1-\mu)}{\sqrt{\mu}\,\sqrt{2-\mu}}\,d\mu\,d\vartheta$$
und
$$\frac{dx\,dy}{\sqrt{\Gamma}^3}\,\Gamma_t = -\frac{1-\mu}{\mu^{3/2}\,(2-\mu)^{3/2}}\,d\mu\,d\vartheta\,.$$

Da im ersten Integral $U u_t - u\,U_t$ beschränkt bleibt und im zweiten Integral $\frac{u\,U - \bar{u}\,\bar{U}}{\mu}$ mit δ gegen Null strebt [1], so konvergieren alsdann die über D_δ erstreckten ersten beiden Integrale mit δ gegen Null. So folgt

$$\lim_{\delta\to 0}{}^{*}\iint_{D_{\varepsilon\delta}} (V\,u_t - u\,V_t)\,dx\,dy = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{\delta} \bar{u}\,\bar{U}\,ds = 2\pi\,u(\xi,\eta,\tau)\,. \tag{35}$$

Aus (31) entsteht somit unter Berücksichtigung aller Ergebnisse im Limes $\delta \to 0$ die Endformel

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta,\tau) &= \frac{1}{2\pi}\iiint_G V f\,dx\,dy\,dt + \frac{1}{2\pi\tau}\int_\beta \bar{\varphi}\,\bar{U}\,ds \\ &+ \frac{1}{2\pi}\iint_B \frac{U\psi - U_t\varphi}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy + \frac{1}{4\pi}\iint_B \frac{U\varphi - \bar{U}\bar{\varphi}}{\sqrt{\Gamma}^3}\,\Gamma_t\,dx\,dy\,, \end{aligned} \tag{35}$$

die uns die gewünschte Darstellung der Lösung durch die Funktionen f, φ, ψ liefert.

Da nach (2) die Funktion U die Gestalt $U = \mathfrak{Cof}\,\sqrt{c\,\Gamma}$ besitzt, gilt $\bar{U} = U(0) = 1$, und wir können explizit schreiben:

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta,\tau) &= \frac{1}{2\pi}\iiint_G \frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{c\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} f\,dx\,dy\,dt + \frac{1}{2\pi t}\int_\beta \bar{\varphi}\,ds \\ &+ \frac{1}{2\pi}\iint_B \frac{\psi\sqrt{\Gamma}\,\mathfrak{Cof}\sqrt{c\,\Gamma} + \varphi\sqrt{c}\,\tau\,\mathfrak{Sin}\sqrt{c\,\Gamma}}{\Gamma}\,dx\,dy \\ &+ \frac{1}{4\pi}\iint \frac{\varphi\,\mathfrak{Cof}\sqrt{c\,\Gamma} - \bar{\varphi}}{\sqrt{\Gamma}^3}\,\Gamma_t\,dx\,dy\,, \end{aligned} \tag{35'}$$

oder auch, nach einfacher Umformung:

$$\begin{aligned} u = {}_{2\pi} \qquad & \frac{\mathfrak{Cof}\sqrt{c\,\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}} f\,dx\,dy\,dt + \frac{1}{2\pi} \qquad \frac{\psi\,\mathfrak{Cof}\sqrt{c\,\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy\, + \\ & + \frac{\partial}{\partial\tau}\,\frac{1}{2\pi} \qquad \frac{\psi\,\mathfrak{Cof}\sqrt{c\,\Gamma}}{\sqrt{\Gamma}}\,dx\,dy\,. \end{aligned} \tag{35''}$$

Diese Formel steht im Einklang mit dem Ergebnis in § 5,7, für den Spezialfall $\varphi = f = 0$ [vgl. § 5,7, Formel (79), (80) für $n = 2$].

---

[1] Denn der Abstand eines Punktes $(x, y, t) = (,\sigma\,\mu, \vartheta)$ von dem zugehörigen Randpunkte $\sigma, 0, \vartheta$ hat den Wert $\sigma\,\mu$. Also gilt $u\,U - \bar{u}\,\bar{U} \leqq C\,\delta\,\mu$, da $u\,U$ stetig differenzierbar ist.

3. Die verallgemeinerte Wellengleichung in $m = 3$ Raumdimensionen. Für das Anfangswertproblem der Differentialgleichung

$$L[u] = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} - cu = f(x, y, z, t) \tag{36}$$

mit den Anfangswerten

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \qquad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z)$$

setzen wir voraus: f besitze stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung, φ und ψ stetige erste Ableitungen.

Die Grundlösung der wiederum selbstadjungierten Gleichung $L[u] = 0$ besteht hier, da $n = m + 1 = 4$ gerade ist, aus dem Ausdruck

$$V(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{U}{\Gamma} + W \log \Gamma, \tag{37}$$

vermehrt um eine additive reguläre Funktion, wobei

$$\Gamma = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2$$

und nach Nr. 1

$$\begin{aligned} U &= J_0\left(\sqrt{-c\Gamma}\right) \\ W &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-c}{\Gamma}}\, J_0'\left(\sqrt{-c\Gamma}\right) \end{aligned} \tag{38}$$

zu setzen ist. Dabei genügt W der Differentialgleichung $L[W] = 0$. Die Grundlösung selber ist übrigens gleich

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-c}\,\frac{N_1\left(\sqrt{-c\Gamma}\right)}{\sqrt{\Gamma}}.$$

N_1 ist dabei die erste Neumannsche Funktion (vgl. Bd. I, Kap. VII).

Wir bestimmen zunächst analog wie in Nr. 1 das Näherungsgebiet $G_{\varepsilon\delta}$ zu dem Kegelgebiet

$$G: \quad \Gamma \geqq 0; \quad 0 \leqq t \leqq \tau.$$

Führen wir statt x, y, z, t neue Variable $\sigma, \mu; \alpha, \beta, \gamma$ durch die Relationen ein:

$$\begin{aligned} x &= \xi + \sigma(1-\mu)\alpha \\ y &= \eta + \sigma(1-\mu)\beta \\ z &= \zeta + \sigma(1-\mu)\gamma \\ t &= \tau - \sigma, \end{aligned} \tag{39}$$

wobei α, β, γ Parameter auf der Einheitskugel $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ sind, so wird $G_{\varepsilon\delta}$ definiert durch die Ungleichungen $\varepsilon \leqq \mu \leqq 1$, $\delta \leqq \sigma \leqq \tau$. Der Rand $O_{\varepsilon\delta}$ von $G_{\varepsilon\delta}$ besteht dann aus dem Kegelmantel $M_{\varepsilon\delta}$ mit $\mu = \varepsilon$, der Grundfläche B_ε mit $\sigma = \tau$ und der Deckfläche $D_{\varepsilon\delta}$ mit $\sigma = \delta$.

Wir wenden nun auf dieses Näherungsgebiet $G_{\varepsilon\delta}$ die Greensche Formel an, die wir abkürzend in der Form

$$\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} (v\,L[u] - u\,L[v])\,dx\,dy\,dz\,dt = \iiint\limits_{O_{\varepsilon\delta}} \left(v\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial v}{\partial s}\right) do \tag{40}$$

schreiben, wobei unter $\frac{\partial}{\partial s}$ (vgl. § 2) der Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial s} = t_\nu \frac{\partial}{\partial t} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x} - y_\nu \frac{\partial}{\partial y} - z_\nu \frac{\partial}{\partial z} \tag{41}$$

zu verstehen ist, der die „transversale Ableitung" auf $O_{\varepsilon\delta}$ kennzeichnet. $x_\nu, y_\nu, z_\nu, t_\nu$ sind wiederum die Richtungskonstanten der äußeren Normalen auf $O_{\varepsilon\delta}$.

Wir setzen für v die obige Grundlösung $V +$ reguläre Funktion ein und bestimmen nach Nr. 1 nunmehr den *logarithmischen Anteil* der Einzelintegrale, den wir mit dem Symbol $_*\iiint$ bzw. $_*\iiiint$ bezeichnen wollen. Da der additive reguläre Bestandteil der Grundlösung keinerlei logarithmische Anteile liefern kann, so wird in den Formeln nur der Ausdruck $V = \frac{U}{\Gamma} + W \log \Gamma$ selbst in Erscheinung treten. Wir erhalten sodann die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} {}_*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} V f\, dx\, dy\, dz\, dt &= {}_*\iiint\limits_{M_{\varepsilon\delta}} \left(V \frac{\partial u}{\partial s} - u \frac{\partial V}{\partial s}\right) do \\ &- {}_*\iiint\limits_{B_\varepsilon} (V\psi - \varphi V_t)\, dx\, dy\, dz + {}_*\iiint\limits_{D_{\varepsilon\delta}} (V u_t - u V_t)\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right. \tag{42}$$

Wir berechnen zunächst den links stehenden Ausdruck

$$_*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} V f\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Da das Integral $\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} f W \log \Gamma\, dx\, dy\, dz\, dt$ mit $\varepsilon \to 0$ gegen einen endlichen Wert konvergiert, so ist sein logarithmischer Anteil Null, und wir haben somit

$$\begin{aligned} {}_*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} V f\, dx\, dy\, dz\, dt &= {}_*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} \frac{Uf}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz\, dt \\ &= {}_*\iiiint \frac{(Uf - \bar U \bar f)}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz\, dt + {}_*\iiiint \frac{\bar U \bar f}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz\, dt. \end{aligned}$$

Hierbei ist mit $\bar U$ bzw. $\bar f$ der Wert von U bzw. f auf dem Kegelmantel M bezeichnet, und zwar ist genauer z. B. $\bar U$ gleich dem Werte von U in demjenigen Mantelpunkte, in welchem der durch x, y, z, t und die Kegelachse, zur x, y, z-Ebene parallele Strahl den Mantel M trifft[1]. In Formeln: Das erste Integral rechts konvergiert mit $\varepsilon \to 0$ gegen einen endlichen Wert. Also folgt

$$\bar u(\sigma, \mu, \alpha, \beta, \gamma) = U(\sigma, 0, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$_*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} V f\, dx\, dy\, dz\, dt = {}_*\iiiint\limits_{G_{\varepsilon\delta}} \frac{\bar U \bar f}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz\, dt,$$

und hier ist die rechte Seite wegen

$$dx\, dy\, dz\, dt = \sigma^3 (1 - \mu)^2\, d\mu\, d\sigma\, d\omega$$

[1] Übrigens gilt wegen $U = J_0(\sqrt{-c\,\Gamma})$ auf M die Relation $\bar U = 1$.

und

$$\Gamma = \sigma^2 \mu (2-\mu)$$

gleich dem Ausdruck

$$\int_\delta^\tau \sigma\, d\sigma \iint_{\beta\sigma} \bar{U} \bar{f}\, d\omega \;{}_*\!\!\int_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)^2}{\mu(2-\mu)}\, d\mu .$$

Aus

$${}_*\!\!\int_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)^2}{\mu(2-\mu)}\, d\mu = \frac{1}{2}\, {}_*\!\!\int_\varepsilon^1 \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{2}$$

folgt dann schließlich

$$(43) \qquad {}_*\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int V f\, dx\, dy\, dz\, dt = -\frac{1}{2} \int_\delta^\tau \sigma\, d\sigma \iint_{\beta\sigma} \bar{U} \bar{f}\, d\omega .$$

Im Limes $\delta \to 0$ geht dabei die rechte Seite stetig in das Integral

$$(44) \qquad -\frac{1}{2} \int_0^\tau \sigma\, d\sigma \iint_{\beta\sigma} \bar{U} \bar{f}\, d\omega = -\frac{1}{2} \iiint_B \frac{f(x, y, z, \tau - r)}{r}\, dx\, dy\, dz$$

$$(r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)$$

über.

Zur Berechnung der Integralbestandteile über den Kegelmantel $M_{\varepsilon\delta}$ beachten wir die auf $M_{\varepsilon\delta}$ geltenden Relationen

$$\begin{aligned} t_\nu\, do &= (1-\varepsilon)^3 \sigma^2\, d\sigma\, d\omega \\ x_\nu\, do &= (1-\varepsilon)^2 \sigma^2 \alpha\, d\sigma\, d\omega \\ y_\nu\, do &= (1-\varepsilon)^2 \sigma^2 \beta\, d\sigma\, d\omega \\ z_\nu\, do &= (1-\varepsilon)^2 \sigma^2 \gamma\, d\sigma\, d\omega . \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt

$$\frac{\partial u}{\partial s}\, do = ((1-\varepsilon)\, u_t - \alpha\, u_x - \beta\, u_y - \gamma\, u_z)\, (1-\varepsilon)^2 \sigma^2\, d\sigma\, d\omega$$

oder wegen

$$(1-\varepsilon)\, u_t - \alpha u_x - \beta u_y - \gamma u_z = \frac{\varepsilon(2-\varepsilon)}{\sigma} u_\mu - (1-\varepsilon)\, u_\sigma$$

die Formel

$$\frac{\partial u}{\partial s}\, do = (\varepsilon(2-\varepsilon)\, u_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\, u_\sigma)\, (1-\varepsilon)^2 \sigma\, d\sigma\, d\omega .$$

Damit wird dann auf $M_{\varepsilon\delta}$:

$$\left(V \frac{\partial u}{\partial s} - u \frac{\partial V}{\partial s}\right) do = (1-\varepsilon)^2\, \sigma\, d\sigma\, d\omega \,\{V(\varepsilon(2-\varepsilon)\, u_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\, u_\sigma)$$
$$- u(\varepsilon(2-\varepsilon)\, V_\mu - \sigma(1-\varepsilon)\, V_\sigma)\}.$$

Wegen $\Gamma = \sigma^2 \mu (2-\mu)$ können wir V in der Form

$$V = \frac{R}{\mu} + W \log \mu$$

schreiben, wobei $R = R(\sigma, \mu, \alpha, \beta, \gamma)$ eine reguläre Funktion ist. Wir

erkennen dann leicht, daß sich als logarithmischer Anteil des Integrales über $M_{\delta\varepsilon}$ der Ausdruck

$$(45)\qquad {}_*\iiint\limits_{M_{\varepsilon\delta}} \left(V\frac{\partial u}{\partial s} - u\frac{\partial V}{\partial s}\right) do = \iiint\limits_{M_\delta} \sigma^2 \, d\sigma \, d\omega \, (u W_\sigma - W u_\sigma) = \iiint\limits_{M_\delta} (W u_s - u W_s)\, do$$

ergibt. Im Limes $\delta \to 0$ geht dieser Ausdruck in das Integral $\iiint\limits_M (W u_s - u W_s)\, do$ über, und dieses Mantelintegral läßt sich wegen $L[W] = 0$ durch Anwendung der Greenschen Formel

$$\iiint\limits_M (W u_s - u W_s)\, do = \iiiint\limits_G W f \, dx\, dy\, dz\, dt + \iiint\limits_B (W\psi - W_t \varphi)\, dx\, dy\, dz$$

sofort in einen Ausdruck umformen, der nur die bekannten Funktionen W, f, ψ, φ enthält.

Es bleiben noch die Integrale über B_ε und $D_{\varepsilon\delta}$ übrig. Wir behandeln sie gleichzeitig, indem wir Integrale der Form

$$(47)\qquad J_{\varepsilon\sigma} = \iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} (V u_t - u V_t)\, dx\, dy\, dz$$

betrachten. $D_{\varepsilon\sigma}$ ist das Innere derjenigen Kugel $\beta_{\varepsilon\sigma}$, in welcher der Kegelmantel $M_{\varepsilon\delta}$ von der ebenen Mannigfaltigkeit $t = \tau - \sigma$ geschnitten wird.

Ausgeschrieben ist

$$J_{\varepsilon\sigma} = \iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \left\{\frac{U u_t - u U_t}{\Gamma} + \frac{u U \Gamma_t}{\Gamma^2} - \frac{u W \Gamma_t}{\Gamma} + \log \Gamma (W u_t - u W_t)\right\} dx\, dy\, dz,$$

woraus sofort für den logarithmischen Anteil von $J_{\varepsilon\sigma}$:

$$J_\sigma = {}_*J_{\varepsilon\sigma} = {}_*\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \left(\frac{U u_t - u U_t}{\Gamma} + \frac{u U \Gamma_t}{\Gamma^2} - \frac{u W \Gamma_t}{\Gamma}\right) dx\, dy\, dz$$

folgt. Da die Integrale

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{U u_t - u U_t - (\overline{U}\overline{u}_t - \overline{u}\overline{U}_t)}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz$$

und

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} (u W - \overline{u}\overline{W}) \frac{\Gamma_t}{\Gamma}\, dx\, dy\, dz$$

und schließlich

$$\iiint\limits_{D_{\varepsilon\sigma}} \frac{\Gamma_t}{\Gamma^2} \left(u U - \overline{u}\overline{U} + \sigma\mu\, (\overline{u U})_\nu\right) dx\, dy\, dz$$

gegen bestimmte endliche Grenzwerte konvergieren — im Integranden des letzten Integrals bezeichnet $(\overline{u U})_\nu$ die äußere normale Ableitung des Ausdrucks uU auf der Kugeloberfläche β_σ, d. h. den Ausdruck $(\overline{u U})_\nu = \alpha \frac{\partial (u U)}{\partial x} + \beta \frac{\partial (u U)}{\partial y} + \gamma \frac{\partial (u U)}{\partial z}$, ferner ist $\sigma\mu = \sigma - \sigma(1 - \mu)$ gleich

dem Abstand des Punktes x, y, z von β_σ —, so folgt

$$J_\sigma = {}_*\!\!\iiint\limits_{D_{\sigma\varepsilon}} \left(\frac{(\bar{U}\bar{u}_t - \bar{u}\bar{U}_t)}{\Gamma} - \frac{\bar{u}\,\bar{W}\,\Gamma_t}{\Gamma} + \frac{\bar{u}\bar{U} - \sigma\mu\,(\overline{u\,U})_\nu}{\Gamma^2}\,\Gamma_t \right) dx\,dy\,dz.$$

Unter Beachtung von

$$\Gamma = \sigma^2\mu(2-\mu)$$
$$\Gamma_t = -2\sigma$$
$$dx\,dy\,dz = \sigma^3(1-\mu)^2\,d\omega\,d\mu$$

ergibt sich weiter

$$J_\sigma = \sigma \iint\limits_{\beta_\sigma} (\bar{U}\,\bar{u}_t - \bar{u}\,\bar{U}_t)\,d\omega \; {}_*\!\!\int_\varepsilon^1 \frac{(1-\mu)^2}{\mu(2-\mu)}\,d\mu + \sigma^2 \iint\limits_{\beta_\sigma} \bar{u}\,\bar{W}\,d\omega \; {}_*\!\!\int_\varepsilon^1 \frac{2(1-\mu)^2}{\mu(2-\mu)}\,d\mu$$
$$- \iint\limits_{\beta_\sigma} \bar{u}\,\bar{U}\,d\omega \; {}_*\!\!\int_\varepsilon^1 \frac{2(1-\mu)^2}{\mu^2(2-\mu)^2}\,d\mu + \sigma \iint\limits_{\beta_\sigma} (\overline{u\,U})_\nu\,d\omega \; {}_*\!\!\int_\varepsilon^1 \frac{2(1-\mu)^2}{\mu(2-\mu)^2}\,d\mu,$$

oder nach Auswertung der Integrale über μ:

$$J_\sigma = -\tfrac{1}{2} \iint\limits_{\beta_\sigma} \{\bar{u}\,\bar{U} + \sigma(\bar{U}\,\bar{u}_t - \bar{u}\,\bar{U}_t + (\overline{u\,U})_\nu) + 2\sigma^2\,\bar{u}\,\bar{W}\}\,d\omega. \tag{48}$$

Speziell für $\sigma = \delta \to 0$ folgt

$$J_\delta \to -2\pi u(\xi, \eta, \zeta, \tau). \tag{49}$$

Zusammenfassend finden wir also das Resultat

$$\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\beta} \{\bar{\varphi}\,\bar{U} + \tau(\bar{\psi}\,\bar{U} - \bar{\varphi}\,\bar{U}_t + (\overline{\varphi U})_\nu) + 2\tau^2\,\bar{\varphi}\,\bar{W}\}\,d\omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \iiint\limits_{B} (W\psi - W_t\varphi)\,dx\,dy\,dz + \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{B} \frac{f(x, y, z, t-r)}{r}\,dx\,dy\,dz \\ & + \frac{1}{2\pi} \iiiint\limits_{G} W f\,dx\,dy\,dz\,dt \end{aligned} \tag{50}$$

und damit die gewünschte Lösung des Anfangswertproblems. Beachten wir schließlich noch, daß in unserem Fall U und W Funktionen von $\Gamma = (t-\tau)^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - (z-\zeta)^2$ allein sind, und daß nach Nr. 1

$$\begin{aligned} U(\Gamma) &= J_0\left(\sqrt{-c\Gamma}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{c}{4}\right)^\nu \frac{\Gamma^\nu}{(\nu!)^2} \\ W(\Gamma) &= \frac{\sqrt{-c}}{\Gamma} J_0'\left(\sqrt{-c\Gamma}\right) = \frac{c}{4} \sum \left(\frac{c}{4}\right)^\nu \frac{\Gamma^\nu}{\nu!\,(\nu+1)!} \end{aligned} \tag{51}$$

gilt, so folgt $\bar{U} = U(0) = 1$, $\bar{U}_t = \frac{c}{2}(t-\tau)$, $\bar{U}_\nu = -\frac{c}{2}[\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta)] = \frac{c}{2}(t-\tau)$, $\bar{W} = W(0) = \frac{c}{4}$, und somit nach kurzer Rechnung

$$
(51)\qquad
\begin{aligned}
u = {} & \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\beta} \left\{\varphi + \tau(\psi + \bar{\varphi}_\nu) + \frac{c}{2}\tau^2\bar{\varphi}\right\} d\omega \\
& + \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{f(x, y, z, t-r)}{r}\, dx\, dy\, dz + \frac{1}{2\pi}\iiint (W\psi - W_t\varphi)\, dx\, dy\, dz \\
& + \frac{1}{2\pi}\iiiint W f\, dx\, dy\, dz\, dt,
\end{aligned}
$$

oder etwas umgeformt:

$$
(51')\quad
\left\{
\begin{aligned}
u(\xi, \eta, \zeta, \tau) = {} & \frac{\tau}{4\pi}\iint \bar{\psi}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\iiint W(\Gamma)\, \psi\, dx\, dy\, dz \\
& + \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{\tau}{4\pi}\iint\limits_{\beta} \bar{\varphi}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\iiint\limits_{B} \overline{W}(\Gamma)\, \varphi\, dx\, dy\, dz\right. \\
& + \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{B} \frac{f(x, y, z, t-r)}{r}\, dx\, dy\, dz + \frac{1}{2\pi}\iiiint\limits_{G} W f\, dx\, dy\, dz\, dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Dabei ist $\Gamma = \tau^2 - r^2$ und $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$.

Speziell im Fall $\varphi = f = 0$ ergibt sich

$$
(52)\qquad u = \frac{\tau}{4\pi}\iint \bar{\psi}\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\iiint W(\Gamma)\, \psi\, dx\, dy\, dz,
$$

oder ausgeschrieben

$$
\begin{aligned}
u & = \frac{\tau}{4\pi}\iint \bar{\psi}\, d\omega + \frac{c}{4\pi}\iiint \frac{J_0'(\sqrt{-c\Gamma})}{\sqrt{\Gamma}}\, \psi\, dx\, dy\, dz \\
& = \frac{1}{4\pi\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\iiint J_0(\sqrt{-c\Gamma})\, \psi\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}
$$

Diese Formel aber ist mit der in § 5, 7 gegebenen Darstellung (81), (82) für $m = 3$ identisch.

Die Formeln (50) oder (51) setzen in Evidenz, daß das *Huyghenssche Prinzip*, wie wir bereits in Nr. 1 allgemein bemerkten, nur im Falle $W = 0$ gelten kann, d. i. für unser Problem der Fall $c = 0$.

§ 10. Bemerkungen über den Wellenbegriff und das Ausstrahlungsproblem.

1. Allgemeines. Verzerrungsfreie fortschreitende Wellen. Wir wollen noch einmal auf den Wellenbegriff in seinen verschiedenen Bedeutungen zurückkommen und die Auffassungen vertiefen.

Man bezeichnet zunächst mit dem Wort „Welle" irgendeinen Ausbreitungsvorgang in Raum und Zeit, dargestellt durch die Lösung u eines total hyperbolischen Differentialgleichungsproblems.

Im Gegensatz zu diesem allgemeinsten Wellenbegriff, welcher Lösung unserer Differentialgleichungen und Wellen identifiziert, stellen die

Wellenfronten oder *charakteristischen Mannigfaltigkeiten* keineswegs Lösungen der Ausbreitungsdifferentialgleichung höherer Ordnung — etwa k^{ter} Ordnung — dar, vielmehr lediglich mögliche *Unstetigkeitsflächen* für solche Lösungen. Sie genügen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die im übrigen homogen vom Grade k in den Ableitungen ist. Die zugehörigen *Strahlen*, längs welcher sich die Unstetigkeiten fortpflanzen (s. § 2), sind die Charakteristiken dieser partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, welche nichts ist als die *Eikonalgleichung oder Hamiltonsche Gleichung* (vgl. Kap. II, § 9), die zu dem kanonischen System der charakteristischen gewöhnlichen Differentialgleichung für die Strahlen gehört.

Der allgemeine Zusammenhang zwischen der Ausbreitungsdifferentialgleichung höherer Ordnung, der charakteristischen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und dem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem der Strahlen erfährt eine neue Beleuchtung, wenn wir nicht von dem allgemeinen Begriff Welle als Lösung der Ausbreitungsdifferentialgleichung, sondern von dem etwas spezielleren Begriff der „*fortschreitenden Welle*" ausgehen. Wir wollen uns dabei auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$L[u] = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + c u = 0 \tag{1}$$

beschränken.

Schon in Kapitel III, § 5 haben wir *fortschreitende Wellen* betrachtet. Diese waren solche Lösungen linearer hyperbolischer Differentialgleichungen, welche bei Hervorhebung der Zeitvariablen $x_n = t$ die Form besitzen

$$u = W(A(x, t)),$$

wobei W die *Wellenform* ist. Die Funktion $A(x, t)$, welche in Kap. III, § 5 linear war, hier aber keiner solchen Einschränkung unterliegen soll, heißt die *Phasenfunktion* oder die *Phase der Welle*. Auf Flächen gleicher Phase $A =$ konst. $= c$ hat u konstante Werte, und diese Phasenfläche, als Fläche im x-Raume bei festem t betrachtet, bewegt sich mit der Zeit t durch den Raum.

Wenn nun der Ausdruck $u = W(A(x, t))$ nicht nur für eine bestimmte Funktion W, sondern bei *willkürlichem* W eine Lösung darstellt, so nennen wir diese Mannigfaltigkeit von Lösungen eine *Familie von verzerrungsfreien fortschreitenden Wellen.*

Wir haben sodann auch andere „*relativ verzerrungsfreie*" *fortschreitende Wellen* wie Kugelwellen und zeitlich gedämpfte Wellen betrachtet. Diese Begriffe sollen hier allgemeiner formuliert und mit dem Charakteristikenbegriff in Verbindung gebracht werden, wobei wir auf die Hervorhebung der Zeitvariablen t verzichten.

Wir nennen eine zur linearen Differentialgleichung (1) gehörige fortschreitende *relativ verzerrungsfreie Wellenfamilie* eine von einer will-

kürlichen Funktion $W(\varphi)$ abhängige Familie von Lösungen der Form

(2) $$u(x) = g(x)\, W(\varphi(x)), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

wobei der *Verzerrungsfaktor* $g(x)$ eine feste Funktion der Veränderlichen x_i ist.

Wir erkennen leicht: Die „Phasenfunktion" $\varphi(x)$ muß charakteristisch sein, d. h. der Differentialgleichung

(3) $$\sum a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 0$$

genügen, also $\varphi =$ konst. eine Schar charakteristischer Grundmannigfaltigkeiten sein[1]. Ferner müssen die Relationen

(4) $$L[g] = 0$$

(5) $$A[g] = 2\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i g_k + \left(\sum a_{ik}\varphi_{ik} + \sum b_i\varphi_i\right) g = 0$$

bestehen. Dies folgt leicht durch Einsetzung von u aus (2) in (1) und Berücksichtigung der Willkürlichkeit von W, aus welcher sich das Verschwinden der Koeffizienten von W, W', W'' ergibt.

Die Charakteristikenbedingung (3) entspricht bei der in Kapitel III, § 5 ausgesprochenen Alternative der Forderung, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit bei diesen verzerrungsfreien Wellenfamilien durch bestimmte Normalengeschwindigkeit gegeben sein muß und nicht mehr willkürlich ist. Ferner muß der Dämpfungsfaktor g außer der Differentialgleichung (4) noch einer Differentialgleichung (5) erster Ordnung genügen.

Es entsteht nun das Problem: alle linearen hyperbolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu finden, für welche es relativ verzerrungsfreie Wellenfamilien gibt. Dabei ist zu beachten, daß mit einer Differentialgleichung $L[u] = 0$ auch eine ganze Klasse gleichwertiger Differentialgleichungen diese Eigenschaft besitzt. Zwei Differentialgleichungen $L[u] = 0$ und $L^*[u^*] = 0$ für zwei Funktionen $u(x)$ und $u^*(x^*)$ heißen dabei gleichwertig, wenn sie durch eine Transformation der Form $x_i^* = \alpha_i(x_1, \ldots, x_n)$, $u^* = f(x)\, u$ ineinander übergeführt werden können.

Für $n = 2$, $x = x_1$, $y = x_2$, läßt sich unsere Frage leicht diskutieren: *Im Fall von zwei Veränderlichen x, y besitzen allein die Differentialgleichungen $u_{xy} = 0$ und die ihr gleichwertigen verzerrungsfreie fortschreitende Wellenfamilien, und zwar in beiden Richtungen der Raum-Achse.*

Denn jedenfalls ist die Differentialgleichung gleichwertig einer der Form

$$2u_{xy} + B u_x + C u = 0,$$

[1] Diese Tatsache wird übrigens sofort verständlich auf Grund der Definition der Charakteristiken als mögliche Unstetigkeitsflächen von Lösungen, z. B. von Lösungen aus unserer Wellenfamilie. Wir können z. B. als Limes einer Folge von Funktionen W eine solche Funktion $W(\varphi)$ entstehen lassen, für welche etwa bei $\varphi = 0$ die Ableitungen zweiter Ordnung W'' unstetig ist. Dann wird unmittelbar klar, daß $\varphi = 0$ eine Wellenfront, d. h. eine charakteristische Fläche sein muß.

wo B und C Funktionen von x und y sind, $x + y$ die Zeitkoordinate, $x - y$ die Raumkoordinate liefert und $x =$ konst., $y =$ konst. die Charakteristiken sind. Die Existenz der Wellenfamilie

$$u = g(x, y)\, W(y)$$

erfordert das Bestehen von

$$g_x = 0 \text{ neben } 2 g_{xy} + B g_x + C g = 0,$$

woraus $C = 0$ folgt. Soll nun außerdem noch eine nach anderer Richtung laufende Wellenfamilie

$$u = h(x, y)\, W(x)$$

existieren, so muß

$$2 h_y + B h \text{ neben } 2 h_{xy} + B h_x = 0$$

gelten, woraus $B_x = 0$ folgt. Die Gleichung $2 u_{xy} + B(y)\, u_x = 0$ ist aber der Gleichung $u_{xy} = 0$ äquivalent.

2. Sphärische Wellen. Im Fall von $n > 2$ Veränderlichen liegt eine allgemeine Antwort auf unsere Frage noch nicht vor. Wir begnügen uns mit einigen referierenden und vorläufigen Betrachtungen über *„sphärische" Wellen*. Sphärische oder Kugelwellen seien dadurch definiert, daß die zugehörige Schar der charakteristischen Flächen aus solchen charakteristischen Konoiden besteht, deren Spitzen auf einer zeitartigen Linie liegen. Zur analytischen Definition dieser Konoide betrachten wir wiederum das Quadrat des geodätischen Abstandes zweier Punkte x und ξ, d. h. die in § 9 eingeführte Funktion $\Gamma(x, \xi)$ als Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{i,k} a_{ik} \Gamma_i \Gamma_k = 4 \Gamma. \tag{6}$$

Irgendeine Linie $\xi = \xi(\lambda)$ mit dem Parameter λ, für welche

$$\sum_{i,k} a_{ik} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_k > 0 \tag{7}$$

gilt, ist eine *zeitartige Linie*. Wir definieren nun eine Funktion $\lambda = T(x)$ als Umkehrung der Gleichung

$$\Gamma(x, \xi(\lambda)) = 0. \tag{8}$$

Dann ist $T(x)$ eine *charakteristische Funktion*, d. h. genügt der charakteristischen Relation. Als sphärische Wellen definieren wir nun solche der Form

$$u(x) = g(x)\, W(T(x)). \tag{9}$$

Es besteht dann die folgende Vermutung, die wir am Schluß von Nr. 3 näher begründen werden: *Sphärische Wellen für beliebige zeitartige Linien gibt es nur im Fall von zwei und vier Veränderlichen und nur dann, wenn die Differentialgleichung der Wellengleichung gleichwertig ist.*

Ein Beweis dieser Vermutung würde eine wesentliche Auszeichnung der physikalischen vierdimensionalen Raum-Zeitmannigfaltigkeit

bedeuten. Aber auch schon die Tatsache, daß für den Fall konstanter Koeffizienten unser Satz gilt und dann unschwer beweisbar ist, scheint nicht ohne Bedeutung. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß für die Wellengleichung und die t-Achse als Zeitlinie unser obiger Ausdruck T identisch ist mit

$$(10)\qquad \begin{cases} T = t - r, & (r^2 = x^2 + y^2 + z^2) \\ g = \dfrac{1}{r}, \end{cases}$$

daß man also genau die früher behandelten Kugelwellen erhält. Für andere gerade zeitartige Linien ergeben sich die sphärischen Wellen durch Lorentztransformation.

In dem Fall einer höheren geraden Anzahl von Veränderlichen $n = m + 1 = 2\nu + 4$ haben wir schon in §§ 5, 6 ein Analogon für fortschreitende Wellen gefunden, nämlich die Lösungen

$$(11)\quad u(r, t) = \frac{1}{r^{m-2}} W(t-r) + \frac{A_1}{r^{m-3}} W'(t-r) + \cdots + \frac{A_{\frac{m-3}{2}}}{r^{\frac{m-1}{2}}} W^{\left(\frac{m-3}{2}\right)}(t-r)$$

mit

$$A_\nu = \frac{2^\nu}{\nu!} \frac{\binom{\frac{m-3}{2}}{\nu}}{\binom{m-3}{\nu}}.$$

Wir nennen solche Lösungen *Wellen* $\frac{n-1}{2}^{\text{ter}}$ *Stufe;* sie besitzen nicht mehr den Charakter der Verzerrungsfreiheit, wohl aber stellen sie einen fortschreitenden Vorgang dar.

Es ist jedoch bemerkenswert, daß auch für alle graden Werte von n zwar nicht mehr die Wellengleichung

$$L[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = 0$$

selbst, wohl aber die $\frac{n}{2}$-mal interierte Wellengleichung

$$L^{\frac{n}{2}}[u] = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)^{\frac{n}{2}} u = 0,$$

welche von n^{ter} Ordnung ist, unverzerrte Familien von Kugelwellen

$$u = W(t-r) \quad \text{und} \quad u = W(t+r)$$

besitzt. Diese Tatsache ist lediglich eine andere Formulierung des in § 6, Nr. 4 bewiesenen Satzes von FRIEDRICHS.

Aus ihr folgert man, daß aus einer willkürlichen Funktion $W(t-r)$ durch die Operation $L^{\frac{n-2}{2}}$ eine Lösung der Wellengleichung entsteht, welche gerade zu Wellen höherer Stufe führt und mit (11) leicht identifiziert werden kann.

3. Ausstrahlung und Huygenssches Prinzip. Für die Wellengleichung $u_{tt} - \Delta u = 0$ bestand das Ausstrahlungsproblem (vgl. § 5) darin, eine Lösung aufzusuchen, für welche bei $t = 0$ die Funktion und ihre Ableitungen verschwinden und auf der t-Achse für $x = 0$

$$\odot u = s(t)$$

vorgeschrieben ist. Dabei verstehen wir unter $\odot u$ den Grenzwert

$$\odot u = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \cdots \int_{O_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} u \, d o \tag{12}$$

des Integrals rechts über die Kugel vom Radius ε um den Nullpunkt zur Zeit t, wobei $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial r}$ die Differentiation nach der äußeren Normale bedeutet. Für gerades $n = m + 1 > 2$ wird dieses Problem durch die sphärischen Wellen $\frac{n-1}{2}$ter Ordnung (11) gelöst mit

$$W(t) = -\frac{1}{\omega_m (m-2)} s(t)\,.$$

Um für die allgemeine Differentialgleichung

$$L[u] = \sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + c u = 0 \tag{13}$$

und eine beliebige Zeitlinie $x = \xi(\lambda)$ das Ausstrahlungsproblem bequem zu formulieren, denken wir uns durch eine Koordinatentransformation die Zeitlinie $x = \xi(\lambda)$ in die Gerade $x_1 = \cdots = x_m$, $x_n = \lambda$ übergeführt. Dann definieren wir

$$\odot u = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int \cdots \int_{O_\varepsilon} \sum_{i,k} a_{ik} u_i \frac{\partial x_k}{\partial \lambda} \, d o. \tag{14}$$

Nun lautet das allgemeine Ausstrahlungsproblem: Gesucht ist eine Funktion $u(x)$, welche die Differentialgleichung (13) erfüllt, welche auf einer raumartigen Anfangsfläche B nebst den Ableitungen erster Ordnung verschwindet, und welche auf der vorgegebenen zeitartigen Linie $\xi(\lambda)$ so singulär wird, daß dort

$$\odot u = s(\lambda) \tag{15}$$

besteht, wo $s(\lambda)$ vorgegeben ist. Die Lösung ist nur auf der einen Seite der Anfangsfläche B gesucht, und zwar auf derjenigen Seite, welcher die Punkte der zeitartigen Linie für $\lambda > 0$ angehören.

Betrachten wir das Strahlenkonoid durch irgendeinen Punkt x auf der betreffenden Seite von B, so wird derjenige Halbkegel des Konoids, welcher B trifft, der „negative" Kegel, die Zeitlinie Z im Punkt $\xi = T(x)$ treffen (vgl. Nr. 2). Es zeigt sich nun, daß der Wert der Lösung unseres Integralproblems in einem Punkt x nur von der Vorgabe von $\odot u$ für $\lambda \leqq T(x)$ abhängt.

Das ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung der Lösung des Ausstrahlungsproblemes mittels der Grundlösung, welche wir auf Grund

der im § 9 auseinandergesetzten Hadamardschen Methode leicht gewinnen können — in der Tat einfacher, als beim Anfangswertproblem. Sie lautet im Fall von ungeradem $n = m + 1$:

$$u(x) = C \; {}^{*}\!\int_0^{T(x)} V(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda)\, d\lambda, \tag{16}$$

wobei der Stern links oben vor dem Integral den endlichen Anteil des Integrals und C eine Konstante bedeutet.

Im Fall von geradem $n = m + 1$ lautet die Lösung

$$\begin{aligned} &= C \int_{*}^{T(x)} \frac{U}{\Gamma^{\frac{m-1}{2}}} \odot u(\lambda)\, d\lambda - C \int_0^{T(x)} W(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda)\, d\lambda, \\ u(x) &= C_{*}\!\int^{T(x)} V(x, \xi(\lambda)) \odot u(\lambda)\, d\lambda \end{aligned} \tag{17}$$

wobei der Stern links unten den logarithmischen Anteil bedeutet. In der zweiten Zeile hängt er nur von der Vorgabe $s(\lambda)$ und den Ableitungen bis zur $\frac{m-3}{2}$ten Ordnung an der Stelle $\lambda = T(x)$ ab, so daß die Lösung demgemäß eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} u(x) &= g_0(x)\, s(T(x)) + g_1(x)\, s'(T(x)) + \cdots + g_{\frac{m-3}{2}}(x)\, s^{\left(\frac{m-3}{2}\right)}(T(x)) \\ &\quad - \int^{T(x)} W(x, \xi(\lambda))\, s(\lambda)\, d\lambda \end{aligned} \tag{17}$$

besitzt.

Der erste Teil dieser Formel repräsentiert *fortschreitende Wellen* $\frac{m-1}{2}$ter Stufe. Das Ausstrahlungsproblem wird also genau dann durch verzerrungsfreie Familien fortschreitender sphärischer Wellen höherer Stufe gelöst, wenn $W = 0$ ist, d. h. wenn n grade ist und der logarithmische Anteil der Grundlösung verschwindet. In diesem Falle hängt die Lösung sogar nur von der Vorgabe an der Stelle $\lambda = T(x)$ auf der Zeitlinie ab, d. h. dem Schnittpunkte des charakteristischen Konoides durch x mit der Zeitlinie.

Es gilt somit das Huyghenssche Prinzip für das Ausstrahlungsproblem unter genau denselben Bedingungen, unter welchen es für das Anfangswertproblem gilt (vgl. § 9, 1).

Es steht zu vermuten, daß auch umgekehrt verzerrungsfreie Familien fortschreitender sphärischer Wellen höherer Stufe nur dann existieren, wenn das Huyghenssche Prinzip gilt und daß Familien sphärischer fortschreitende Wellen im eigentlichen Sinne nur für $n = 2$ und $n = 4$ bestehen können.

Zusammen mit der Hadamardschen Vermutung (vgl. § 9,1) würde sich hieraus eine wesentliche Auszeichnung der vierdimensionalen Raum-Zeitmannigfaltigkeit und in ihr der klassischen Maxwellschen Theorie ergeben.

Anhang zum sechsten Kapitel.

§ 1. Die Differentialgleichungen der Krystalloptik.

Wir wollen hier die Integration des Anfangswertproblems der Krystalloptik vollständig durchführen[1] und zu diesem Zwecke eine kurze Diskussion der Geometrie der zugehörigen Fresnelschen Normalen- und Wellenflächen voranschicken.

1. Normalen- und Strahlenfläche der Krystalloptik. Es sei an folgenden Zusammenhang erinnert (vgl. Kap. VI, § 3, 3): Die möglichen Wellenfronten durch einen Punkt besitzen Normaleinrichtungen, gegeben durch die Verhältnisse $\xi_1:\xi_2:\xi_3:\tau$ eines Richtungsvektors im ξ, τ-Raume, welche den *Normalenkegel* vierter Ordnung mit der Gleichung

$$H\left(\frac{\xi_1}{\tau}, \frac{\xi_2}{\tau}, \frac{\xi_3}{\tau}\right) = 0 \tag{1}$$

bilden. Den Mongeschen — gradlinigen — Kegel der Differentialgleichungen der Krystalloptik, gebildet aus allen Strahlen durch den Nullpunkt des x, t-Raumes, nennen wir den *Strahlenkegel*. Identifizieren wir die beiden Räume, so gilt wieder: Die Tangentialebenen des einen Kegels stehen senkrecht auf entsprechenden Strahlen des anderen.

Schneidet man die Kegel durch die Ebenen $\tau = 1$ bzw. $t = 1$, oder, was hier wegen der Symmetrie in bezug auf den Nullpunkt auf dasselbe hinausläuft mit $\tau = -1$ bzw. $t = -1$, so erhält man die *Normalenfläche N* bzw. die *Strahlenfläche S*.

Strahlenkegel und Normalenkegel bzw. Strahlenfläche und Normalenfläche sind zueinander reziprokal im Sinne von Kap. VI, § 2, 7[2].

Eine besondere Beachtung erfordern solche Punkte der Normalenfläche, in welchen es mehr als eine Tangentialebene gibt, das sind, wie wir sogleich (vgl. Nr. 2, Schluß) sehen werden, konische Ecken mit einer Schar von Tangentialebenen, welche einen Kegel zweiter Ordnung umhüllen. Es entspricht diesen Tangentialebenen eine Schar von Punkten, welche in einer Ebene liegen, und allgemein gilt dies für die zweiparametrige Schar von Stützebenen in einem konischen Punkt. Mit anderen Worten: *Einem solchen konischen Punkt wird bei einer solchen Zuordnung ein ganzes ebenes Flächenstück entsprechen*, indem man in einem konischen Punkt der Normalenfläche alle Normalen zu Stützebenen als zulässig betrachtet.

2. Gestalt der Normalenfläche. Gemäß Kapitel VI, § 3, 3 können wir die Gleichung der Normalenfläche im ξ-Raume (mit leichtveränderter Bezeichnung) in folgende Form setzen

---

[1] Vgl. G. Herglotz: Ber. sächs. Akad. 1926, sowie eine Vorlesungsausarbeitung über Mechanik der Continua.

[2] Wegen der Symmetrie in bezug auf den Nullpunkt könnte man übrigens hier die Reziprokaltransformation auch durch Polarverwandtschaft in bezug auf die reellen Gebilde $\sum\limits_1^3 \xi_i^2 = 1$ bzw. $\sum\limits_1^3 x_i^2 = 1$ definieren.

$$(2)\qquad H(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{vmatrix} \varrho^2-\xi_1^2-\sigma_1 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \varrho^2-\xi_2^2-\sigma_2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \varrho^2-\xi_3^2-\sigma_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$= -\sigma_1\sigma_2\sigma_3(1-\Psi(\xi)+\varrho^2\Phi(\xi)) = 0$$

mit

$$(2')\qquad \begin{aligned} \varrho^2 &= \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 \\ \Psi(\xi) &= \frac{\varrho^2-\xi_1^2}{\sigma_1}+\frac{\varrho^2-\xi_2^2}{\sigma_2}+\frac{\varrho^2-\xi_3^2}{\sigma_3} \\ \Phi(\xi) &= \frac{\xi_1^2}{\sigma_2\sigma_3}+\frac{\xi_2^2}{\sigma_3\sigma_1}+\frac{\xi_3^2}{\sigma_1\sigma_2}. \end{aligned}$$

Wir zeigen: *Die Normalenfläche wird von jedem Strahl durch den Nullpunkt in zwei reellen Schnittpunkten getroffen.* Es sei $\mathfrak{e}$ ein Einheitsvektor im x-Raume mit den Komponenten e_i und es sei

$$\xi_i = \varrho\, e_i$$

gesetzt. Die Schnittpunkte des Strahles mit den Richtungskosinus e_i und der Normalenfläche werden wegen der Homogenität von Φ und Ψ durch

$$(3)\qquad \varrho^4\Phi(e)-\varrho^2\Psi(e)+1=0$$

gegeben. Um ϱ als reell nachzuweisen, zeigen wir zunächst, daß die Diskriminante

$$(4)\qquad X(e) = \Psi^2(e)-4\Phi(e)$$

dieser quadratischen Gleichung für ϱ^2 für keinen Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ negativ ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$A_1 = \frac{1}{\sigma_3}-\frac{1}{\sigma_2}, \qquad A_2 = \frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_3}, \qquad A_3 = \frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1},$$

so wird

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} X(e) &= \Psi^2(e)-4\Phi(e)\sum_i e_i^2 \\ &= A_1^2e_1^4+A_2^2e_2^4+A_3^2e_3^4-2A_2^2A_3^2e_2^2e_3^2-2A_1^2A_3^2e_1^2e_3^2-2A_1^2A_2^2e_1^2e_2^2 \\ &= \left((e_1\sqrt{A_1}+e_3\sqrt{A_3})^2-A_2e_2^2\right)\left((e_1\sqrt{A_1}-e_3\sqrt{A_3})^2-A_2e_2^2\right) \\ &= \Pi\left(e_1\sqrt{A_1}\pm e_2\sqrt{A_2}\pm e_3\sqrt{A_3}\right), \end{aligned} \right.$$

wobei das Produkt über alle vier Vorzeichenkombinationen zu erstrecken ist: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei z. B.

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Dann ist

$$A_1 > 0, \quad A_2 < 0, \quad A_3 > 0.$$

Daher ist der erste und dritte Term in jedem Linearfaktor von X immer rein imaginär, der zweite immer reell; also sind die vier Faktoren zu zweien konjugiert komplex und daher tatsächlich $X \geqq 0$. Dabei kann der Fall $X = 0$ nur eintreten, wenn Real- und Imaginärteil eines Faktors

gleichzeitig verschwinden, d. h. nur für

$$e_2 = 0, \qquad e_1\sqrt{A_1} + e_3\sqrt{A_3} = 0$$

oder

$$e_2 = 0, \qquad e_1\sqrt{A_1} - e_3\sqrt{A_3} = 0.$$

Aus (3) ergibt sich nun

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{2}\left(\Psi(e) \pm \sqrt{X(e)}\right).$$

Aus der Definition (4) aus X folgt sofort $\Psi^2(e) \geqq X(e)$ und daher werden tatsächlich alle vier Wurzeln ϱ reell und unsere Behauptung ist bewiesen.

Die Normalenfläche besteht also aus zwei einander umschließenden Mänteln

$$\Psi(e) - \sqrt{X(e)} = \frac{2}{\varrho^2}, \qquad \Psi(e) + \sqrt{X(e)} = \frac{2}{\varrho^2}$$

oder wegen der Homogenität von ψ und Φ, wenn $X(\xi)$ allgemein durch

$$X(\xi) = \Psi^2(\xi) - 4\varrho^2\Phi(\xi) \tag{6}$$

definiert wird,

$$\begin{cases} \Psi(\xi) - f(\xi) = 2 & \text{äußerer Mantel} \\ \Psi(\xi) + f(\xi) = 2 & \text{innerer Mantel} \end{cases} \tag{7}$$

mit

$$f(\xi) = \left|\sqrt{X(\xi)}\right|. \tag{8}$$

Die beiden Mäntel hängen nur in vier Punkten zusammen, die nach der obigen Annahme $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ in der ξ_1, ξ_3-Ebene liegen, und zwar auf den Geraden

$$\xi_1\sqrt{\frac{1}{\sigma_3} - \frac{1}{\sigma_2}} \pm \xi_3\sqrt{\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1}} = 0.$$

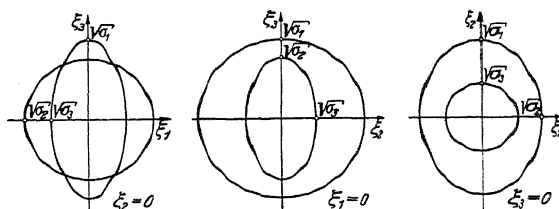



Abb. 45. Schnitte der Wellenfläche mit den Koordinatenebenen.

Eine anschauliche Vorstellung der Fläche gewinnen wir durch die Betrachtung der *Schnitte mit den Koordinatenebenen*. Es ist für $\xi_2 = 0$ nach (5)

$$f(\xi) = A_1\xi_1^2 - A_3\xi_3^2$$

$$\Psi(\xi) = \xi_1^2\left(\frac{1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_2}\right) + \xi_3^2\left(\frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_1}\right)$$

also entweder

$$\Psi + f - 2 = 2\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_3} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_1} - 1\right) = 0$$

oder

$$\Psi - f - 2 = \frac{2}{\sigma_2}\left(\xi_1^2 + \xi_3^2 - \sigma_2\right) = 0\,.$$

Der Schnitt zerfällt also in einen *Kreis* und eine ihn *in vier Doppelpunkten schneidende Ellipse.* Ebenso findet man für die Ebene

$$\xi_1 = 0$$

entweder

$$\frac{\xi_2^2}{\sigma_3} + \frac{\xi_3^2}{\sigma_2} - 1 = 0$$

oder

$$\xi_2^2 + \xi_3^2 - \sigma_1 = 0$$

und endlich für $\xi_3 = 0$:

$$\frac{\xi_1^2}{\sigma_2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_1} - 1 = 0$$

oder

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \sigma_3 = 0.$$

Der Schnitt besteht in diesen beiden Fällen aus einer Ellipse und einem sie nicht schneidenden Kreis. Der innere Mantel der Normalenfläche ist sicher konvex, da es sonst eine Gerade gäbe, die ihn in mehr als zwei Punkten schneidet, also die Fläche in mindestens fünf Punkten treffen müßte, im Gegensatz zu der Ordnung 4. Der äußere Mantel, wie der Schnitt mit $\xi_2 = 0$ lehrt, ist sicher nicht konvex; er besitzt in den vier Doppelpunkten vier nach innen gerichtete konische Ecken, während dort der innere Mantel nach außen gerichtete konische Ecken hat.

3. Die Strahlenfläche. Die Beziehung zwischen Strahlenfläche und Normalenfläche als Reziprokalfläche ist reziprok für alle Stellen der Normalenfläche N, wo eine stetig veränderliche Tangentialebene existiert. In einer kegelartigen Spitze von N versagt die eindeutige Zuordnung; ihr entspricht ein ebenes Flächenstück.

Einer konvexen Fläche N um den Nullpunkt muß wiederum eine konvexe geschlossene Fläche S entsprechen; denn andernfalls hätte S mindestens drei parallele Tangentialebenen, denen drei Punkte von N auf einer Geraden entsprechen müßten.

Die Gleichung der Normalenfläche konnte man, wie in Kap. VI, § 3, 3 angegeben, in eine der Formen

$$(10)\qquad \frac{\sigma_1 \xi_1^2}{\varrho^2 - \sigma_1} + \frac{\sigma_2 \xi_2^2}{\varrho^2 - \sigma_2} + \frac{\sigma_3 \xi_3^2}{\varrho^2 - \sigma_3} = 0\,,$$

oder

$$(11)\qquad \frac{\xi_1^2}{\varrho^2 - \sigma_1} + \frac{\xi_2^2}{\varrho^2 - \sigma_2} + \frac{\xi_3^2}{\varrho^2 - \sigma_3} = 1$$

setzen. Man gelangt dann nach einer etwas umständlichen hier zu übergehenden Rechnung für die Strahlenfläche zu den entsprechenden Gleichungen

$$(11)\qquad \frac{\eta_1^2}{\sigma_1 R^2 - 1} + \frac{\eta_2^2}{\sigma_2 R^2 - 1} + \frac{\eta_3^2}{\sigma_3 R^2 - 1} = 0, \quad (R^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)$$

bzw.

$$\frac{\sigma_1 \eta_1^2}{\sigma_1 R^2 - 1} + \frac{\sigma_2 \eta_2^2}{\sigma_2 R^2 - 1} + \frac{\sigma_3 \eta_3^2}{\sigma_3 R^2 - 1} = 1. \tag{11'}$$

Danach ist die Strahlenfläche eine Fläche derselben Art wie die Normalenfläche, wobei nur die Parameter σ durch ihre reziproken Werte ersetzt sind. Jedoch erhält man die den konischen Ecken der Normalenfläche entsprechenden Punkte nicht aus unseren Gleichungen (11). Man hat zu der durch (11) bzw. (11') gegebenen Strahlenfläche noch vier den Ecken der Normalenfläche entsprechende ebene Flächenstücke hinzuzufügen, um die reziprokale Fläche S zu erhalten. Die Strahlenfläche (11) zerfällt genau wie die Normalenfläche (10) in zwei Mäntel, deren innerer konvex ist, während der äußere vier nach innen gerichtete konische Ecken hat. Nun muß dem konvexen inneren Mantel der Normalenfläche,

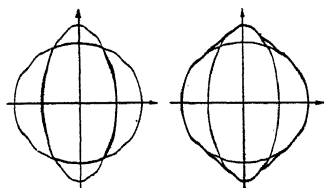



Abb. 46. Zuordnung des inneren Mantels der Normalenfläche und der konvexen Hülle der Strahlenfläche.

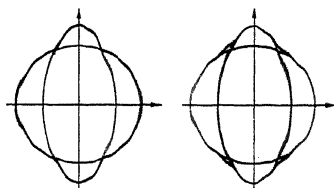



Abb. 47. Entsprechende Zuordnung für den äußeren Mantel der Normalenfläche.

wie man leicht sieht, die *kleinste konvexe Hülle der Strahlenfläche* entsprechen; den konischen Ecken des inneren Mantels der Normalenfläche entsprechen dabei vier ebene Deckel, die auf die Einbuchtungen des äußeren Mantels der Strahlenfläche aufgesetzt ihn konvex machen. Es ist nicht etwa so, daß die Mäntel von Normalen- und Strahlenfläche sich paarweise entsprechen; dem inneren Mantel der Normalenfläche entspricht ein Teil des äußeren Mantels der Strahlenfläche, welcher durch die Deckel konvex gemacht ist; der Rest des äußeren Mantels und der innere Mantel der Strahlenfläche entsprechen dem äußeren Mantel der Normalenfläche. In den beistehenden Abbildungen ist dieser Zusammenhang schematisch angedeutet, wobei entsprechende Gebilde durch dieselbe Art der Zeichnungsausführung kenntlich sind. Die ebenen Deckel berühren die Strahlenfläche vierter Ordnung (11) längs einer ganzen Kurve; diese *Berührungskurve* muß eine ebene Kurve vierter Ordnung mit lauter Doppelpunkten, also ein doppelt zählender Kegelschnitt sein. In der Tat ist sie *ein Kreis*, denn die Gleichung der Strahlenfläche (11) lautet in homogenen Koordinaten $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau$:

$$\tau^4 - \tau^2 \Psi(\eta) + R^2 \Phi(\eta) = 0,$$

wobei in den Ausdrücken ψ und Φ die Parameter σ durch ihre reziproken Werte zu ersetzen sind. Folglich enthält diese Fläche den absoluten Kreis des Raumes, welcher durch

$$\tau = 0, \qquad R^2 = 0$$

gegeben ist. Jede ebene Schnittkurve der Fläche enthält also die beiden absoluten Punkte der Schnittebene; zerfällt nun eine Schnittkurve in zwei reelle Kurven zweiter Ordnung, so muß einer dieser beiden Kegelschnitte beide Kreispunkte dieser Ebene enthalten, also ein Kreis sein. Insbesondere gilt dies für die Berührungskurve jedes der Deckel. (So bestätigt sich im übrigen wieder, daß die Schnitte mit den Koordinatenebenen je einen Kreis enthalten müssen.)

4. Reduktion des Differentialgleichungssystems auf eine Differentialgleichung sechster Ordnung bzw. vierter Ordnung. Die Komponenten u_1, u_2, u_3 des elektrischen Vektors $\mathfrak{E}$ genügen nach Kap. VI, § 3, 3 den Gleichungen

$$(12) \qquad \begin{aligned} \sigma_1 \ddot{u}_1 &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \sigma_2 \ddot{u}_2 &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \sigma_3 \ddot{u}_3 &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2}. \end{aligned}$$

Es werde symbolisch

$$\xi_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}; \qquad \tau = \frac{\partial}{\partial t}$$

gesetzt (Multiplikation dieser Symbole entspricht dem Hintereinanderausführen der entsprechenden Differentiationen); ferner sei

$$\varrho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$$

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}(\varrho^2 - \sigma_\alpha \tau^2) - \xi_\alpha \xi_\beta.$$

$\delta_{\alpha\beta}$ bedeutet dabei das Kroneckersche Symbol, d. h. 1, wenn $\alpha = \beta$ und 0, wenn $\alpha \neq \beta$ ist. Dann schreiben sich die obigen Gleichungen

$$(13) \qquad \sum_\beta \mathfrak{D}_{\alpha\beta} u_\beta = 0.$$

Gefragt ist nach Lösungen u_1, u_2, u_3 dieser Gleichungen die für $t = 0$ mit ihren ersten zeitlichen Ableitungen in vorgegebene Funktionen übergehen. Es sei etwa

$$(13') \qquad \left\{ \begin{aligned} u_\alpha(x, 0) &= f_\alpha(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{\partial u_\alpha(x, 0)}{\partial t} &= g_\alpha(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right.$$

Es sei nun $\mathfrak{D}^{\alpha\beta}$ die Unterdeterminante zu $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}$, also ein Differentialoperator vierter Ordnung. Wir suchen drei Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ so zu bestimmen, daß die drei Größen

$$(14) \qquad u_\alpha = \sum_\beta \mathfrak{D}^{\alpha\beta} \varphi_\beta$$

den Differentialgleichungen (12) genügen. Man findet dann für die drei Funktionen φ_α jeweils dieselbe Differentialgleichung

$$(15) \qquad D\varphi = 0,$$

wobei $D(\xi, \tau)$ die Form 6. Grades

$$(16)\qquad D(\xi,\tau) = \begin{vmatrix} \varrho^2-\xi_1^2-\sigma_1\tau^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_2\xi_1 & \varrho^2-\xi_2^2-\sigma_2\tau^2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_3\xi_1 & -\xi_3\xi_2 & \varrho^2-\xi_3^2-\sigma_3\tau^2 \end{vmatrix}$$

ist.

Bestimmt man drei verschiedene Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ von (16) derart, daß

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\varphi_\alpha(x,0) = \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial t^2}(x,0) = \frac{\partial^3\varphi_\alpha}{\partial t^3}(x,0) = 0, \\ &\frac{\partial^4\varphi_\alpha}{\partial t^4}(x,0) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} f_\alpha(x), \qquad \frac{\partial^5\varphi_\alpha}{\partial t^5}(x,0) = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} g_\alpha(x) \end{aligned}$$

ist, so sind die durch (14) gegebenen Ausdrücke u die Lösungen des ursprünglichen Anfangswertproblems.

In der Tat ist dann

$$u_\alpha(x,0) = \mathfrak{D}^{\alpha\alpha}\varphi_\alpha(x,0) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma_\alpha}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\varphi_\alpha(x,0) = f_\alpha(x)$$

$$\frac{\partial u_\alpha(x,10)}{\partial t} = \mathfrak{D}^{\alpha\alpha}\tau\varphi_\alpha(x,0) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sigma_\alpha}\frac{\partial^5}{\partial t^5}\varphi_\alpha(x,0) = g_\alpha(x).$$

Es genügt den Spezialfall $f_\alpha = 0$ zu betrachten; denn sind φ^* und ψ^* Lösungen von (16) für die Anfangsbedingungen

$$\varphi^* = \varphi_t^* = \cdots = \varphi_{tttt}^* = 0; \qquad \varphi_{ttttt}^* = f_\alpha$$

$$\psi^* = \psi_t^* = \cdots = \psi_{tttt}^* = 0; \qquad \psi_{ttttt}^* = g_\alpha,$$

so ist $\varphi = \varphi_t^* + \psi^*$ eine Lösung von (16) zu den Anfangsbedingungen (17).

Unser Problem reduziert sich nunmehr auf ein solches für eine *Differentialgleichung vierter Ordnung:* Es ist $D(\xi,\tau)$ homogen in $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau$ vom sechsten Grade und $D(\xi, 1) = H(\xi)$. Folglich ist nach (2)

$$D(\xi,\tau) = \tau^6 H\left(\frac{\xi}{\tau}\right) = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3(\tau^6 - \Psi(\xi)\tau^2 + \varrho^2\Phi(\xi)\tau^2).$$

Da man τ^2 ausklammern kann, läßt sich die Gleichung auf eine Gleichung vierter Ordnung reduzieren. Sei nämlich

$$(18)\qquad F(\xi,\tau) = \tau^4 - \Psi(\xi)\tau^2 + \varrho^2\Phi(\xi)$$

und $v(x,t)$ die Lösung der Gleichung

$$(19)\qquad F(\xi,\tau)v = 0$$

für die Anfangsbedingungen

$$(20)\qquad v = v_t = v_{tt} = 0; \qquad v_{ttt} = g(x).$$

Dann ist

$$u = \int_0^t (t-\tau)\, v(x,\tau)\, d\tau$$

eine Lösung von $D(\xi,\tau)u = 0$ für die Anfangsbedingungen

$$u = u_t = u_{tt} = u_{ttt} = u_{tttt} = 0; \qquad u_{ttttt} = g.$$

Denn es ist $u_{tt} = v$; $F u_{tt} = 0$ ergibt $D u = 0$; $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$; $u_{tt}(x, 0) = v(x, 0) = 0$; $u_{ttt}(x, 0) = v_t(x, 0) = 0$; $u_{tttt}(x, 0) = v_{tt}(x, 0) = 0$; ferner ist $u_{ttttt}(x, 0) = v_{ttt}(x, 0) = g(x)$.

5. Explizite Lösung durch die Fouriersche Methode. Damit $e^{i(\alpha x) + i\beta t} = e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \beta t)}$ der Gleichung (19) genügt, ist notwendig und hinreichend, daß

$$F(\alpha, \beta) = \beta^4 - \beta^2 \Psi(\alpha) + r^2 \Phi(\alpha) = 0 \qquad (r^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)$$

ist. Wird

$$\beta_1^2 = \tfrac{1}{2}\left(\Psi(\alpha) + \sqrt{\Psi^2 - 4r^2\Phi}\right)$$
$$\beta_2^2 = \tfrac{1}{2}\left(\Psi(\alpha) - \sqrt{\Psi^2 - 4r^2\Phi}\right)$$

gesetzt, so gewinnt man spezielle Lösungen von (19) der Gestalt

$$e^{i(\alpha x)}\left(a_1 e^{i\beta_1 t} + a_2 e^{-i\beta_1 t} + a_3 e^{i\beta_2 t} + a_4 e^{-i\beta_2 t}\right),$$

wo $(\alpha x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$ gesetzt ist. Speziell kann man hierin die Konstanten a_1, a_2, a_3, a_4 so bestimmen, daß die Klammer mit ihren ersten beiden Ableitungen nach t für $t = 0$ verschwindet und die dritte Ableitung 1 wird. Es ergibt sich der Ausdruck

$$e^{i(\alpha x)} \frac{1}{\beta_2^2 - \beta_1^2}\left(\frac{\sin \beta_1 t}{\beta_1} - \frac{\sin \beta_2 t}{\beta_2}\right),$$

der als Funktion von β_1, β_2 überall stetig ist.

Wir versuchen daher v in der Form

$$v(x, t) = \iiint A(\alpha)\, e^{i(\alpha x)} \frac{1}{\beta_2^2 - \beta_1^2}\left(\frac{\sin \beta_1 t}{\beta_1} - \frac{\sin \beta_2 t}{\beta_2}\right) d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3$$

darzustellen, wo $A(\alpha)$ so zu wählen ist, daß

$$g(x) = \iiint A(\alpha)\, e^{i(\alpha x)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3$$

gilt. Also wird

$$A(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint g(\xi)\, e^{-i(\alpha \xi)}\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3.$$

Dann ist

$$v(x, t) = \iiint g(\xi)\, K(x - \xi, t)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \tag{21}$$

die gesuchte Lösung von (19), (20), wenn

$$K(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{e^{i(\alpha x)}}{\beta_2^2 - \beta_1^2}\left(\frac{\sin \beta_1 t}{\beta_1} - \frac{\sin \beta_2 t}{\beta_2}\right) d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 \tag{22}$$

gesetzt ist.

6. Diskussion des lösenden Kernes K. Es ist

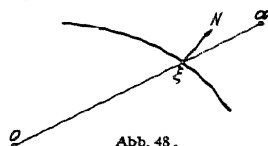
$$\beta_1^2 - \beta_2^2 = \sqrt{\Psi^2(\alpha) - 4r^2\Phi(\alpha)} = f(\alpha)$$
$$\beta_1^2 = \tfrac{1}{2}(\Psi(\alpha) + f(\alpha))$$
$$\beta_2^2 = \tfrac{1}{2}(\Psi(\alpha) - f(\alpha)).$$

Im zweiten Summanden des Integranden in (22) setzen wir jetzt

$$\alpha_\nu = s\,\xi_\nu, \qquad s = \cdot$$

mit
$$r^2 = \sum_\nu \alpha_\nu^2, \qquad \varrho^2 = \sum_\nu \xi_\nu^2$$
Dabei sei ξ_1, ξ_2, ξ_3 der Durchschnittspunkt des Strahles zum Punkte α mit dem *äußeren* Mantel der Normalenfläche:
$$\Psi(\xi) - f(\xi) = 2.$$
Mit anderen Worten: man benutzt den *äußeren Mantel der Normalenfläche* als „*Eichfläche*". Wegen der Homogenität von Φ, Ψ, ϱ ist alsdann
$$s = |\beta_2|$$
$$d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 = s^2 \cos(N, \xi)\, \varrho\, do_\xi\, ds.$$
Dabei ist (N, ξ) der Winkel zwischen dem Strahl ξ_1, ξ_2, ξ_3 und der nach *außen* gerichteten Normalen des äußeren Mantels und do_ξ das Oberflächenelement dieses Mantels.

Abb. 48.

Man erhält so aus dem zweiten Summanden das Integral
$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\sin st}{s}\, ds \iint e^{is(x\xi)} \frac{\varrho \cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi.$$

Für den ersten Summanden in (22) wählen wir den *inneren* Mantel der Normalenfläche als Eichfläche, also für ξ_1, ξ_2, ξ_3 den Durchstoßpunkt mit dem inneren Mantel
$$\Psi(\xi) + f(\xi) = 2.$$
Dort ist $s = |\beta_1|$ und folglich das Integral:
$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\sin st}{s}\, ds \iint e^{is(x\xi)} \frac{\varrho \cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi,$$
wo N wieder die äußere Normale bedeutet.

Es werde nun auf dem äußeren Mantel
$$d\omega_\xi = \frac{\varrho \cos(N, \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi$$
auf dem inneren Mantel
$$d\omega_\xi = -\frac{\varrho \cos(N_1 \xi)}{f(\xi)}\, do_\xi$$
gesetzt. Dann ergibt sich
$$K(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\sin st}{s}\, ds \iint e^{is(x\xi)}\, d\omega_\xi,$$
wo das innere Integral über die gesamte Normalenfläche zu erstrecken ist. Durch Vertauschung der Integrationen folgt wegen der Symmetrie der Normalenfläche und von $d\omega_\xi$ zum Nullpunkt
$$K(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d\omega_\xi \int_0^\infty \frac{\cos s(x\xi) \sin st}{s}\, ds.$$

Bei Auswertung dieses Dirichletschen diskontinuierlichen Faktors (Bd. I, S. 69) erhält man

$$K(x,t) = \frac{1}{16\pi^2} \iint\limits_{|(x\xi)| \leqq t} d\omega_\xi .$$

Wegen $K(x,t) = K\left(\frac{x}{t}, 1\right)$ genügt es

$$K(x,1) = \frac{1}{16\pi^2} \iint\limits_{|(x\xi)| \leqq 1} d\omega_\xi \tag{23}$$

zu betrachten. Dann ist das Integral über denjenigen Teil der Normalenfläche zu erstrecken, der zwischen den beiden Polarebenen

$$(x\xi) = \pm 1$$

der Punkte $\pm x$ bezüglich der Einheitskugel liegt.

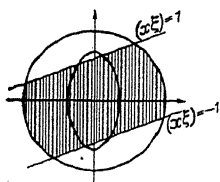
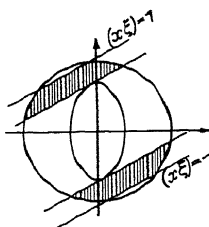
Gilt $|(x\xi)| \leqq 1$ auf der ganzen Normalenfläche, so ist

$$K(x,1) = \frac{1}{16\pi^2} \iint d\omega_\xi ,$$

wo das Integral über die gesamte Normalenfläche zu erstrecken ist; das ist der Fall, wenn x für jedes ξ auf der Normalenfläche zwischen den beiden Polarebenen von $\pm \xi$ liegt, d. h. wenn x im inneren Mantel der Strahlenfläche liegt, da dieser konvex ist.

Abb. 49.

Abb. 50.

Im inneren Mantel der Strahlenfläche ist $K(x, 1)$ konstant. Andererseits muß $K(x, 1)$ außerhalb der kleinsten konvexen Hülle der Strahlenfläche verschwinden. Denn wäre das nicht der Fall, so sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $K(x, 1) > 0$ in einem Punkte $x = y$ außerhalb dieser Hülle; dann kann man in (21) die Anfangswerte g so einrichten, daß $v(x, 0) = g(x)$ innerhalb der konvexen Hülle verschwindet und trotzdem $v(0, 1) \neq 0$ ist; das bedeutete aber einen Widerspruch zu dem Eindeutigkeitssatz von Kapitel VI, § 4, 4.

Der Punkt x liegt außerhalb der kleinsten konvexen Hülle der Strahlenfläche, wenn die beiden Ebenen $(x\xi) = \pm 1$ den inneren Mantel der Normalenfläche treffen. Nun ist nach Definition $d\omega_\xi$ auf dem äußeren Mantel der Normalenfläche positiv, auf dem inneren negativ. $K(x, 1) = 0$ läßt sich dann nach (23) auch so ausdrücken: Das Integral von $|d\omega_\xi|$ über den Teil des äußeren Mantels der Normalenfläche, der zwischen den Ebenen $(x\xi) = \pm 1$ liegt, ist gleich dem Integral von $|d\omega_\xi|$ über den zwischen diesen Ebenen gelegenen Teile des inneren Mantels.

Danach ist, falls die Ebenen $(x\xi) = \pm 1$ den inneren Mantel nicht treffen,

$$K(x, 1) = \frac{1}{16\pi^2} \iint |d\omega_\xi|,$$

wo die Integrale über den Teil des äußeren Mantels zu erstrecken sind, der innerhalb der Ebenen $(x\xi) = \pm 1$ aber außerhalb der zu diesen parallelen Tangentialebenen des inneren Mantel liegt. Aus dieser Darstellung folgt, daß $K(x, 1) > 0$ ist, falls x innerhalb der konvexen Hülle der Strahlenfläche liegt. *Die kleinste konvexe Hülle der Strahlenfläche stellt also das genaue Abhängigkeitsgebiet für die Lösung des Anfangswertproblems der Gleichung* (19) *dar.*

7. Optische Anwendung. Konische Refraktion. Läßt man Licht normal auf eine planparallele Krystallplatte auftreffen, so pflanzt es sich innerhalb der Strahlrichtungen fort, die zur Einfallsrichtung als Normalenrichtung gehören. Da es zu einer Normalenrichtung im allgemeinen *zwei Strahlrichtungen* gibt, so verzweigt es sich also in zwei Büschel, die beim Austreten in zwei zur ursprünglichen Richtung parallele Bündel übergehen. Man erhält diese Strahlrichtungen, indem man die Lote auf die Tangentialebenen an die Normalenfläche nimmt, die zur Einfallsrichtung gehören.

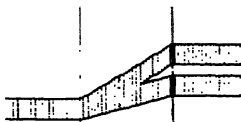
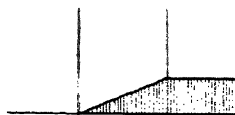



Abb. 51. Abb. 52.

Ist speziell die Krystallplatte normal zu einer optischen Achse geschliffen, d. h. geht die Einfallsrichtung durch einen der vier singulären Punkte der Normalenfläche, so gehören zu dieser Normalenrichtung unendlich viele Strahlenrichtungen, nämlich diejenigen, die zu den Rändern einer der vier Deckel der Strahlenfläche führen; die Strahlen bilden im Krystall einen Kegel. Da die Deckel der Strahlenfläche normal zur optischen Achse gelegene Kreise sind, bilden die aus der Platte austretenden Strahlen einen Kreiszylinder *(konische Refraktion)*.

§ 2. Abhängigkeitsgebiete bei Problemen höherer Ordnung.

Wir haben schon in Kapitel VI, § 4, 5 darauf hingewiesen, daß man bei totalhyperbolischen Anfangswertproblemen für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten als Abhängigkeitsgebiet die *konvexe Hülle des Strahlenkegels* erwarten muß. Wir haben explizite gezeigt, daß bei der Differentialgleichung (18) des vorigen Paragraphen für das Anfangswertproblem der Krystalloptik tatsächlich die konvexe Hülle der Strahlenfläche das Abhängigkeitsgebiet liefert.

Der Beweis beruhte auf der Darstellung

$$v(x, t) = \iiint g(\xi)\, K(x-\xi, t)\, d\xi ,$$

die wir für die Lösung des Anfangswertproblems mit einem Kern $K(x, \xi)$ gewonnen haben.

In diesem Zusammenhang wird das Auftreten von konvexen Hüllen bei Abhängigkeitsgebieten durch folgenden allgemeinen Satz beleuchtet, welcher eine Aussage über Differentialausdrücke macht, die durch *Kompositionen aus niederen hyperbolischen Differentialausdrücken* entstehen.

Es mögen zwei lineare hyperbolische Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$L[u] = 0, \qquad M[v] = 0 \tag{1}$$

vorliegen mit der Ordnung m bzw. n, beide mit der Zeitvariablen t. Der Koeffizient von $\frac{\partial^m u}{\partial t^m}$ bzw. von $\frac{\partial^n v}{\partial t^n}$ habe den Wert Eins.

Wenn für $t = 0$

$$u = u_t = \cdots = \frac{\partial^{m-}}{\partial t^{m-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} = f(x)$$

bzw.

$$v = v_t = \cdots = \frac{\partial^{n-2} v}{\partial t^{n-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{n-1} v}{\partial t^{n-1}} = g(x)$$

vorgeschrieben ist, mögen die Lösungen durch Integraldarstellungen der Form

$$u(x, t) = \int \underset{G}{\cdots} \int K_1(x, \xi, t)\, f(\xi)\, d\xi$$

$$v(x, t) = \int \underset{H}{\cdots} \int K_2(x, \xi, t)\, g(\xi)\, d\xi$$

gegeben sein, wobei die Kerne K_1 und K_2 für vorgegebene x, t außerhalb eines gewissen Gebietes G bzw. H des ξ-Raumes verschwinden, in G bzw. H jedoch positiv seien. Diese Darstellung sei invariant gegen Translation, und die Gebiete G bzw. H für verschiedene Werte von t seien sämtlich ähnlich und ähnlich gelegen. Zu dem Werte $t = 1$ mögen die Gebiete G_1 und H_1 gehören. Wir haben in Kapitel VI, § 4, 5 erkannt, daß die Gebiete G und H konvex sind. Dasselbe gilt, wenn bei den obigen Integraldarstellungen die Integrale nicht über das Innere der Gebiete, sondern nur über den Rand zu erstrecken ist und dann an Stelle der obigen Integrale Randintegrale treten. Unsere Behauptung ist nun:

Das Abhängigkeitsgebiet D für die Lösung der Differentialgleichung $m + n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$M L[u] = 0 \tag{2}$$

ist die konvexe Hülle des Vereinigungsgebietes von G und H.

Zum Beweise konstruieren wir eine Lösung von (2), für welche bei $t = 0$

$$u = u_t = \cdots = \frac{\partial^n}{\partial t^{m+n-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial t^{m+n-1}} = f(x)$$

gilt. Auf Grund unserer früheren Überlegungen, insbesondere unter Benutzung des in Kapitel III, § 6, 4 entwickelten Stoßprinzips können wir diese Lösung folgendermaßen aufbauen. Wir setzen

$$L[u] = v\,,$$

lösen diese unhomogene Gleichung unter den homogenen Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$u = u_t = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} = 0$$

und lösen sodann die homogene Gleichung

$$M[v] = 0$$

mit den unhomogenen Anfangsbedingungen

$$v = v_t = \cdots = \frac{\partial^{n-2} v}{\partial t^{n-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{n-1} v}{\partial t^{n-1}} = f(x)\,.$$

Zur Lösung der ersten Aufgabe gehen wir von der Lösung des Anfangswertproblems von

$$L[\varphi] = 0$$

mit den Anfangswerten

$$\varphi = \varphi_t = \cdots = \frac{\partial^{m-2} \varphi}{\partial t^{m-2}} = 0; \qquad \frac{\partial^{m-1} \varphi(x, 0)}{\partial t^{m-1}} = + v(x, \tau)$$

aus, wobei τ ein Parameter ist. Diese Lösung lautet

$$\varphi(x, t; \tau) = + \iint\limits_{G} K_1(x, \xi, t)\, v(\xi, \tau)\, d\xi\,,$$

und nunmehr ist die Forderung unserer ersten Aufgabe befriedigt durch

$$u(x, t) = \int_0^t \varphi(x, t-\tau; \tau)\, d\tau\,.$$

Also wird jetzt, indem wir die zweite Aufgabe gemäß unserer Annahme lösen

$$u(x, t) = \int \cdots \int K(x, z, t)\, f(z)\, dz \tag{3}$$

mit

$$K(x, z, t) = \int_0 d\tau \int \cdots \int K_1(x, \xi, t-\tau)\, K_2(\xi, z, \tau)\, d\xi\,. \tag{4}$$

Die Lösung unseres Anfangswertproblems für den Differentialausdruck $L\,M$ wird also durch den gefalteten Kern (4) gegeben, und das zugehörige Abhängigkeitsgebiet ist genau dasjenige, in welchem $K > 0$ ist, d. h. dasjenige Gebiet des ξ-Raumes, in welchem beide Faktoren K_1 und K_2 von Null verschieden sind. Auf Grund unserer Voraussetzung genügt es $K(0, z, t)$ zu betrachten. Nun ist der erste Faktor $K_1(0, \xi, t-\tau)$ positiv, wenn ξ in der aus G_1 im Verhältnis $t-\tau$ um das Zentrum Null vergrößerten Fläche liegt; und $K_2(\xi, z, \tau)$, wenn z in der τ-fach vergrößerten

Fläche H_1 um ξ liegt. z liegt also in dem Abhängigkeitsgebiet D, wenn es einen Punkt ξ in der Fläche $(t-\tau)G$ um den Nullpunkt gibt, so daß z in der Fläche τH, um ξ liegt. Es muß also

$$z = (t-\tau)\xi_1 + \tau\xi_2$$

sein, wo ξ_1 bzw. ξ_2 Punkte aus G_1 bzw. H_1 bedeuten und τ beliebige Werte zwischen 0 und t annehmen kann. Dies aber definiert sofort D als die konvexe Hülle des Vereinigungsgebietes G und H.

Wenn die ursprünglichen Abhängigkeitsgebiete nur aus den Rändern von G und H bestehen, so bleibt unsere Betrachtung im wesentlichen unverändert; jedoch ergibt sich, daß der zusammengesetzte Kern K nicht nur auf dem Rande sondern überall in D positiv wird. Bei der Zusammensetzung geht also der Huyghenssche Charakter der Abhängigkeit verloren.

Z. B. hat die Differentialgleichung

$$u_{tttt} - 2\Delta u_{tt} + \Delta\Delta u = 0$$

auch für drei Raumvariable nicht nur mehr den Rand der Kugel mit dem Radius t um den Punkt x, sondern das ganze Kugelinnere zum Abhängigkeitsgebiet.

Entsprechend besitzt die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u = 0$$

als Abhängigkeitsgebiet genau die konvexe Hülle der beiden durch die beiden Komponenten definierten Ellipsen.

§ 3. Huyghens Prinzip im weiteren Sinne und fortsetzbare Anfangsbedingungen.

Bei der Diskussion von Anfangswertproblemen liegt folgende Überlegung nahe: Um, ausgehend von Anfangswerten für $t = t_0$, die Lösung zur Zeit $t = t_2$ zu konstruieren, kann man, anstatt unmittelbar die Darstellungsformel für $t = t_2$ anzuwenden, auch unter Einschaltung eines Zwischenwertes t_1 zwischen t_0 und t_2 folgendermaßen vorgehen. Man bestimmt zunächst die Lösung für $t = t_1$, faßt die Ebene $t = t_1$ als neue Anfangsebene auf und bestimmt nunmehr von ihr ausgehend die Werte für $t = t_2$. Komponiert man diese beiden Darstellungsformeln, so muß das Resultat übereinstimmen mit der Formel, welche die Werte für $t = t_2$ unmittelbar aus den Anfangswerten für $t = t_0$ ergibt. Dieses Faktum wurde von HADAMARD als „*Huyghenssches Prinzip im weiteren Sinne*" bezeichnet. HADAMARD hat betont, daß die Identität der beiden Darstellungen zu einer Relation zwischen den darstellenden Kernen führt und somit eine Quelle interessanter Integralbeziehungen ist[1].

[1] Vgl. Bull. Soc. Math. France Bd. 31, S. 208f. und Bd. 52, S. 241f. Übrigens gelten ähnliche Bemerkungen auch für das Randwertproblem.

Jedoch entsteht hierbei eine merkwürdige Paradoxie, die wir für das Problem der Wellengleichung erörtern wollen. Wir haben in § 5,3 gesehen, daß die Darstellungsformel für die Lösung sicherlich dann eine zweimal stetig differenzierbare Funktion liefert, wenn die Anfangsfunktion u $\left[\frac{m}{2}\right] + 1$-mal, die Ableitung u_t $\left[\frac{m}{2}\right]$-mal stetig differenzierbar ist. Eine Differenzierbarkeitsstufe weniger würde nicht ausreichen, wie einfache Beispiele zeigen[1]. Es gehen also bei der Fortsetzung der Anfangswerte Differenzierbarkeitseigenschaften verloren, und um die stufenweise Fortsetzung bei Berücksichtigung dieses Verlustes ausführen zu können, müßte man entsprechend um so stärkere Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für die Anfangswerte bei $t = t_0$ stellen, je mehr Stufen man zwischenschaltet. Dies deutet darauf hin, daß unsere Anfangsforderungen zu stark sind, obwohl sie nicht durch Differenzierbarkeitsforderungen geringerer Stufe ersetzt werden können. Es entsteht also die Aufgabe, solche Differenzierbarkeitsbedingungen für die Anfangswerte zu finden, welche bei der Fortsetzung für $t > t_0$ genau erhalten bleiben. In der Tat lassen sich derartige „*fortsetzbare Anfangsbedingungen*“ angeben. Sie lauten:

u_t, u_{x_i} sollen am Anfang $t = t_0$ stetig und stetig differenzierbar sein und Ableitungen bis zur $\left[\frac{m}{2}\right]$ Stufe besitzen, welche nach LEBESGUE quadratisch integrierbar sind[2].

§ 4. Ersetzung von Differentialgleichungen durch Integralrelationen. Erweiterung des Charakteristikenbegriffes.

Wir haben schon mehrfach, insbesondere im Zusammenhange mit den Mittelwertsätzen des Kapitels IV, Differentialgleichungen durch Integralrelationen ersetzt. Diesen Gedanken kann man in der folgenden prinzipiell bedeutsamen[3] Weise allgemein fassen:

Ist $L[u]$ ein linearer homogener Differentialausdruck, $M[v]$ der adjungierte Ausdruck (vgl. S. 434) — wir beschränken uns wieder auf die

[1] Wir begnügen uns damit, zu zeigen, daß die Poissonsche Darstellungsformel (vgl. Kap. VI, § 5) für $n = 4$ mit den Anfangswerten $u(x, y, z, 0) = 0$ und den ebenfalls stetigen Anfangswerten $u_t(x, y, z, 0) = 0$ für $r \geqq 1$, $= \sqrt{1 - r^2}$ für $r \leqq 1$ eine stetige Funktion u liefert, deren Ableitung nach t nicht mehr stetig ist. In der Tat wird

$$u(0, 0, 0, t) = 0 \quad \text{für} \quad t \geqq 1, \quad = t\sqrt{1 - t^2} \quad \text{für} \quad t \leqq 1,$$

also

$$u_t(0, 0, 0, t) = 0 \quad \text{für} \quad t > 1, \quad = \frac{1 - 2t^2}{\sqrt{1 - t^2}} \quad \text{für} \quad t < 1.$$

[2] Vgl. FRIEDRICHS u. LEWY: Gött. Nachr. 1932, S. 135f.

[3] Vgl. z. B. auch eine demnächst erscheinende Abhandlung von K. FRIEDRICHS zur Anwendung der allgemeinen Operatorentheorie auf Differentialoperatoren.

Ordnung zwei —, so folgt aus der Relation (19) auf S. 434 für eine in einem Gebiete G zweimal stetig differenzierbare Lösung von $L[u]=0$ und jede beliebige am Rande von G mit ihren Ableitungen erster Ordnung verschwindende in G einschließlich des Randes zweimal stetig differenzierbare Funktion v die Relation

$$\iint_G u\, M[v]\, dx_1 \ldots dx_n = 0. \tag{1}$$

Diese Relation, gefordert für willkürliches v, ist mit der Differentialgleichung $L[u]=0$ äquivalent, wenn u zweimal stetig differenzierbar ist. Sie behält aber ihren Sinn auch noch, wenn für u geringere Stetigkeitsvoraussetzungen gemacht werden. Wir betrachten daher die *Integralrelation* (1) als eine *Erweiterung der Differentialgleichung*.

Von diesem Prinzip aus erfährt der Charakteristikenbegriff eine neue Beleuchtung. Wir haben in Kap. VI, § 2 gesehen, daß Unstetigkeiten der ersten Ableitungen einer Lösung u von $L[u]=0$ an sich längs einer beliebigen Fläche auftreten könnten, und daß man weitere Voraussetzungen machen muß, um solche Unstetigkeitsflächen als charakteristische Flächen zu kennzeichnen. Solche zusätzlichen Forderungen sind jedoch hierzu bei der Relation (1) nicht mehr nötig. Für die erweiterte Differentialgleichung (1) gilt z. B. allgemein: Ist u eine zweimal stetig differenzierbare Lösung mit Ausnahme einer zweimal stetig differenzierbaren Fläche $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$, längs deren die ersten herausführenden Ableitungen von u sprunghafte Unstetigkeiten haben dürfen, so muß $\varphi=0$ charakteristisch sein, d. h. die Relation $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_{x_i}\varphi_{x_k}=0$ befriedigen.

Zum Beweise dürfen wir uns nach § 2 wegen der Invarianz der charakteristischen Relation auf die Annahme beschränken, daß z. B. $\varphi=x_1$ ist. Die Behauptung ist dann in der Relation $a_{11}=0$ für $x_1=0$ ausgedrückt. Wir führen den Beweis an dem hinreichend typischen Beispiel von zwei unabhängigen Veränderlichen $x_1=x$, $x_2=y$, und nehmen demgemäß an, ein Stück der Linie S: $y=0$ sei Unstetigkeitslinie der betrachteten Art. Durch Integration der Relation (19) von S. 434 über ein Gebiet G, welches diese Linie S enthält, ergibt sich, wenn $(u_x)=\lambda$ den Sprung von u_x längs S bedeutet

$$\int_S v\,\lambda\, a_{11}\, dy = 0. \tag{2}$$

Denn außerhalb S gilt $L[u]=0$ und längs S ist u und die Ableitung u_y stetig. Wegen der Willkürlichkeit von v längs S folgt nunmehr, soweit dort der Sprung λ von Null verschieden ist, unmittelbar $a_{11}=0$, d. h. unsere Behauptung.

Die Verallgemeinerung auf mehr unabhängige Veränderliche, auf andere Arten von Unstetigkeiten und auf Differentialgleichungen höherer Ordnung sei als Aufgabe gestellt.

Siebentes Kapitel.

Lösung der Rand- und Eigenwertprobleme auf Grund der Variationsrechnung.

Im ersten Band sowie in Kap. IV dieses Bandes ist der Zusammenhang von Randwert- und Eigenwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen mit der Variationsrechnung ausführlich diskutiert worden. Jedoch fehlt noch ein allgemeiner Beweis für die Lösbarkeit dieser Probleme. Wir wollen nunmehr diese Existenzbeweise auf der Basis der Variationsrechnung erbringen. Dabei legen wir der Darstellung den Fall von zwei unabhängigen Veränderlichen zugrunde, bemerken aber, daß die Theorie unverändert für drei unabhängige Veränderliche gilt, abgesehen von einer Sonderbetrachtung über die Annahme der Randwerte in § 4. Bei mehr als drei unabhängigen Veränderlichen erfordert die Übertragung der Theorie eine Einschränkung (vgl. Fußnote in § 5, 1, S. 499).

Über die Theorie der linearen Rand- und Eigenwerte hinaus werden wir in § 10, ebenfalls auf Grund direkter Variationsmethoden, jedoch im wesentlichen von den vorangehenden Entwicklungen unabhängig, das in Kap. III, § 7 genannte Problem von PLATEAU lösen.

Die sog. direkten Methoden der Variationsrechnung beruhen auf der Bemerkung, daß die Lösungen der Randwert- und Eigenwertprobleme linearer elliptischer Differentialgleichungen sich als Eulersche Bedingungen einfacher Variationsprobleme mit quadratischem Integranden ergeben. Zuerst GAUSS, dann etwa 1847 W. THOMPSON, der spätere Lord KELVIN, haben von diesem Zusammenhang Gebrauch gemacht, um die Randwertaufgabe der Potentialtheorie zu behandeln; kurz nachher hat B. RIEMANN in derselben Weise unter der Bezeichnung „*Dirichletsches Prinzip*“ aus der Lösbarkeit einfacher Miniumprobleme der Variationsrechnung die fundamentalen Existenzsätze der geometrischen Funktionentheorie erschlossen. Bei allen diesen Betrachtungen wurde die Annahme, daß die betreffenden Minimumprobleme Lösungen besitzen, als eine Selbstverständlichkeit stillschweigend hingenommen. Der faszinierende Erfolg, welchen RIEMANN mit seiner Betrachtungsweise erzielte, weckte kritische Aufmerksamkeit, und bald zeigte WEIERSTRASS, daß die Grundannahme jener Schlußweisen in der Luft schwebte. Beispiele einfacher Minimumprobleme, welche keine Lösung besitzen, und andere spezifische Beispiele, bei welchen die Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Kreis mit passenden stetigen

Randwerten sicherlich nicht aus dem Dirichletschen Prinzip gewonnen werden kann[1], führten zu der allgemeinen Überzeugung, daß diese Betrachtungsweise von der Variationsrechnung aus ein Irrweg war, welcher völlig aufgegeben werden mußte. Die Folge dieser kritischen Ablehnung war eine höchst fruchtbare Entwicklung anderer Methoden, insbesondere des alternierenden Verfahrens von H. A. SCHWARZ und der Methode von C. NEUMANN, welche später in die Integralgleichungstheorie einmündete. Doch hat die subjektive Überzeugungskraft der Riemannschen Schlußweisen immer wieder zu dem Versuche einer stichhaltigen Begründung angeregt. Es hat bis zum Jahre 1900 gedauert, ehe diese Bemühungen Erfolg hatten. Im Jahre 1900 und 1901 veröffentlichte D. HILBERT zwei bahnbrechende Arbeiten über das Dirichletsche Prinzip, in welchen die Lösbarkeit der betreffenden Minimumprobleme für einige einfache Fälle auf ganz neuartigen Wegen direkt bewiesen wurde. Seitdem haben sich diese direkten Methoden zu einem Mittel entwickelt, welches an Tragweite allen anderen Methoden überlegen ist und ihnen an Einfachheit nicht nachsteht, welches überdies auch zu Zwecken numerischer Rechnung vielfach Verwendung gefunden hat. Das vorliegende Kapitel ist ein Versuch, mit diesen Methoden die Existenzbeweise für Randwert und Eigenwertprobleme in dem weitestgehenden Umfange zu erbringen, in welchem sie in diesem Werke früher aufgetreten sind. Im Hinblick auf die angestrebte Allgemeinheit müssen dabei hinsichtlich der Kürze gewisse Opfer gebracht werden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß bei Beschränkung auf den Spezialfall der Potentialgleichung sich sehr weitgehende Vereinfachungen automatisch ergeben[2].

[1] Vgl. Bd. I, S. 155.

[2] Zur ausgedehnten Literatur seien nur die folgenden Abhandlungen erwähnt: WEIERSTRASS: Über das sog. Dirichletsche Prinzip. Werke Bd. 2. SCHWARZ, H. A.: Ges. Abhandlungen Bd. 2, S. 133f. NEUMANN, C.: Sächsische Berichte, 1870 und Vorlesungen über RIEMANNS Theorie der Abelschen Intergrale, S. 388f. Leipzig 1884.

HILBERT: Über das Dirichletsche Prinzip. Ges. Abhandlungen Bd. 3.

LEVI, B.: Sul Principio di DIRICHLET, G. FUBINI, Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazione alle derivate parziali di ordini pari. LEBESGUE: Sur le problème de DIRICHLET. Alle drei in den Rendiconti del Circolo matematico die Palermo, Bd. 22—24.

ZAREMBA, S.: Sur le principe du minimum. Krakauer Akademieberichte, Juli 1909. Ferner die Arbeiten von R. COURANT seit 1912, zitiert in R. COURANT: Über direkte Methoden der Variationsrechnung und verwandte Fragen. Math. Ann. Bd. 97 (1927). Über die Anwendung der Variationsrechnung usw. Acta Math. Bd. 49. Sowie: Neue Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip. Crelles Journ. Bd. 165 (1931).

Die in diesem Kapitel entwickelte Theorie stellt eine Weiterführung früherer Arbeiten des Verfassers dar; insbesondere wird ein Gedanke aus der letztgenannten Arbeit benutzt, welche sich auf die Randwertaufgabe der Potentialtheorie und auf die Existenzsätze der geometrischen Funktionentheorie bezieht.

Das Verfahren dieser direkten Methoden verläuft allgemein folgendermaßen: Man geht aus von der Bemerkung, daß bei unseren Minimumproblemen von vornherein zwar nicht die Existenz eines Minimums, jedoch die einer unteren Grenze d feststeht; daher gibt es eine Folge von Funktionen, welche im Variationsproblem zulässig sind und für welche der Variationsausdruck gegen die untere Grenze d strebt. Wie wir schon (Band I, S. 157) gesehen haben, braucht eine solche „*Minimalfolge*" keineswegs zu konvergieren; und wenn sie konvergiert, ist für die Grenzfunktion die Existenz von Ableitungen keineswegs evident. Es entsteht also nunmehr die Hauptaufgabe, aus einer Minimalfolge durch passend zu findende konvergente Prozesse die Lösung des Minimumproblemes zu gewinnen und dann zu zeigen, daß sie hinreichende Differenzierbarkeitseigenschaften besitzt, um sie auch als Lösung des Differentialgleichungsproblemes identifizieren zu können.

Die tatsächliche Konstruktion von Minimalfolgen ist eine für praktisch numerische Zwecke wichtige Aufgabe, welche aber hier beiseite gelassen wird, da wir uns für den Existenzbeweis mit dem Hinweis auf die selbstverständliche Existenz einer solchen Folge begnügen können. (Die Konstruktion von Minimalfolgen zwecks numerischer Berechnung ist ein wichtiges nach W. RITZ benanntes Verfahren. Siehe Bd. I, S. 149 und die obengenannte Literatur, sowie WALTHER RITZ: Gesammelte Abhandlungen.)

§ 1. Vorbereitungen.

1. Das Dirichletsche Prinzip für den Kreis. Wir beginnen mit einer lehrreichen, wenn auch für das spätere nicht nötigen Diskussion des Zusammenhangs von Randwertaufgabe der Potentialtheorie und Dirichletschem Minimumproblem für den Kreis (vgl. Bd. I, Kap. IV, § 2, 3).

Es sei im Einheitskreise B: $x^2 + y^2 < 1$ der x, y-Ebene eine noch einschließlich des Randes C stetige Funktion $g(x, y)$ gegeben, für welche in B die ersten Ableitungen g_x und g_y stückweise stetig sind[1], und für welche das Dirichletsche Integral

$$D[g] = \iint_B \{g_x^2 + g_y^2\}\, dx\, dy$$

existiert, was wir durch

$$D[g] < \infty$$

ausdrücken wollen. Wir suchen nun die Lösung der Randwertaufgabe, eine in B reguläre Potentialfunktion u zu bestimmen, welche am Rande C dieselben Randwerte wie g annimmt.

---

[1] Eine Funktion heißt wie früher stückweise stetig in einem Gebiet, wenn sie in jedem abgeschlossenen Teilbereich stetig ist, abgesehen von beliebigen Unstetigkeiten in einzelnen Punkten und Unstetigkeiten erster Art (Sprüngen) längs einer endlichen Anzahl von glatten Kurvenbögen. Dabei heißt ein Kurvenbogen glatt, wenn er mittels eines Parameters t in Parameterform $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit stetig differenzierbarem $x(t)$, $y(t)$ und $x_t^2 + y_t^2 \neq 0$ dargestellt werden kann.

Sind r, ϑ Polarkoordinaten, $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ und sind a_n und b_n die Fourierschen Koeffizienten der Funktion $g = g(r, \vartheta)$, so ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Formel

$$u(x, y) = u(r, \vartheta) = \lim_{n\to\infty} u_n \tag{1}$$

mit

$$u_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n} (a_\nu \cos\nu\vartheta + b_\nu \sin\nu\vartheta)\, r^\nu.$$

Dabei ist die Konvergenz von u_n gegen u gleichmäßig in jedem konzentrischen Kreise (vgl. Kap. IV, § 2, S. 243, sowie S. 17). Wir bezeichnen nun als *Dirichletsches Prinzip für den Kreis* den Satz:

Für die Lösungen dieser Randwertaufgabe existiert das Integral

$$D[u]$$

und es ist

$$D[u] \leqq D[g],$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $g = u$ *besteht.* Mit anderen Worten, u kann in eindeutiger Weise als Lösung des folgenden Variationsproblems gekennzeichnet werden: Unter allen in $B + C$ stetigen Funktionen φ mit stückweise stetigen ersten Ableitungen in B und mit denselben Randwerten wie g sollen diejenigen u gefunden werden, für welche $D[\varphi]$ einen möglichst kleinen Wert annimmt.

Ein Hauptziel dieses Kapitels wird sein, ein entsprechendes Resultat für ein beliebiges Gebiet G zu gewinnen und ausgehend vom Variationsproblem die Randwertaufgabe zu lösen. In dieser Nummer jedoch wollen wir uns damit begnügen, unseren Satz zu beweisen unter Benutzung der Tatsachen, daß wir in (1) die Lösung des Randwertproblems für den Kreis B schon gefunden haben.

Dabei ist die ausdrücklich gemachte Voraussetzung $D[g] < \infty$ durchaus wesentlich. Wir haben schon (Bd. I, S. 155) gesehen, daß es sehr wohl stetige Funktionen g gibt, für welche die zugehörige Randwertaufgabe zwar durch die obige Funktion u gelöst ist, für welche aber $D[u]$ nicht existiert.

Für den Beweis liegt die folgende Schlußweise nahe: wir setzen $g = u + v$, wobei dann v am Rande verschwindet und erhalten mit der Bezeichnung

$$D[\varphi, \psi] = \iint_B \{\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y\}\, dx\, dy$$

die Relation

$$D[g] = D[u] + D[v] + 2D[u, v].$$

Wenn wir auf Grund der Greenschen Formel den Ausdruck $D[u, v]$ umformen und wegen $\Delta u = 0$ in B und $v = 0$ am Rande C für ihn Null erhalten könnten, so wäre unsere Behauptung unmittelbar bewiesen.

Jedoch ist diese Schlußweise nicht stichhaltig, weil wir weder die Existenz von $D[u]$ apriori kennen, noch die Greensche Formel, ohne nähere Kenntnis des Verhaltens der Ableitungen von u am Rande auf den vollen Kreis anwenden dürfen.

Der Beweis kann jedoch unter Umgehung dieser Schwierigkeiten einfach folgendermaßen geführt werden: Wir betrachten statt u die Näherungsfunktion u_n, eine in der ganzen Ebene reguläre Potentialfunktion, deren Ableitungen somit auch auf C stetig sind. Wir setzen jetzt

$$u_n + v_n = g.$$

Die Randwerte $v_n(1, \vartheta)$ sind dann orthogonal auf den Funktionen

$$1, \quad \cos \nu \vartheta, \quad \sin \nu \vartheta \quad \text{für} \quad \nu \leqq n,$$

weil die Randwerte von u_n und g dieselben Fourierschen Koeffizienten a_ν, b_ν für $\nu \leqq n$ besitzen. Nunmehr können wir die Greensche Formel für $\varphi = u_n$ und $\psi = v_n$ auf den gesamten Kreis B anwenden. Beachten wir, daß am Rande des Kreises die normale Ableitung $\frac{\partial u_n}{\partial r}$ von u_n wieder eine lineare Kombination der obigen $2n+1$ trigonometrischen Funktionen und somit zu v_n orthogonal ist, so folgt sofort

$$D[u_n, v_n] = -\iint v_n \Delta u_n \, dx\, dy + \int v_n \frac{\partial u_n}{\partial r} \, d\vartheta = 0.$$

Somit wird

$$\begin{aligned} D[g] &= D[u_n] + D[v_n] + 2D[u_n, v_n] \\ &= D[u_n] + D[v_n], \end{aligned}$$

also

$$D[u_n] \leqq D[g].$$

Es gilt also erst recht $D_R[u_n] \leqq D[g]$, wobei der Index R andeutet, daß das Integral links nur über eine konzentrische Kreisfläche K_R mit einem Radius $R < 1$ erstreckt werden soll. Da in diesem Kreise die Ableitungen von u_n gleichmäßig gegen die Ableitungen von u konvergieren, so wird

$$D_R[u] \leqq D[g]$$

und daher für $R \to 1$

$$D[u] \leqq D[g],$$

wie behauptet wurde.

Die eindeutige Bestimmtheit der Lösung u folgt nunmehr folgendermaßen: Wäre $u + v$ eine andere Lösung des Minimumproblemes, so muß auch $D[v]$ und

$$D[u, v] = \iint (u_x v_x + u_y v_y)\, dx\, dy$$

existieren (s. Nr. 3), und mit jedem konstantem ε ist $u+\varepsilon v$ eine zulässige Vergleichsfunktion in unserem Minimumproblem. Es ist daher

$$D[u+\varepsilon v] = D[u] + 2\varepsilon D[u,v] + \varepsilon^2 D[v]$$

eine quadratische Funktion in ε, welche außer dem Minimum bei $\varepsilon = 0$ kein weiteres Minimum, insbesondere keines bei $\varepsilon = 1$ haben kann, es sei denn, daß $D[u,v]$ und $D[v] = 0$ sind. Da aus der letzten Gleichung $v = 0$ folgt, so ist unsere Behauptung bewiesen.

Statt die so bewiesene Minimumeigenschaft für den Kreis und entsprechend für Kugeln in mehreren Dimensionen zum Ausgangspunkt einer Behandlung allgemeiner Gebiete zu machen[1], wollen wir eine wesentlich allgemeinere, nicht nur auf die Potentialgleichung beschränkte Methode entwickeln, welche von Lösungen spezieller Randwertprobleme keinen Gebrauch macht.

2. Allgemeine Problemstellungen. Im folgenden wird es sich um Randwertprobleme und Eigenwertprobleme elliptischer Differentialgleichungen 2. Ordnung für offene Gebiete G mit dem Rand Γ handeln; dabei nehmen wir an, daß das Gebiet G beschränkt ist, d. h. ganz innerhalb eines Quadrates liegt (vgl. dagegen die Bemerkung in § 9, Nr. 5). Wir betrachten elliptische lineare Differentialausdrücke $L[u]$ für die Funktion $u(x,y)$, welche als Eulersche Variationsausdrücke aus einem quadratischen Integral mit der Argumentfunktion $\varphi(x,y)$:

$$E[\varphi] = \iint_G \{p(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + 2a\varphi\varphi_x + 2b\varphi\varphi_y + q\varphi^2\}\,dx\,dy$$

entstehen. Dabei sollen p, q, a, b stetige Funktionen in $G+\Gamma$ sein; es möge q stetige Ableitungen 1. Ordnung, a, b stetige Ableitungen bis zur 2. Ordnung, p stetige Ableitungen bis zur 3. Ordnung in G haben, und überdies

$$(2) \qquad p > 0$$

$$(3) \qquad q \geqq 0$$

in $G+\Gamma$ gelten. Ferner machen wir in bezug auf den quadratischen Integranden die *Definitheitsvoraussetzung*: Es soll zum Gebiet G eine feste Konstante $\varkappa$ geben, so daß mit beliebigen Parametern ξ, η, ζ die Ungleichung

$$(4) \qquad \begin{cases} A(\xi,\eta,\zeta) = p(\xi^2+\eta^2) + 2a\xi\zeta + 2b\eta\zeta + q\zeta^2 \\ \qquad \geqq \varkappa(\xi^2+\eta^2) \end{cases}$$

an jeder Stelle von $G+\Gamma$ gilt.

Im Hinblick auf die im folgenden angestrebte Allgemeinheit ist es zweckmäßig, von vornherein noch eine Funktion k einzuführen, welche in $G+\Gamma$ positiv und in G stetig differenzierbar ist.

---

[1] Vgl. zu einer solchen Methode etwa HURWITZ-COURANT: Funktionentheorie, Abschn. III, S. 451ff. Berlin 1931.

Der Eulersche Differentialausdruck zum Variationsintegral $E[\varphi]$ lautet dann

$$2k\,L[u],$$

wo

$$L[u]=\frac{1}{k}\left[(p\,u_x)_x+(p\,u_y)_y-q^*u\right] \tag{5}$$

und

$$q^*=q-a_x-b_y \tag{6}$$

gesetzt ist.

Es sei darauf hingewiesen, daß man auf Grund einer einfachen Transformation allgemein den Faktor p durch 1 ersetzen kann. Denn durch Einführung einer neuen Argumentfunktion

$$\sqrt{p}\,\varphi=\psi$$

geht der Integrand von $E[\varphi]$ in einen analogen Integranden über, wobei an die Stelle des Faktors p der Faktor 1 tritt und ein Eulerscher Differentialausdruck für

$$v=\sqrt{p}\,u$$

entsteht, welcher — mit anderem q^* — die Form

$$v_{xx}+v_{yy}-q^*v$$

hat. Hiervon werden wir später in § 5 Gebrauch machen.

Wir behandeln für das Gebiet G Randwertprobleme, welche zu der Differentialgleichung

$$L[u]=-f \tag{7}$$

und Eigenwertprobleme, die zu der Eigenwertgleichung

$$L[u]+\lambda u=0 \tag{8}$$

gehören, wobei f eine in $G+\Gamma$ stetige und in G stückweise stetig differenzierbare Funktion sein soll. Als Randbedingungen werden wir die folgenden Typen betrachten.

Erste Randbedingung (Feste Randwerte). Die Randwerte von u auf Γ sollen vorgeschrieben sein in der Weise, daß mit einer in $G+\Gamma$ vorgegebenen stetigen Funktion g die Funktion $u-g$ in einer noch näher zu kennzeichnenden Weise am Rande verschwindet.

Beim Eigenwertproblem sind die Randwerte Null vorgeschrieben.

Die *zweite und dritte Randbedingung*, wie wir sie in Bd. I, Kap. V diskutiert haben, verlangt, daß eine vorgeschriebene Linearkombination zwischen u selbst und der Normalenableitung von u am Rande in einem noch näher zu bezeichnenden Sinn vorgeschrieben ist.

Die sachgemäße und präzise Formulierung der Randbedingungen bildet eine eigentümliche Schwierigkeit. Wir haben schon in Kap. IV, § 4,4 gesehen, daß man nicht für jedes Gebiet G wirkliche Annahme der Randwerte in jedem Randpunkt erwarten darf. Noch weniger darf man im eigentlichen Sinn des Wortes die Lösbarkeit von Randwertaufgaben erwarten, bei denen Normalableitungen der gesuchten Funktion in die

Randbedingungen eingehen; abgesehen davon, daß wir keineswegs die Existenz von Normalen auf dem Rand Γ voraussetzen wollen, ist die Existenz von Ableitungen der Lösungsfunktionen u unserer Differentialgleichung am Rande ein schwieriges Problem, das nur unter speziellen Voraussetzungen angreifbar ist und mit dem Kern unserer Fragestellung nichts zu tun hat.

Wir werden im folgenden eine solche Formulierung unserer Randbedingungen geben, für welche die Randwertaufgabe in eindeutiger Weise und das Eigenwertproblem in vollständiger Weise lösbar sind. Dabei wird es möglich sein, für die ersten Randwertaufgaben die Lösungen bei beliebigen offenen Gebieten G und sogar beliebigen offenen nicht notwendig zusammenhängenden Punktmengen durchzuführen, während für die Randbedingungen zweiter und dritter Art gewisse Einschränkungen über das Gebiet G gemacht werden müssen. Wir werden diese Randbedingungen erst präzise formulieren, nachdem wir lineare Funktionenmannigfaltigkeiten eingeführt haben, für welche unsere Variationsintegrale sinnvoll sind, und welche überhaupt dem folgenden Existenzbeweisen zugrunde gelegt werden.

3. Lineare Funktionenräume mit quadratischer Metrik[1]. Definitionen. Wir betrachten folgende quadratischen Integralausdrücke mit den Argumentfunktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$

$$H[\varphi, \psi] = \iint\limits_G k\varphi\psi\, dx\, dy, \quad H[\varphi] = H[\varphi, \varphi],$$

$$D[\varphi, \psi] = \iint\limits_G p(\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y)\, dx\, dy, \quad D[\varphi] = D[\varphi, \varphi],$$

$$E[\varphi, \psi] = D[\varphi, \psi] + \iint\limits_G \{a\varphi\,\psi_x + a\psi\varphi_x + b\varphi\,\psi_y + b\,\psi\,\varphi_y + q\varphi\psi\}\, dx\, dy,$$
$$E[\varphi] = E[\varphi, \varphi],$$

wobei die Koeffizienten p, a, b, q, k den schon in Nr. 2 genannten Bedingungen genügen: Sie alle sind stetig in $G + \Gamma$, q und k sind einmal, a, b zweimal und p dreimal stetig differenzierbar in G. Ferner sollen in $G + \Gamma$ die Ungleichungen (2), (3), (4) aus Nr. 2 bestehen.

Die Integrale sind im üblichen Sinne als uneigentliche Integrale zu verstehen, nämlich als Grenzwerte der Integrale für abgeschlossene Teilbereiche G_n, wobei G_{n+1} das Gebiet G_n enthält und jeder Punkt von G in einem G_n liegt und wobei die betreffenden Integranden in jedem G_n einschließlich des Randes stückweise stetig sind. Wir werden unsere Integrale für die folgenden Klassen $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{D}$ von Funktionen verwenden:

Definition 1. Alle in G stückweise stetigen Funktionen $\varphi(x, y)$, für welche

$$H[\varphi] < \infty$$

ist, bilden den Funktionenraum $\mathfrak{H}$.

[1] Für eine vollständige Entwicklung dieser Begriffe vgl. M. H. Stone: Linear Transformations in Hilbert Space. New York 1932.

Definition 2. Alle in G stetigen Funktionen $\varphi(x, y)$ aus $\mathfrak{H}$ mit stückweise stetigen ersten Ableitungen φ_x, φ_y, für welche

$$D[\varphi] < \infty$$

ist, bilden den Funktionenraum $\mathfrak{D}$. — Es gilt:

Satz 1. *Für Funktionen φ des Raumes $\mathfrak{D}$ existiert auch das Integral $E[\varphi]$, und es gilt mit festen Konstanten $\varkappa, \alpha, \beta$, welche nur von G abhängen, eine Ungleichung der Form*

$$\varkappa D[\varphi] \leqq E[\varphi] \leqq \alpha D[\varphi] + \beta H[\varphi]. \tag{9}$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus unseren Voraussetzungen über p, a, b, q, k sowie aus der Ungleichung (4) und

$$2|a\varphi\varphi_x + b\varphi\varphi_y| \leqq \text{konst.}\{\varphi^2 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2\}.$$

Alle unsere Integralformen H, D, E haben für die Funktionen $\varphi(x, y)$ aus den Räumen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ Eigenschaften, die wir gemeinsam formulieren wollen. Bezeichnen wir diese Integralformen bzw. ihre Polarformen allgemein mit

$$Q[\varphi] \quad \text{bzw.} \quad Q[\varphi, \psi],$$

so gilt

$$Q[\varphi] \geqq 0. \tag{10}$$

Ferner:

Satz 2. *Aus $Q[\varphi] < \infty$ und $Q[\psi] < \infty$ folgt die Existenz der Polarform $Q[\varphi, \psi]$, und es ist*

$$Q[\varphi, \psi] = Q[\psi, \varphi].$$

Satz 3. *Mit φ und ψ gehört auch jede lineare Kombination $\lambda\varphi + \mu\psi$ dem betreffenden Raume $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{D}$ an, und es gilt*

$$Q[\lambda\varphi + \mu\psi] = \lambda^2 Q[\varphi] + 2\lambda\mu Q[\varphi, \psi] + \mu^2 Q[\psi]. \tag{11}$$

Damit ist ausgedrückt: Die Räume $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{D}$ sind *lineare Mannigfaltigkeiten*, und Q ist in ihnen eine nichtnegative quadratische Form.

Schließlich besteht die *Schwarzsche Ungleichung*

$$Q^2[\varphi, \psi] \leqq Q[\varphi]\, Q[\psi] \tag{12}$$

und die aus ihr folgende *Dreiecksungleichung*

$$\sqrt{Q[\varphi + \psi]} \leqq \sqrt{Q[\varphi]} + \sqrt{Q[\psi]}. \tag{13}$$

Zum Beweise der obigen Aussagen bemerken wir, daß sie für echte Teilgebiete offensichtlich gelten — die Ungleichung (12) wegen der Definitheit von Q —, und daß dann die Existenz der gemischten Form $Q[\varphi, \psi]$ durch Grenzübergang aus der Identität (11) und damit die Sätze für das Gesamtgebiet folgen.

Wir fassen die Integralform Q als *„metrische Form“ im* betreffenden *linearen Raume* auf, indem wir als *„Abstand zwischen zwei Funktionen* φ und ψ *im Sinne der Q-Metrik“* den Ausdruck

$$\sqrt{Q[\varphi-\psi]}$$

definieren. Für den *Konvergenzbegriff* auf Grund dieser Abstandsdefinition gelten einige auf der Hand liegenden Tatsachen:

Es seien im folgenden ζ, φ Funktionen des zur Form Q gehörigen Raumes $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{D}$ und φ^ν eine Folge solcher Funktionen. Dann gilt

Satz 4. *Aus der Relation*

$$(14)_1 \qquad Q[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0$$

bzw.

$$(14)_2 \qquad Q[\varphi^\nu-\varphi]\to 0$$

folgt die Beschränktheit der Ausdrücke $Q[\varphi^\nu]$ *und die Relation*

$$(15)_1 \qquad \sqrt{Q[\varphi^\nu]}-\sqrt{Q[\varphi^\mu]}$$

bzw.

$$(15)_2 \qquad \sqrt{Q[\varphi^\nu]}-\sqrt{Q[\varphi]}\to 0$$

sowie

$$(16)_1 \qquad Q[\varphi^\nu]-Q[\varphi^\mu]\to 0$$

bzw.

$$(16)_2 \qquad Q[\varphi^\nu]-Q[\varphi]\to 0.$$

Satz 5. *Gilt*

$$(17) \qquad Q[\varphi^\nu]\to 0,$$

so folgt für jede feste Funktion ζ, *für welche* $Q[\zeta]$ *existiert, die Relation*

$$(18) \qquad Q[\varphi^\nu,\zeta]\to 0.$$

Zum Beweise beachten wir, daß Gleichungen (15) eine unmittelbare Folge von (14) und der Dreiecksrelation sind. Halten wir ν fest, so folgt sodann die Beschränktheit von $Q[\varphi^\mu]$ und daher (16), indem wir mit $\sqrt{Q[\varphi^\nu]}+\sqrt{Q[\varphi^\mu]}$ bzw. $\sqrt{Q[\varphi^\nu]}+\sqrt{Q[\varphi]}$ multiplizieren. — Satz 5 ist eine unmittelbare Folge der Schwarzschen Ungleichung.

Eine Funktionenfolge φ^ν heißt *„stark“ konvergent in sich im Sinne der Q-Metrik, wenn*

$$(14)_1 \qquad Q[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0$$

gilt, *„stark“ konvergent gegen eine Funktion* φ, wenn

$$(14)_2 \qquad Q[\varphi^\nu-\varphi]\to 0$$

gilt.

Neben diesem Begriff der starken Konvergenz wird der der *„schwachen Konvergenz“* eine Rolle spielen. *Im Sinne der Q-Metrik konvergiert die Funktionenfolge* φ^ν mit beschränktem $Q[\varphi^\nu]$ *schwach in sich bzw. gegen* φ, *wenn*

(19) $$Q[\varphi^\nu - \varphi^\mu, \zeta] \to 0$$
bzw.
(19)₁ $$Q[\varphi^\nu, \zeta] \to Q[\varphi, \zeta]$$
gilt für jede feste Funktion ζ.

Satz 5 besagt hiernach: *Aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz.*

Neben dem Raume $\mathfrak{D}$ werden wir noch Teilräume[1] von $\mathfrak{D}$ zu betrachten haben.

Definition 3. Alle Funktionen φ aus $\mathfrak{D}$, welche in einem Randstreifen des Bereiches G identisch verschwinden, bilden den Funktionenraum $\dot{\mathfrak{D}}$. Dabei verstehen wir unter einem Randstreifen eine Punktmenge aus G, zu welcher jedenfalls alle solchen Punkte gehören, die vom Rand Γ einen Abstand kleiner als eine positive Größe ε besitzen. Wir sagen dann, der Randstreifen hat eine Breite kleiner als ε. Die Funktionen φ aus $\dot{\mathfrak{D}}$ sind also solche Funktionen, zu welchen es ein positives ε gibt, so daß in allen Punkten, die vom Rande einen Abstand kleiner als ε haben, φ identisch Null ist.

Definition 4. *Alle Funktionen* φ *aus* $\mathfrak{D}$, *zu denen es eine Folge von Funktionen* φ^ν *aus* $\dot{\mathfrak{D}}$ *mit*
$$H[\varphi^\nu - \varphi] \to 0,$$
$$D[\varphi^\nu - \varphi] \to 0$$
gibt, bilden den Raum $\mathring{\mathfrak{D}}$. Dieser Raum $\mathring{\mathfrak{D}}$ entsteht somit durch einen *Prozeß des „Abschließens“* aus $\dot{\mathfrak{D}}$[2]. Offenbar gilt

Satz 6. *Eine Funktion* φ aus $\mathfrak{D}$ *liegt in* $\mathring{\mathfrak{D}}$, *wenn es eine Funktionenfolge* φ^ν *aus* $\mathring{\mathfrak{D}}$ *gibt, für welche*
$$D[\varphi^\nu - \varphi] \to 0, \quad H[\varphi^\nu - \varphi] \to 0$$
gilt.

Es ist nützlich, noch die folgende Definition heranzuziehen.

Definition 5. *Alle stetig differenzierbaren Funktionen* φ *aus* $\mathfrak{D}$, *welche in G stückweise stetige zweite Ableitungen besitzen, und für welche*
$$L[\varphi]$$
zu $\mathfrak{H}$ *gehört, bilden den Raum* $\mathfrak{F}$[3].

[1] Zur Definition dieser Räume und ihrer Verwendung für die Formulierung von Randbedingungen vgl. FRIEDRICHS: Zur Spektraltheorie. Math. Ann. Bd. 109, S. 465 u. S. 685.

[2] Es sei darauf hingewiesen, daß die hier betrachteten linearen Räume durch vollständiges Abschließen, statt durch Abschließen in $\mathfrak{D}$, zu „*Hilbertschen Räumen*“ werden. — Die Darstellung dieses Kapitels zeigt, daß es für den vorliegenden Zweck nicht erforderlich ist, im abgeschlossenen Hilbertschen Raum zu operieren.

[3] Man kann auch einen Raum $\dot{\mathfrak{H}}$ als Menge derjenigen Funktionen aus $\mathfrak{H}$ definieren, welche in einem Randstreifen identisch verschwinden. Durch Abschließen gelangt man wie oben zu einem Raum $\mathring{\mathfrak{H}}$. Aufgabe: Man beweise, daß die Räume $\mathring{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{H}$ identisch sind.

Man beachte die folgenden Ungleichungen. Durch einen angehängten Index p oder k bzw. 1 seien die betreffenden Ausdrücke D bzw. H mit den Funktionen p und k bzw. mit dem Faktor 1 bezeichnet. Gilt dann

$$0 < p_0 \leqq p \leqq p_1, \quad 0 < k_0 \leqq k \leqq k_1 \qquad (p_0, p_1, k_0, k_1 \text{ konstant}),$$

so ist

$$p_0 D_1[\varphi] \leqq D_p[\varphi] \leqq p_1 D_1[\varphi] \tag{20}$$

$$k_0 H_1[\varphi] \leqq H_k[\varphi] \leqq k_1 H_1[\varphi]. \tag{21}$$

Es folgt somit: *Die Funktionenräume* $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$, $\mathring{\mathfrak{D}}$, *welche zu den Funktionen* p *und* k *gehören, sind identisch mit den entsprechenden Funktionenräumen, welche zu anderen Funktionen* p *und* k *gehören, speziell mit den Funktionenräumen zu den Funktionen* $p = 1$ und $k = 1$.

Ferner: *Aus Relationen*

$$D_1[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \quad H_1[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

folgen Relationen

$$D_p[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \quad H_k[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

und umgekehrt. Es wird daher im allgemeinen nicht notwendig sein, bei solchen Relationen den Hinweis auf die Funktionen p und k explizit in der Bezeichnung auszuführen. Wohl aber werden wir gelegentlich durch einen Index den zugrunde gelegten Bereich G andeuten, indem wir D_G schreiben.

4. Randbedingungen. Es ist nunmehr leicht, den Sinn der ersten Randbedingung: $u - g = 0$ am Rande sachgemäß zu präzisieren. Wir formulieren sie als

Erste Randbedingung: Die Funktion

$$u - g \text{ gehört zu } \mathring{\mathfrak{D}}.$$

Es wird sich zeigen, daß diese Bedingung schwach genug ist, um die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für einen beliebigen offenen Bereich G zu ermöglichen, und stark genug, um die eindeutige Bestimmtheit der Lösung zu sichern.

Bei den Randbedingungen zweiter und dritter Art werden wir die sachgemäße Formulierung erst in §6 und 7 geben. Diese Randbedingungen werden sich als *natürliche Randbedingungen bei Variationsproblemen* erweisen, bei denen für die Konkurrenzfunktionen apriori keine besonderen Randbedingungen gestellt sind.

Daß es sich bei unserer obigen Bedingung: $u - g$ gehört zu $\mathring{\mathfrak{D}}$ um eine wirkliche *Rand*bedingung handelt, obwohl sie an sich auf das Gesamtverhalten der Funktionen u in G Bezug nimmt, geht aus folgender Überlegung hervor: Es sei $u = v + \zeta$, wobei ζ zu $\dot{\mathfrak{D}}$ gehört, d.h. in einem Randstreifen identisch verschwindet, und wobei also v mit u im Randstreifen übereinstimmt; dann erfüllt zugleich mit u auch v die Rand-

bedingung. Es gehört nämlich $v - g$ nach Satz 6 zu $\mathring{\mathfrak{T}}$, weil im Sinn der D- und H-Metrik durch die Funktionen $\varphi^\nu - \zeta$ aus $\mathring{\mathfrak{T}}$ approximiert wird, wenn die Funktion u durch die Funktion φ^ν approximiert ist.

Die Frage, ob aus der hier gestellten Randbedingung über die Annahme der Randwerte von u präzisere Aussagen folgen, wird im Zusammenhang unserer Theorie als ein Sonderproblem erscheinen, auf das wir in § 4 und § 9, 3 eingehen.

§ 2. Die erste Randwertaufgabe.

1. Problemstellung. Wir wiederholen nochmals die Problemstellung des ersten Randwertproblems. Sie bezieht sich auf ein beschränktes offenes Gebiet G mit dem Rand Γ, auf eine gegebene Funktion g aus $\mathfrak{D}$, eine in $G + \Gamma$ stetige und in G stückweise stetig differenzierbare Funktion f aus $\mathfrak{H}$ und den Differentialausdruck

$$L[u] = \frac{1}{k}\,[(p\,u_x)_x + (p\,u_y)_y - q^*\,u] \tag{1}$$

mit

$$q^* = q - a_x - b_y \tag{2}$$

in G.

Randwertproblem I. *Gesucht ist eine Funktion u, welche zu $\mathfrak{F}$ gehört, für welche $u - g$ zu $\mathring{\mathfrak{D}}$ gehört, und für welche in G*

$$L[u] = -f \tag{3}$$

ist. Im Spezialfall $p = 1$, $q = a = b = 0$ reduziert sich unser Problem auf die Randwertaufgabe für

$$\Delta u = -f. \tag{4}$$

Wir bemerken, daß unser Problem formal äquivalent mit einem Problem wird, in welchem von vornherein $a = b = 0$ und q^* statt q gesetzt wird. Wegen der oben in § 1 gestellten Bedingung $q \geqq 0$ ist jedoch das Problem in der hier gestellten Form etwas allgemeiner, weil nicht mehr notwendig $q^* \geqq 0$ zu sein braucht. — Um unser Randwertproblem zu lösen, betrachten wir

Variationsproblem I. *Gesucht ist eine Funktion $\varphi = u$ aus $\mathfrak{T}$, welche der Randbedingung*

$$\varphi - g \text{ in } \mathring{\mathfrak{D}} \tag{5}$$

genügt, und für welche der Variationsausdruck

$$E[\varphi] - 2H[f, \varphi] \tag{6}$$

ein Minimum wird.

Im Spezialfall $p = 1$, $a = b = q = 0$ erhalten wir das klassische *Dirichletsche Variationsproblem*

$$D[\varphi] = \text{Min.}$$

mit der Randbedingung (5).

2. Greensche Formel. Hauptungleichung zwischen D und H. Eindeutigkeit. Unter Bezugnahme auf die in § 1 definierten linearen Räume läßt sich die Greensche Formel ohne Schwierigkeiten vom Rande her aussprechen: Wenn φ in $\mathfrak{F}$ und ψ in $\mathring{\mathfrak{D}}$ liegt, so gilt

$$E[\varphi, \psi] = -H[L[\varphi], \psi]. \tag{7}$$

Speziell wird für $p = k = 1$, $a = b = q = 0$

$$\iint_G \{\varphi_x \psi_x + \varphi_y \psi_y\}\, dx\, dy = -\iint_G \psi \Delta \varphi\, dx\, dy. \tag{8}$$

Beweis: Wenn $\psi = \psi^\nu$ in $\dot{\mathfrak{D}}$ liegt, so folgt diese Formel durch Produktintegration in trivialer Weise. Indem wir nunmehr eine Folge von Funktionen ψ^ν aus $\dot{\mathfrak{D}}$ betrachten, für welche

$$H[\psi^\nu - \psi] \to 0, \qquad D[\psi^\nu - \psi] \to 0 \tag{9}$$

gilt, gewinnen wir durch Grenzübergang (Abschließen) auf Grund von Satz 4 und Satz 1 von § 1 die Greensche Formel auch für beliebige Funktionen ψ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Hauptungleichung I. *Es gibt zum Gebiet G eine Konstante γ, so daß für jede Funktion φ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$*

$$H[\varphi] \leqq \gamma D[\varphi] \tag{10}$$

gilt.

Beweis: Da wir durch Abschließen in unserer Ungleichung sofort nach Satz 4 aus § 1 von Funktionen φ^ν aus $\dot{\mathfrak{D}}$ zu Funktionen φ in $\mathring{\mathfrak{D}}$ übergehen können, so genügt es, die Formel unter der Voraussetzung: φ in $\dot{\mathfrak{D}}$ zu beweisen. Es genügt ferner, wegen (20), (21) aus § 1, anzunehmen, daß $p = k = 1$ ist. Nun sei Q ein Quadrat $|x| < \alpha$, $|y| < \alpha$, welches das Gebiet G enthält. Wir setzen die Funktion φ stetig in das Quadrat Q fort, indem wir sie außerhalb von G als identisch Null definieren. Dann ist für jeden Punkt x_1, y_1 in Q infolge der Schwarzschen Ungleichung

$$\varphi^2(x_1, y_1) \leqq \left| \int^{x_1} \varphi_x(x, y_1)\, dx \right|^2 \leqq 2\alpha \int^{\alpha} \varphi_x^2(x, y_1)\, dx.$$

Also ist nach Integration bezüglich des Punktes x_1, y_1 über das ganze Quadrat

$$H[\varphi] = H_Q[\varphi] \leqq 4\alpha^2 \iint_Q \varphi_x^2\, dx\, dy \leqq 4\alpha^2 D_Q[\varphi] = 4\alpha^2 D[\varphi].$$

Dies aber ist unsere Behauptung mit $\gamma = 4\alpha^2$.

Wir beweisen nun:

Satz 1. Eindeutigkeitssatz. *Das Randwertproblem I kann höchstens eine Lösung haben.*

Beweis: Die Differenz von zwei Lösungen wäre eine Funktion u, welche in $\mathring{\mathfrak{D}}$ liegt und für welche $L[u]=0$ ist. Aus der Greenschen Formel folgt

$$E[u]=0,$$

also wegen $E[u]\geqq \varkappa D[u]$ [vgl. (9) § 1] auch

$$D[u]=0,$$

somit aus unserer Hauptungleichung (10)

$$H[u]=0;$$

also ist wegen der Stetigkeit von u notwendigerweise u identisch Null.

Für das folgende brauchen wir noch die Ungleichung: Für alle φ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ und f aus $\mathfrak{H}$ besteht mit den früher (S. 470 bzw. 484) definierten Konstanten $\varkappa$ und γ die Abschätzung

$$E[\varphi]-2H[f,\varphi]\geqq \frac{1}{2}E[\varphi]-\frac{2\gamma}{\varkappa}H[f]. \tag{11}$$

Denn es gilt zunächst

$$2\,|H[f,\varphi]|\leqq \frac{\varkappa}{2\gamma}H[\varphi]+\frac{2\gamma}{\varkappa}H[f]$$

und, auf Grund der Hauptungleichung I und der Ungleichung (9) § 1,

$$|2H[f,\varphi]|\leqq \frac{1}{2}E[\varphi]+\frac{2\gamma}{\varkappa}H[f]$$

und damit (11). Aus dieser Abschätzung und $E[\varphi]\geqq 0$ ergibt sich unmittelbar

Satz 2. *Das Variationsproblem I ist sinnvoll, d. h. der Ausdruck $E[\varphi]-2H[f,\varphi]$ hat eine untere endliche Grenze für φ in $\mathring{\mathfrak{D}}$.*

Ferner gilt:

Satz 3. *Die Lösung der Randwertaufgabe I ist zugleich auch die Lösung des Minimumproblems I.*

Beweis: Ist u die Lösung der Randwertaufgabe, $\varphi=u+\zeta$ irgendeine andere zulässige Funktion, d. h. gehört ζ zu $\mathring{\mathfrak{D}}$, so wird wegen der Greenschen Formel (7),

$$E[u,\zeta]=H[f,\zeta],$$

und wir erhalten unmittelbar

$$\begin{aligned} E[u+\zeta]-2H[f,u+\zeta] &= E[u]-2H[f,u]+E[\zeta] \\ &\geqq E[u]-2H[f,u], \end{aligned}$$

wobei Gleichheit nur für $\zeta=0$ bestehen kann.

Unsere Aufgabe ist nunmehr umgekehrt, das Variationsproblem direkt zu lösen und damit die Existenz der Lösung der Randwertaufgabe zu gewinnen. Entscheidend hierfür ist der Begriff der *Minimalfolge*.

3. Minimalfolgen und Lösung des Randwertproblems. Ist d die untere Grenze des Variationsdruckes $E[\varphi] - 2H[f, \varphi]$ mit den gegebenen Bedingungen, so definieren wir als Minimalfolge eine Folge von Funktionen φ^ν aus $\mathring{\mathfrak{D}}$, für welche

$$d_\nu = E[\varphi^\nu] - 2H[f, \varphi^\nu] \to d$$

gilt. Die Existenz solcher Minimalfolgen ist evident. Keineswegs evident jedoch ist es, wie man aus einer solchen Minimalfolge durch Grenzübergänge die gesuchte Lösung gewinnen kann.

Wie wir schon aus Bd. I, Kap. IV, § 2, 4 wissen, ist nicht zu erwarten, daß die Minimalfolge im gewöhnlichen Sinne gegen eine Grenzfunktion konvergiert, und selbst wenn solche Konvergenz besteht, bleibt durchaus noch die Aufgabe, die Grenzfunktion als Lösung zu identifizieren.

Die Grundlage für die Überwindung dieser Schwierigkeiten ist nun folgende Fundamentaltatsache, welche hier an Stelle der üblichen Variationsbedingung für das Verschwinden der ersten Variation tritt.

Satz 4. *Bedeutet φ^ν eine Minimalfolge und ζ^ν irgendeine Folge von Funktionen aus $\mathring{\mathfrak{D}}$, für welche $E[\zeta^\nu]$ vermöge*

$$E[\zeta^\nu] \leqq M$$

gleichmäßig beschränkt bleibt, so gilt

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - H[f, \zeta^\nu] \to 0. \tag{12}$$

Beweis: Für die nicht negativen Größen $\sigma_\nu = d_\nu - d$ gilt $0 \leqq \sigma_\nu \to 0$. Ferner ist für jeden Wert des Parameters ε

$$E[\varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu] - 2H[f, \varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu] \geqq d\,,$$

also

$$\sigma_\nu + 2\varepsilon\alpha_\nu + \varepsilon^2 E[\zeta^\nu] \geqq 0,$$

wobei

$$\alpha_\nu = E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - H[f, \zeta^\nu]$$

gesetzt ist. Also gilt erst recht

$$\sigma_\nu + 2\varepsilon\alpha_\nu + \varepsilon^2 M \geqq 0.$$

Nunmehr wählen wir bei gegebenem ε den Index $\nu = \nu(\varepsilon)$ so groß, daß $\sigma_\nu < \varepsilon^2 M$ gilt und wählen das Vorzeichen von ε so, daß $\varepsilon\alpha_\nu \leqq 0$ ist. Dann wird

$$2\varepsilon^2 M \geqq 2 \quad |\alpha_\nu|,$$

also

$$\alpha_\nu| \leqq M$$

womit unser Satz bewiesen ist, da ε beliebig klein gewählt werden kann.

Wir bemerken, daß auf Grund der Ungleichung (11) für eine Minimalfolge die Größen $E[\varphi^\nu]$ beschränkt bleiben und ebenso die Größen

$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu]$, wie man aus der Dreiecksungleichung $\sqrt{E[\varphi^\nu - \varphi^\mu]} \leqq \sqrt{E[\varphi^\nu]} + \sqrt{E[\varphi^\mu]}$ erkennt. Infolgedessen kann man $\zeta^\nu = \varphi^\nu - \varphi^\mu$ in (12) einsetzen, wobei μ mit ν gegen ∞ strebt. Somit ergibt sich

$$E[\varphi^\nu, \varphi^\nu - \varphi^\mu] - H[f, \varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

und ebenso, nach Vertauschung von μ und ν,

$$E[\varphi^\mu, \varphi^\nu - \varphi^\mu] - H[f, \varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

in dem Sinn, daß beide Ausdrücke auf der linken Seite beliebig klein werden, wenn nur ν und μ hinreichend groß gewählt sind. Es folgt also nach Subtraktion $E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ und unter Berücksichtigung von (9) § 1 und der Hauptungleichung I der folgende

Satz 5. *Für jede Minimalfolge φ^ν unseres Variationsproblems gelten die Relationen*

$$(13) \qquad E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0,$$

$$(14) \qquad D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0,$$

$$(15) \qquad H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0.$$

Die Relationen (12), (13), (14), (15) erweisen sich nunmehr als ausreichend zur Konstruktion einer Grenzfunktion u und zum Nachweis aller Eigenschaften, welche sie als Lösung charakterisieren. Die Durchführung beruht auf Schlüssen allgemeinen Charakters, welche nicht von den Randbedingungen abhängen, und welche in gleicher Weise für Rand- und Eigenwertprobleme und bei allen Randbedingungen verwendbar sind. Diese Überlegungen werden in § 5 gegeben; sie führen zu den dort ausgesprochenen Sätzen 1 und 2, aus denen sich für den vorliegenden Fall sofort ergibt:

Es gibt eine Funktion u aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ und $\mathfrak{F}$, welche der Differentialgleichung

$$L[u] = -f$$

genügt, und für welche

$$(16) \qquad E[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad D[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad H[\varphi^\nu - u] \to 0$$

gilt.

Da nun aus (16) unmittelbar

$$D[(\varphi^\nu - g) - (u - g)] \to 0, \qquad H[(\varphi^\nu - g) - (u - g)] \to 0$$

folgt, ergibt sich aus Satz 6, § 1 unmittelbar, daß auch $u - g$ in $\mathring{\mathfrak{D}}$ liegt. Ferner folgt mit Rücksicht auf § 1, Satz 4 aus (16)

$$D[u] = d.$$

Also löst u auch das Variationsproblem I.

Das Variationsproblem I ebenso wie das Randwertproblem I besitzt also eine eindeutig bestimmte Lösung, wie behauptet war.

§ 3. Das Eigenwertproblem bei verschwindenden Randwerten.

1. Integralungleichungen. Zur Lösung des zum Differentialausdruck $L[u]$ gehörigen Eigenwertproblems brauchen wir weitere Integralungleichungen zwischen dem D- und dem H-Integral.

Ungleichung II (Poincarésche Ungleichung für ein Quadrat). *Es sei $G = Q$ ein Quadrat der Seitenlänge s. Es sei φ eine Funktion aus $\mathfrak{D}_Q$. Dann gilt die Ungleichung*

$$H_Q[\varphi] \leqq \frac{1}{\iint\limits_Q k\,dx\,dy}\left\{\iint\limits_Q k\varphi\,dx\,dy\right\}^2 + \frac{k_1}{p_0} s^2 D_Q[\varphi]. \tag{1}$$

Dabei ist k_1 eine obere Schranke für k, p_0 eine untere für p in Q. Aus (1) folgt sofort

$$H_Q[\varphi] \leqq \frac{1}{s^2 k_0}\left\{\iint\limits_Q k\varphi\,dx\,dy\right\}^2 + \frac{k_1}{p_0} s^2 D_Q[\varphi]. \tag{1a}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Ungleichung keinerlei Randbedingungen für φ voraussetzt[1].

Beweis: Es sei Q etwa das Quadrat

$$0 < x < s, \quad 0 < y < s.$$

Aus der Identität

$$\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi_x(x, y_2)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_2} \varphi_y(x_1, y)\,dy$$

für zwei Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 aus Q folgt mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\{\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1)\}^2 \leqq 2s\int\limits_0^s \varphi_x^2(x, y_2)\,dx + 2s\int\limits_0^s \varphi_y^2(x_1, y)\,dy.$$

Multiplizieren wir mit k und integrieren wir nach allen vier Variablen x_1, x_2, y_1, y_2 zwischen den Grenzen 0 und s, so ergibt sich links

$$2\iint\limits_Q k\,dx\,dy\,H[\varphi] - 2\left(\iint\limits_Q k\varphi\,dx\,dy\right)^2$$

und rechts ein Ausdruck nicht größer als

$$2s^4 \frac{k_1}{p_0} D[\varphi],$$

woraus die Poincarésche Ungleichung sofort folgt.

In der Poincaréschen Ungleichung ist bemerkenswert, daß der Faktor des D-Integrals proportional dem Flächeninhalt des Quadrats wird, also mit diesem Flächeninhalt gegen Null strebt.

[1] Die Poincarésche Ungleichung (Rend. Circ. Mat. Palermo 1894) drückt einfach die Tatsache aus, daß für ein Quadrat der zweite Eigenwert der Differentialgleichung $(pu_x)_x + (pu_y)_y + \lambda k u = 0$ mit der Randbedingung des Verschwindens der Normalenableitungen positiv ist. Vgl. auch § 6 und § 7.

Von diesen Bemerkungen machen wir Gebrauch, um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1. (Friedrichssche Ungleichung[1].) *Für ein beschränktes Gebiet G gibt es zu jedem positiven ε eine ganze Zahl N und „Koordinatenfunktionen“ $\omega_1, \ldots, \omega_N$ aus $\mathfrak{H}$, so daß für jede Funktion φ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ die „Ungleichung“*

$$H[\varphi] \leqq \sum_{\nu=1}^{N} H^2[\varphi, \omega_\nu] + \varepsilon D[\varphi] \tag{2}$$

gilt.

Wir brauchen gemäß unserer schon mehrfach durchgeführten Schlußweise die Ungleichung nur für die Funktionen φ aus $\dot{\mathfrak{D}}$ zu beweisen, und können dann unmittelbar durch Abschließen zu $\mathring{\mathfrak{D}}$ übergehen. Es sei wiederum Q ein Quadrat der Seitenlänge s, welches G umschließt, eingeteilt in $L = M^2$ kongruente Quadrate $Q_1, Q_2, \ldots, Q_L$, wobei Q_λ ein Quadrat der Seitenlänge $s_0 = \frac{s}{M}$ ist. Die betrachtete Funktion φ aus $\dot{\mathfrak{D}}$ sei außerhalb G als identisch Null in Q fortgesetzt. Nunmehr wenden wir die Poincarésche Ungleichung auf die sämtlichen Quadrate Q_λ an, addieren und erhalten

$$H_Q[\varphi] \leqq \frac{1}{k_0 s_0^2} \sum_{\lambda=1}^{L} \left(\iint_{Q_\lambda} k \varphi \, dx \, dy \right)^2 + s_0^2 \frac{k_1}{p_0} D_Q[\varphi].$$

Definieren wir nunmehr die Funktion ω_λ als identisch Null außerhalb G und außerhalb Q_λ und als $\frac{1}{s_0\sqrt{k_0}}$ in Q_λ, so folgt sofort wegen $D_Q[\varphi] = D[\varphi]$ unsere Behauptung.

Aus der Ungleichung (2) ergibt sich sehr einfach der folgende von F. Rellich[2] herrührende

Satz 2. (Rellichscher Auswahlsatz.) *Es sei φ^ν eine Funktionenfolge aus $\mathring{\mathfrak{D}}$, für welche $D[\varphi^\nu]$ und $H[\varphi^\nu]$ vermöge*

$$D[\varphi^\nu] \leqq A, \quad H[\varphi^\nu] \leqq A$$

gleichmäßig beschränkt sind. Dann existiert eine Teilfolge von Funktionen φ^ν, so daß für diese Folge

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

gilt[3].

[1] Diese Ungleichung wurde anscheinend zuerst von K. Friedrichs eingeführt zur handlichen Formulierung der Vollstetigkeit der Form H in bezug auf die Maßform D (vgl. Math. Ann. Bd. 109, S. 486). Zum Begriffe der Vollstetigkeit vgl. Encyclopädieartikel Hellinger u. Toeplitz: Encyclopädie der math. Wiss. Bd. II. C. 13.

[2] Vgl. Rellich: Gött. Nachr. 1930, sowie auch Bd. I, S. 359.

[3] Wir werden in § 8 zeigen, daß die hier geforderte Beschränkung von φ auf $\mathring{\mathfrak{D}}$ statt auf $\mathfrak{D}$ nicht nötig ist, falls wir für das Gebiet G gewisse einschränkende Voraussetzungen machen.

Zum Beweis beachten wir, daß wegen der Dreiecksungleichung

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqq 4A, \quad H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqq 4A$$

gilt. Wir wählen nunmehr eine ganze Zahl l und definieren Funktionen $\omega_\nu = \omega_{\nu,l}$ mit $\varepsilon = \frac{1}{l}$ gemäß dem obigen Satz 1.

Sodann bestimmen wir zu jeder Zahl l eine Teilfolge der Funktionen φ^ν, genannt $\varphi_{\nu,l}$, welche in der Folge für den Index $l.-1$ enthalten ist und folgende Eigenschaft hat: Die endlich vielen Zahlenfolgen $H[\varphi^\nu, \omega_{\lambda,l}]$ mit $\lambda = 1, \ldots, L$ konvergieren für diese Teilfolgen $\varphi^\nu = \varphi_{\nu,l}$. Es gilt also für diese Folgen

$$H[\varphi^\mu - \varphi^\nu, \omega_{\mu,l}] \to 0, \quad \lambda = 1, \ldots, L; \ \mu, \nu \to \infty .$$

Man kann somit für diese Teilfolge die Indices μ, ν so groß wählen, daß

$$\sum_{\lambda=1}^{L} \left\{ \iint_G (\varphi^\nu - \varphi^\mu)\, \omega_{\lambda,l}\, dx\, dy \right\}^2 \leqq \varepsilon^2 A$$

ist. Auf Grund unserer Ungleichung (2) wird somit wegen $D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqq 4A$,

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \leqq 5\,\varepsilon^2 A .$$

Da nun $\varepsilon = \frac{1}{l}$ beliebig klein wird, wenn l die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft, so ergibt sich in bekannter Weise durch Auswahl der Diagonalfolge $\varphi_{l,l}$ entsprechend zu Bd. I, Kap. II, § 2 die Behauptung.

2. Das erste Eigenwertproblem. Wir gehen aus von dem

Eigenwertproblem II: *Gesucht ist eine Zahl λ, zu der es eine Funktion u aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ gibt, welche zu $\mathfrak{F}$ gehört, und für welche*

$$L[u] + \lambda u = 0 \tag{3}$$

gilt.

Zu seiner Lösung betrachten wir das

Variationsproblem II. *Unter allen Funktionen φ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$, welche der Nebenbedingung*

$$H[\varphi] = 1 \tag{4}$$

genügen, ist eine solche gesucht, für welche

$$E[\varphi]$$

einen möglichst kleinen Wert λ besitzt.

Wir wollen zeigen, daß dieses Variationsproblem eine Lösung u besitzt, welche gleichzeitig das Eigenwertproblem II löst.

Zunächst beachten wir, daß das Variationsproblem sinnvoll ist, da sicherlich unter den angegebenen Bedingungen eine positive untere

Grenze λ für $E[\varphi]$ existiert, oder was auf dasselbe hinausläuft, für den Quotienten

$$\frac{E[\varphi]}{H[\varphi]}$$

ohne die Nebenbedingung (4).

Daher existiert eine Minimalfolge

$$\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^\nu, \ldots,$$

für welche

(5) $$H[\varphi^\nu] = 1,$$

und

(6) $$E[\varphi^\nu] \to \lambda$$

gilt. Bedeutet ζ^ν eine Folge von Funktionen aus $\mathring{\mathfrak{D}}$, so gilt sicherlich mit einem beliebigen Parameter ε

$$\frac{E[\varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu]}{H[\varphi^\nu + \varepsilon\zeta^\nu]} \geqq \lambda$$

und daher

$$E[\varphi^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu] + 2\varepsilon\alpha_\nu + \varepsilon^2 \{E[\zeta^\nu] - \lambda H[\zeta^\nu]\} \geqq 0$$

mit

$$\alpha_\nu = E[\varphi^\nu, \zeta^\nu)] - \lambda H[\varphi^\nu, \zeta^\nu].$$

Besteht mit einer festen Konstanten M für alle ζ^ν die Schranke

(7) $$E[\zeta^\nu] \leqq M,$$

so folgt hieraus genau nach dem Muster des Beweises von Satz 4, § 2 der folgende

Satz 3. *Für jede Folge von Funktionen* ζ^ν aus $\mathring{\mathfrak{D}}$, *die der Relation* (7) *genügen, gilt*

(8) $$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu, \zeta^\nu] \to 0.$$

Weiter ergibt sich genau nach dem Muster von § 2, daß für jede Minimalfolge φ^ν unseres Variationsproblems II die Relation

(9) $$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] - \lambda H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

besteht. Nach dem Auswahlsatz 2 und § 1 Satz 1, läßt sich andererseits eine Teilfolge φ^ν so wählen, daß für sie $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ gilt.

Wegen (9) gewinnen wir somit den

Satz 4. *Es gibt zum Variationsproblem II eine Minimalfolge* φ^ν, *so daß*

(10) $$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0,$$

(11) $$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0,$$

(12) $$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

gilt

Wir stützen uns nun wieder auf die in § 5 bewiesenen Sätze 1 und 2, indem wir dort $q-\lambda k$ statt q und $f=0$ setzen. Auf Grund von (8), (10), (11), (12) gibt es also eine Funktion u aus $\mathfrak{D}$, die zweimal stetig differenzierbar ist, der Eigenwertgleichung (3) genügt, und für welche

$$E[\varphi^\nu - u] \to 0, \quad D[\varphi^\nu - u] \to 0, \quad H[\varphi^\nu - u] \to 0 \tag{13}$$

gilt. Aus diesen Relationen geht nach Satz 6, § 1 hervor, daß u im eingeschränkten Raum $\mathring{\mathfrak{D}}$ liegt, da die φ^ν in $\mathring{\mathfrak{D}}$ liegen. *Also löst u das Eigenwertproblem II.*

Da ferner aus (13) nach Satz 4, § 1

$$E[\varphi^\nu] \to E[u], \quad H[\varphi^\nu] \to H[u]$$

folgt, so ist

$$E[u] = \lambda, \; H[u] = 1.$$

Die Funktion u löst also auch das Minimumproblem II.

Beiläufig merken wir die für alle ζ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ gültige Relation

$$E[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = 0 \tag{14}$$

an, welche aus (8) vermöge (13) folgt.

3. Höhere Eigenwerte und -Funktionen. Vollständigkeit. Um die weiteren Eigenwerte und Eigenfunktionen zu erhalten, sowie sodann die Vollständigkeit des gewonnenen Systems zu beweisen, wiederholen und ergänzen wir das schon in Bd. I, Kap. VI angewandte Verfahren. Wir bezeichnen den eben gewonnenen ersten Eigenwert mit λ_1, die zugehörige erste Eigenfunktion mit u_1 und konstruieren nun den zweiten Eigenwert λ_2 und die zweite Eigenfunktion u_2 als Lösung des folgenden Variationsproblems:

Variationsproblem II$_2$. *Unter allen Funktionen φ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$, welche der quadratischen Nebenbedingung*

$$H[\varphi] = 1 \tag{4}$$

sowie der linearen Nebenbedingung

$$H[\varphi, u_1] = 0 \tag{15}$$

genügen, ist eine solche gesucht, für welche der Ausdruck

$$E[\varphi]$$

einen möglichst kleinen Wert besitzt.

Ist λ_2 die untere Grenze von $E[\varphi]$ unter den Bedingungen (4), (15), $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^\nu, \ldots$ eine Minimalfolge, so folgt wörtlich wie in Nr. 2 für jede Funktionenfolge η^ν aus $\mathring{\mathfrak{D}}$, welche noch der Bedingung

$$H[u_1, \eta^\nu] = 0 \tag{16}$$

genügt, und für welche mit festem M

$$E[\eta^\nu] \leqq M \tag{17}$$

gilt, das Bestehen der Variationsgleichung

$$E[\varphi^\nu, \eta^\nu] - \lambda_2 H[\varphi^\nu, \eta^\nu] \to 0. \tag{18}$$

Wir erkennen nun, daß für das Bestehen dieser Gleichung die Bedingung (16) nicht nötig ist. Bedeutet nämlich ζ^ν irgendeine Folge von Funktionen aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ mit gemeinsamer Schranke für $E[\zeta^\nu]$, so bestimmen wir Zahlen τ_ν aus

$$H[u_1, \zeta^\nu] + \tau_\nu = 0$$

und erhalten so Funktionen

$$\eta^\nu = \zeta^\nu + \tau_\nu u_1,$$

für welche $E[\eta^\nu]$ gleichmäßig beschränkt ist, und welche (16) befriedigen. Somit ist

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda_2 H[\varphi^\nu, \zeta^\nu] + \tau_\nu \{E[\varphi^\nu, u_1] - \lambda_2 H[\varphi^\nu, u_1]\} \to 0.$$

Nun ist nach Voraussetzung $H[\varphi^\nu, u_1] = 0$, also gilt $E[\varphi^\nu, u_1] = 0$, wie aus der Relation (14) für $u = u_1$, $\zeta = \varphi^\nu$ folgt. Somit besteht

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda_2 H[\varphi^\nu, \zeta^\nu] \to 0 \tag{19}$$

für *jede* Funktionenfolge ζ^ν aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ mit beschränktem $E[\zeta^\nu]$. Diese Relation stimmt aber mit der Relation (8) überein, aus der wir mit Hilfe des Rellichschen Auswahlsatzes und der Sätze 1 und 2 von § 5 die Existenz von λ_1 und u_1 geschlossen haben. Somit folgt genau in derselben Weise die Existenz eines zweiten Eigenwertes λ_2 und einer zugehörigen Eigenfunktion u_2 aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ und $\mathfrak{F}$ mit

$$L[u_2] + \lambda_2 u_2 = 0 \tag{20}$$

und mit

$$E[u_2] = \lambda_2, \quad H[u_2] = 1, \quad H[u_1, u_2] = 0; \tag{21}$$

$$E[u_2, \zeta] = \lambda_2 H[u_2, \zeta] \qquad \text{für } \zeta \text{ in } \mathring{\mathfrak{D}}. \tag{22}$$

In entsprechender Weise ergibt sich:

Satz 5. *Es gibt eine unendliche Folge von Eigenwerten und Eigenfunktionen λ_n* und *u_n als Lösungen des Eigenwertproblems II. Sie sind rekursiv Lösungen der Variationsprobleme: eine Funktion $\varphi = u_n$ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ zu suchen, für die*

$$E[\varphi]$$

ein Minimum ist, unter den Nebenbedingungen

$$H[\varphi] = 1, \quad H[\varphi, u_i], \quad i = 1, 2 \ldots, n-1.$$

Es gelten die Relationen

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots$$

und die Orthogonalitätsrelationen

$$H[u_\nu, u_\mu] = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad E[u_\nu, u_\mu] = \begin{cases} \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \nu = \mu \\ \nu \neq \mu \end{matrix} \tag{23}$$

Wir beweisen ferner folgende Sätze.

Satz 6. *Mit wachsendem n strebt λ_n gegen Unendlich.*

Beweis (vgl. Bd. I, Kap. VI, § 2, 2). Anderenfalls wären die Werte $D[u_n]$ für eine unendliche Folge von Werten n beschränkt, zugleich mit $H[u_n] = 1$. Wir könnten also nach dem Satze 2 von RELLICH eine Teilfolge u_n auswählen, für welche

$$H[u_n - u_m] \to 0$$

gelten würde. Wegen (23) haben wir aber

$$H[u_n - u_m] = H[u_n] + H[u_m] - 2\,H[u_n, u_m] = 2,$$

und dieser Widerspruch widerlegt die Annahme, daß λ_n nicht über alle Grenzen wächst.

Nunmehr gilt

Satz 7. (Vollständigkeitssatz.) *Für jede Funktion φ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ bestehen mit*

$$c_n = H[u_n, \varphi],$$

$$\psi_n = \varphi - \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

die Vollständigkeitsrelationen

$$H[\psi_n] \to 0 \tag{24}$$

$$E[\psi_n] \to 0 \tag{25}$$

bzw. die äquivalenten Relationen

$$H[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \tag{26}$$

$$E[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2 . \tag{27}$$

Beweis: Für die Funktionen ψ_n gilt $H[\psi_n, u_j] = 0$ für $j \leqq n$. Somit ist wegen der Minimumeigenschaft von u_{n+1}

$$E[\psi_n] \geqq \lambda_{n+1} H[\psi_n]. \tag{28}$$

Mit Rücksicht auf (23) gilt

$$H[\psi_n] = H[\varphi] - \sum^{n} c_j^2 \tag{29}$$

$$E[\psi_n] = E[\varphi] - \sum_{j=1} \lambda_j c_j^2 , \tag{30}$$

woraus die Konvergenz der unendlichen Reihen in (26), (27) und

$$E[\psi_n] \leqq E[\varphi]$$

folgt. Hieraus und aus (28) folgt

$$H[\psi_n] \leqq \frac{1}{\lambda_n + 1} E[\varphi],$$

also $H[\psi_n] \to 0$ wegen Satz 6. Damit folgt wegen (29) sofort auch (26).

Wegen

$$H[\psi_n - \psi_m] = \sum_{j=n}^{m} c_j^2, \qquad E[\psi_n - \psi_m] = \sum_{j=n}^{m} \lambda_j c_j^2$$

und der Konvergenz der Reihen in (26), (27) folgt

$$H[\psi_n - \psi_m] \to 0, \qquad E[\psi_n - \psi_m] \to 0. \tag{31}$$

Aus $H[\psi_n] \to 0$ folgt (Satz 5, § 1)

$$H[\psi_n, \zeta] \to 0 \tag{32}$$

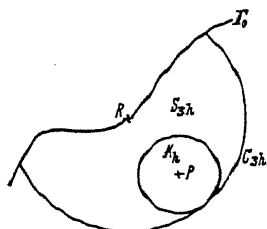
mit jedem ζ aus $\mathfrak{H}$. Indem wir uns auf den im § 5 bewiesenen Satz 2 stützen, schließen wir aus (31) und (32) die Relation (25) und damit wegen (30) auch (27), womit der Vollständigkeitssatz bewiesen ist.

§ 4. Annahme der Randwerte bei zwei unabhängigen Veränderlichen.

Im Falle von zwei unabhängigen Veränderlichen[1] x und y können wir sehr viel schärfere Aussagen über die Annahme der Randwerte machen, als in unserer Formulierung: $u - g$ bzw. u soll in $\mathring{\mathfrak{D}}$ liegen. Wir können nämlich im Falle von zwei Dimensionen aus dieser Bedingung den Schluß ziehen, daß $u - g$ bzw. u wirklich die Randwerte Null annehmen, wenn der Punkt x, y in G gegen einen Randpunkt auf Γ strebt.

Abb. 53.

Wir müssen dabei über die betrachteten Randpunkte noch einschränkende Voraussetzungen machen; z. B. dürfen wir für isolierte Randpunkte die Annahme vorgeschriebener Randwerte nicht erwarten, da es sich hier um „hebbare" Singularitäten handelt. Wir nehmen $p = k = 1$ an, beschränken uns also auf den Differentialausdruck $\Delta\varphi - q^*\varphi$. Nunmehr formulieren wir den folgenden Satz, der sich allgemein auf Funktionen φ bezieht, welche in $\mathring{\mathfrak{D}}$ und $\mathfrak{F}$ liegen, für welche also $\Delta\varphi$ zu $\mathfrak{H}$ gehört.

Satz. *Es sei Γ_0 eine abgeschlossene Menge von Randpunkten, derart, daß jeder Kreis um einen Punkt von Γ_0 mit hinreichend kleinem Radius diese*

[1] Hinsichtlich der ganz anders liegenden Verhältnisse bei mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen sei nochmals auf die Bemerkungen in Kap. IV, S. 273 und auf die auf S. 285 zitierten Resultate von N. WIENER verwiesen.

Punktmenge Γ_0 in mindestens einem Punkte trifft — es sei also etwa Γ_0 ein stetiger Kurvenbogen. Es sei φ eine Funktion aus $\mathfrak{F}$, g eine in $G+\Gamma$ stetige Funktion aus $\mathfrak{D}$, und es liege $\varphi - g$ in $\mathring{\mathfrak{D}}$. Dann strebt $\varphi - g$ gegen Null, wenn der Punkt x, y in G gegen einen inneren Punkt der Punktmenge Γ_0 strebt. Innerer Punkt von Γ_0 heißt dabei ein solcher Punkt auf Γ_0, der von der komplementären Randpunktmenge $\Gamma - \Gamma_0$ einen positiven Abstand hat.

Insbesondere hat also bei der Randwertaufgabe von

$$\Delta u - q^* u = -f$$

und beim Eigenwertproblem für

$$\Delta u - q^* u + \lambda u = 0$$

die Lösung u längs Γ_0 tatsächlich die Randwerte g bzw. Null.

Es sei P ein Punkt in G, der den Abstand $2h$ vom Rande Γ hat; es sei R ein Punkt auf Γ mit dem Abstand $\overline{PR} = 2h$. Wir nehmen an, P liege einem inneren Punkte von Γ_0 so nahe, daß R zu Γ_0 gehört. Wir betrachten die Kreisscheibe K_h vom Radius h um P. Dieser Kreis liegt ganz in G. Endlich definieren wir einen Bereich S_{3h} als den Durchschnitt des Gebietes G und des Kreises um den Randpunkt R mit dem Radius $3h$. Der Abstand h sei so klein, daß alle Kreise mit dem Radius $r \leqq 3h$ um den Randpunkt R die Randpunktmenge Γ_0 treffen.

Nach dieser Konstruktion führen wir den Beweis in mehreren Schritten.

Hilfssatz 1. Wenn ψ zu $\mathring{\mathfrak{D}}$ gehört, so gilt

$$\left|\frac{1}{h^2\pi}\iint\limits_{K_h}\psi\,dx\,dy\right|^2 \leqq C\,D_{S_{3h}}[\psi]$$

mit numerisch konstantem $C = 36\pi^2$.

Da die rechte Seite wegen der vorausgesetzten Existenz von $D[\psi]$ mit h gegen Null strebt, so folgt hieraus, daß der Mittelwert der Funktion ψ über K_h ebenfalls mit h gegen Null strebt.

Es genügt wiederum, den Hilfssatz unter der Voraussetzung zu beweisen, daß ψ zu $\dot{\mathfrak{D}}$ gehört, weil man durch Abschließen von solchen Funktionen sofort zu beliebigen Funktionen aus $\mathring{\mathfrak{D}}$ übergehen kann. C_r sei der in S_{3h} liegende Bogen eines Kreises mit dem Radius $r \leqq 3h$ um R, der nach Annahme Γ_0 trifft. Es seien r und ϑ Polarkoordinaten um R. Ist nun A irgendein Punkt auf C_r und $\overline{AA_0}$ ein Kreisbogen auf C_r, wobei A_0 auf Γ_0 liegt, so gilt für eine Funktion ψ aus $\dot{\mathfrak{D}}$ wegen $\psi(A_0) = 0$

$$\psi(A) = \psi(A) - \psi(A_0) = \int_{A_0}^{A} \psi_\vartheta\, d\vartheta,$$

wobei das Integral rechts über den Kreisbogen $\overline{AA_0}$ erstreckt wird.

Die Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\psi^2(A) \leqq 2\pi \int_{C_r} \psi_\vartheta^2 \, d\vartheta.$$

Integrieren wir nunmehr bezüglich A über den Bogen C_r nach ϑ, so erhalten wir

$$\int_{C_r} \psi^2 \, d\vartheta \leqq 4\pi^2 \int_{C_r} \psi_\vartheta^2 \, d\vartheta$$

und nach Integration bezüglich r zwischen 0 und $3h$

$$\iint_{S_{3h}} \psi^2 \, dx \, dy \leqq 4\pi^2 \iint_{S_{3h}} \psi_\vartheta^2 \, r \, dr \, d\vartheta \leqq 36\pi^2 h^2 D_{S_{3h}}[\psi].$$

Nun ist auf Grund der Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\frac{1}{h^2\pi} \iint_{K_h} \psi \, dx \, dy\right|^2 \leqq \frac{1}{h^2\pi} H_{K_h}[\psi] \leqq \frac{1}{h^2\pi} H_{S_{3h}}[\psi]$$

und somit folgt unser Hilfssatz 1 mit der Konstanten $C = 36\pi^2$.

Hilfssatz 2. Wenn φ zu $\mathfrak{F}$ gehört, also $\Delta\varphi$ in $\mathfrak{H}$ liegt, so gilt

$$\left|\varphi(P) - \frac{1}{h^2\pi} \iint_{K_h} \varphi \, dx \, dy\right|^2 \leqq C_1 h^2 H_{K_h}[\Delta\varphi].$$

Wir werden diese Ungleichung als Formel (15) in § 5 in Fußnote S. 500 ableiten.

Hilfssatz 3. Es gilt für jede in $G + \Gamma$ stetige Funktion g

$$\gamma_h = \left| g(P) - \frac{1}{h^2\pi} \iint_{K_h} g \, dx \, dy \right| \to 0 \text{ für } h \to 0.$$

Diese letzte Tatsache ist eine unmittelbare Folge der Stetigkeit von g.

Nunmehr wenden wir Hilfssatz 1 auf $\psi = \varphi - g$ an. Dann ergibt sich in Verbindung mit Hilfssatz 2 und 3

$$\begin{aligned} |\varphi(P) - g(P)| \leqq \left|\varphi(P) - \frac{1}{h^2\pi} \iint_{K_h} \varphi \, dx \, dy\right| + \left| g(P) - \frac{1}{h^2\pi} \iint_{K_h} g \, dx \, dy \right| + \\ + \left| \frac{1}{h^2\pi} \iint \psi \, dx \, dy \right| \\ \leqq C_1 h^2 H_{K_h}[\Delta\varphi] + \gamma_h + \sqrt{C D_{S_{3h}}[\psi]}. \end{aligned}$$

Da alle drei Terme der rechten Seite mit h gegen Null streben, ist der Satz dieses § 4 bewiesen.

§ 5. Konstruktion der Grenzfunktionen und Konvergenzeigenschaften der Integrale E, D, H.

1. Konstruktion der Grenzfunktionen. Die Lösungen u der in den § 2 und § 3 behandelten Probleme sowie der später § 6, § 7 zu behandelnden Probleme bei anderen Randbedingungen lassen sich auf Grund zweier allgemeiner Sätze konstruieren.

Wir beweisen[1] in diesem Abschnitt den folgenden

Satz 1. *Es sei f in $G+\Gamma$ stetig und in G stückweise stetig differenzierbar, und es sei φ^ν eine Folge von Funktionen aus dem Raume $\mathfrak{D}$, welche den Bedingungen*

$$H[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{1}$$

$$D[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0, \tag{2}$$

$$E[\varphi^\nu-\varphi^\mu]\to 0 \tag{3}$$

genügt und für welche die Relation

$$E[\varphi^\nu,\zeta^\nu]-H[f,\zeta^\nu]\to 0 \tag{4}$$

besteht mit jeder Folge von Funktionen ζ^ν aus $\mathring{\mathfrak{D}}$, für die $E[\zeta^\nu]$ vermöge

$$E[\zeta^\nu]\leqq M \tag{5}$$

gleichmäßig beschränkt ist. Dann gibt es eine in G zweimal stetig differenzierbare Funktion u, welche der Differentialgleichung

$$L[u]=-f \tag{6}$$

genügt, und welche mit jeder Funktion ζ aus $\mathfrak{H}$ und für jedes abgeschlossene Teilgebiet G' von G die Limesrelation

$$H_{G'}[\varphi^\nu-u,\zeta]\to 0 \tag{7}$$

erfüllt.

Wir stellen zunächst fest, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p=1$ annehmen dürfen. Denn führen wir (vgl. S. 477) statt φ die neue Argumentfunktion

$$\psi=w\varphi \tag{8}$$

mit

$$w=\sqrt{p} \tag{9}$$

ein, so geht $E[\varphi]$ über in

$$\iint_G\{\psi_x^2+\psi_y^2+2\bar a\psi\psi_x+2\bar b\psi\psi_y+\bar q\psi^2\}\,dx\,dy$$

und $H[\varphi]$ in

$$\iint_G\bar k\psi^2\,dx\,dy,$$

wobei

$$\begin{aligned}\bar a&=w^{-2}a-w^{-1}w_x,\\ \bar b&=w^{-2}b-w^{-1}w_y,\\ \bar q&=w^{-2}q-2aw^{-3}w_x-2bw^{-3}w_y+w^{-}\qquad+w^{-2}\\ \bar k&=w^{-2}k\end{aligned}$$

ist. Diese neuen Integrale sind aber wieder E- bzw. H-Integrale der ursprünglichen Form, und ihre Koeffizienten genügen den gestellten

[1] Es sei darauf hingewiesen, daß die oben erwähnte automatische Vereinfachung für die Differentialgleichung $\Delta u=0$ gerade beim Beweise des Satzes 1 auftritt.

Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen. Lediglich die beiden Ungleichungen (3) und (4) aus § 1 brauchen nicht mehr erfüllt zu sein; sie werden in den Schlüssen dieser Nummer aber auch nicht verwandt.

Ferner bemerken wir, daß die Gleichung

$$H_k[\varphi] = H_{\bar{k}}[\psi]$$

und vermöge einfacher Abschätzungen Ungleichungen der Form

$$D_p[\varphi] \leqq 2 D_1[\psi] + c H_{\bar{k}}[\psi],$$
$$D_1[\psi] \leqq 2 D_p[\varphi] + \bar{c} H_k[\varphi]$$

mit konstanten c, $\bar{c}$ gelten. Daraus folgt, daß die Räume $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$, $\mathring{\mathfrak{D}}$ für die Funktionen φ in die entsprechenden Räume für die Funktionen ψ übergehen und umgekehrt. Schließlich ist auf Grund unserer Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ersichtlich, daß auch die Räume $\mathfrak{F}$ bei der Transformation einander entsprechen.

Damit ist gerechtfertigt, daß die Annahme $p = 1$, welche wir in dieser Nummer machen wollen, keine Einschränkung bedeutet. Wir werden im folgenden in dieser Nr. 1 unter D, H stets D_1, H_1 verstehen.

Zur weiteren Vereinfachung formen wir die Relation (4) um in

$$D[\varphi^\nu, \zeta^\nu] + H[q^* \varphi^\nu - k f, \zeta^\nu] \to 0, \tag{10}$$

mit

$$q^* = q - a_x - b_y.$$

Man erhält diese Formel durch Produktintegration des Ausdruckes $\iint\limits_G \{a(\varphi\zeta_x + \varphi_x\zeta) + b(\varphi\zeta_y + \varphi_y\zeta)\}\,dx\,dy$ zunächst unter der Annahme, daß ζ in $\mathring{\mathfrak{D}}$ liegt, wonach wir dann durch Abschließen zu beliebigem ζ in $\mathring{\mathfrak{D}}$ übergehen können.

Wir bezeichnen mit K_R den Kreis um den Punkt x_0, y_0 mit dem Radius R, mit G_R ein Teilgebiet von G für dessen Punkte x, y der Kreis K_R in G liegt, setzen $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ und führen die Funktion

$$\Psi_R(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{R} + \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (r \leqq R)$$
$$= 0 \qquad (r \geqq R) \tag{11}$$

ein[1]. Sie gehört zu $\mathfrak{H}$, und es gibt Konstanten τ, τ_1, so daß für alle R

[1] Die obige Gestalt der Funktion Ψ_R beruht wesentlich auf der Anzahl zwei der unabhängigen Veränderlichen. Ist die Anzahl m der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_m$ größer als zwei und bedeutet ω_m die Oberfläche der m-dimensionalen Einheitskugel, so haben statt der obigen Funktion Ψ_R zu setzen (vgl. S. 251)

$$\Psi_R(x, y) = -\frac{1}{(m-2)\,\omega_m}\left[\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{m}{2}\,\frac{1}{R^{m-2}} + \frac{m-2}{2}\,\frac{r^2}{R^m}\right].$$

Für $m = 3$ bleibt dann unsere Theorie unverändert, nur lautet in $(12)_1$ die rechte Seite $\tau_1 R$. Für $m > 3$, wo die Abschätzung $(12)_1$ nicht mehr besteht, gilt dasselbe, sobald $q^* = 0$ ist, d. h. jedenfalls für das Randwertproblem von $\Delta u = -f$.

(12) $$\iint\limits_{K_R} \Psi_R\, dx\, dy \leqq \tau R^2,$$

(12)$_1$ $$H[\Psi_R] \leqq \tau_1 R^2$$

gilt.

Für eine Funktion φ mit zweimal stückweise stetigen zweiten Ableitungen gilt (vgl. Kap. IV, § 3, S. 250) die Integraldarstellung[1]

(13) $$\varphi(x_0, y_0) = \frac{1}{R^2\pi}\iint\limits_{K_R} \varphi\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R \Delta\varphi\, dx\, dy.$$

Es liegt daher hier der Versuch nahe, die gesuchte Lösung der Differentialgleichung

(14) $$\Delta u - q^* u = -kf$$

als Grenzwert des Ausdruckes

$$\frac{1}{R^2\pi}\iint\limits_{K_R} \varphi^\nu\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R (q^* \varphi^\nu - kf)\, dx\, dy$$

zu gewinnen. In der Tat konvergiert zunächst der Ausdruck

(16) $$U^\nu(x_0, y_0; R) = \iint\limits_{K_R} \varphi^\nu\, dx\, dy + R^2\pi \iint\limits_{K_R} \Psi_R (q^* \varphi^\nu - kf)\, dx\, dy$$

gleichmäßig für alle R und x_0, y_0 aus G_R gegen eine stetige Grenzfunktion

(17) $$U(x_0, y_0; R) = \lim_{\nu\to\infty} U^\nu(x_0, y_0; R).$$

Denn es gilt zufolge der Schwarzschen Ungleichung und Formel (16) und (12)$_1$

$$|U^\mu - U^\nu|^2 \leqq 2R^2\pi H_R[\varphi^\nu - \varphi^\mu] + 2\tau_1 R^6 \pi^2 H_R[q^*(\varphi^\nu - \varphi^\mu)]$$
$$\leqq \text{konst.}\, H_R[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0,$$

wobei der Index R den Kreis K_R als Integrationsgebiet kennzeichnet.

Nun gehört die Funktion

$$\Psi_{R_2}(x, y) - \Psi_{R_1}(x, y) = \zeta, \text{ für } R_2 > R_1$$

zu $\mathfrak{D}$, da sich die Singularität weghebt; ζ ist sogar zweimal stückweise stetig differenzierbar in G. Somit können wir in unsere Relation (10) diese Funktion ζ einsetzen und erhalten dann unmittelbar die Limesgleichung

$$D[\varphi^\nu, \Psi_{R_2} - \Psi_{R_1}] - H[q^*\varphi^\nu - kf, \Psi_{R_2} - \Psi_{R_1}] \to 0,$$

[1] Aus ihr und (12)$_1$ folgt auch die in § 4, S. 497 benutzte Abschätzung

(15) $$\left|\varphi(x_0, y_0) - \frac{1}{R^2\pi}\iint\limits_{K_R} \varphi\, dx\, dy\right|^2 \leqq \tau_1 R^2 H_{K_R}[\Delta\varphi]$$

woraus man unter Benutzung der Greenschen Formel (7) § 1

$$\frac{1}{R_2^2 \pi} \iint\limits_{K_{R_2}} \varphi^\nu \, dx\, dy - \frac{1}{R_1^2 \pi} \iint\limits_{K_{R_1}} \varphi^\nu dx\, dy +$$

$$+ \iint\limits_{K_{R_2}} (q^* \varphi^\nu - k f)(\Psi_{R_2} - \Psi_{R_1})\, dx\, dy \to 0$$

errechnet. Dies aber bedeutet

$$\frac{1}{R_2^2 \pi} U(x_0, y_0; R_2) - \frac{1}{R_1^2 \pi} U(x_0, y_0; R_1) = 0.$$

Die Funktion $\frac{1}{R^2 \pi} U(x_0, y_0; R)$ ist also von R unabhängig. Wir setzen

$$u(x, y) = \frac{1}{R^2 \pi} U(x, y; R). \tag{18}$$

Diese Funktion u ist somit in allen Gebieten G_R, also im ganzen Gebiete G als stetige Funktion von x und y definiert. Sie wird sich als die gesuchte Funktion herausstellen.

Nunmehr beweisen wir zunächst:

Satz 1a. *Für jede Funktion ζ aus $\mathfrak{H}$ und jedes abgeschlossene Teilgebiet G' von G gilt bei $\nu \to \infty$ die Limesrelation*[1]

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0. \tag{7}$$

Das Gebiet G sei enthalten in einem Quadrat von dem Flächeninhalt A. Es sei ferner mit einer von ν unabhängigen Konstanten M

$$H_{G'}[\varphi^\nu] \leqq \frac{M}{4}, \quad H_{G'}[u] \leqq \frac{M}{4}$$

also wegen der Dreiecksungleichung

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u] \leqq M;$$

— eine solche Schranke muß es für G' geben, da in G' die Funktion u gleichmäßig stetig ist, also $H_{G'}[u]$ existiert, und da die Größen $H[\varphi^\nu]$ beschränkt sind.

Es genügt nun, Satz 1a unter der Annahme $\zeta =$ konst., etwa $\zeta = 1$ zu beweisen. Um dies einzusehen, zerlegen wir bei gegebener Funktion ζ das Gebiet G' in sich nicht überdeckende Teilgebiete G'_ν

$$G' = \sum_\nu G'_\nu.$$

Dabei soll ζ in jedem der Teilgebiete G'_ν stetig sein, und die Durchmesser der G'_ν sollen so klein gewählt werden, daß man eine in jedem der G'_ν konstante Funktion ζ^* angeben kann, für welche mit vorgeschriebenem ε

$$H_{G'}[\zeta - \zeta^*] < \varepsilon \tag{19}$$

[1] Sie drückt aus, daß die Funktionen φ^ν gegen die Funktion u im Sinne der H-Metrik für ein Teilgebiet G' „schwach" konvergieren.

gilt. Dann aber wird zufolge der Schwarzschen Ungleichung (7)

$$|H[\varphi^\nu - u, \zeta] - H[\varphi^\nu - u, \zeta^*]|^2 \leqq \varepsilon M.$$

Gilt nun Satz 1a für konstante Funktionen ζ, so gilt er ohne weiteres auch mit stückweise konstantem ζ^*, also strebt im Limes der Ausdruck $H[\varphi^\nu - u, \zeta^*]$ gegen Null; da ε beliebig klein gewählt werden konnte, ist Satz 1a damit auch für die beliebige Funktion ζ aus $\mathfrak{H}$ bewiesen. Zum Beweise unserer Behauptung für $\zeta = 1$

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u, 1] = \iint\limits_{G'} (\varphi^\nu - u)\, dx\, dy \to 0 \tag{20}$$

bemerken wir: Man kann G' zerlegen in eine endliche Anzahl von Kreisscheiben K_ν, $(\nu = 1, \ldots, N)$ mit den Mittelpunkten P_ν und Radien r_ν, und in einen Restbereich B, dessen Flächeninhalt kleiner als ein beliebig klein vorgeschriebenes ε^2 ist. Dabei dürfen wir die Radien r_ν der Kreise kleiner als eine beliebig klein vorgeschriebene Zahl, etwa auch $r_\nu \leqq \varepsilon$ wählen[1].

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der Funktion u in G' gilt daher, wenn $u(P_\nu)$ den Wert von u im Kreismittelpunkt P_ν bedeutet,

$$\left|\iint\limits_{G'} u\, dx\, dy - \pi \sum_{j=1}^{N} r_j^2\, u(P_j)\right| < \delta, \tag{21}$$

wobei $\delta = \delta(\varepsilon)$ beliebig klein wird, wenn ε hinreichend klein gewählt ist[2].

Ebenso gilt, wenn das Restgebiet B durch Wahl von ε hinreichend klein gemacht wird,

$$\iint\limits_{G'} \varphi^\nu\, dx\, dy - \sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\, dx\, dy < \delta_1; \tag{22}$$

denn das Quadrat der linken Seite ist, da der Flächeninhalt von B nicht größer als ε^2 ist, nach der Schwarzschen Ungleichung nicht größer als

$$H_B[\varphi^\nu]\,\varepsilon^2 < \frac{M}{4}\varepsilon^2 = \delta_1^2.$$

Um die Differenz

$$\iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\, dx\, dy - r_j^2\, \pi\, u(P_j)$$

[1] Beweis: Wir schöpfen zunächst G' mit einer endlichen Anzahl voneinander nicht überdeckenden Quadraten mit Seitenlängen kleiner als 2ε aus, so daß der Restbereich einen Inhalt kleiner als $\frac{\varepsilon^2}{2}$ besitzt. In jedem der Quadrate betrachten wir den eingeschriebenen Kreis. Die verbleibenden Restbereiche bedecken wir wiederum mit Quadraten, so daß der Flächeninhalt des übrig bleibenden Bereiches kleiner als $\frac{\varepsilon^2}{4}$ wird, nehmen nun die eingeschriebenen Kreise dieser neuen Quadrate hinzu usw. in geometrischer Progression. Es ist dann offenbar eine Kreispflasterung der angegebenen Art gewonnen.

[2] Die Aussage folgt unmittelbar aus der elementaren Integraldefinition, welche allerdings in einer etwas ungewohnten Form ausgenutzt wird.

abzuschätzen, beachten wir, daß nach Definition (16) und (17) von $U^\nu(P_j; r_j)$ und $U(P_j; r_j)$

$$\iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\, dx\, dy - r_j^2 \pi u(P_j) = -r_j^2 \pi \iint\limits_{K_j} \Psi_{r_j} (q^* \varphi^\nu - k f)\, dx\, dy + \\ + (U^\nu(P_j; r_j) - U(P_j; r_j))$$

gilt. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von U^ν gibt es eine nur von ν abhängige gegen Null strebende Größe $\sigma(\nu)$, so daß

$$|U^\nu(P_j; r_j) - U(P_j; r_j)| \leqq \sigma(\nu)$$

ist. Andererseits besteht nach (12) und $(12)_1$, sowie wegen $r_j < \varepsilon$ die Abschätzung

$$\left| r_j^2 \pi \iint\limits_{K_j} \Psi_{r_j} (q^* \varphi^\nu - k f)\, dx\, dy \right| \leqq r_j^2 \pi \left(\varepsilon \sqrt{\tau_1}\, \frac{\sqrt{M}}{2}\, \alpha_1 + \varepsilon^2 \tau \alpha \right),$$

wo die Konstanten α und α_1 obere Schranken von $|k f|$ und $|q^*|$ sind. Somit erhält man schließlich mit der Abkürzung

$$\varepsilon \sqrt{\tau_1}\, \frac{\sqrt{M}}{2}\, \alpha_1 + \varepsilon^2 \tau \alpha = \eta$$

$$\left| \iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\, dx\, dy - r_j^2 \pi u(P_j) \right| \leqq r_j^2 \pi \eta + \sigma(\nu)$$

und nach Summation über alle Kreise K_j

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{K_j} \varphi^\nu\, dx\, dy - \sum_{j=1}^{N} r_j^2 \pi u(P_j) \right| \leqq A \eta + N \sigma(\nu), \tag{23}$$

wo A der Inhalt von G' ist. Dann liefert (23) zusammen mit (21) und (22) sofort

$$\left| \iint\limits_{G'} \varphi^\nu\, dx\, dy - \iint\limits_{G'} u\, dx\, dy \right| \leqq \delta + \delta_1 + A \eta + N \sigma(\nu).$$

Indem wir ν hinreichend groß wählen, können wir $\sigma(\nu)$ und also auch $N \sigma(\nu)$ beliebig klein machen. Da ε und somit δ, δ_1 und η beliebig klein gewählt werden durfte, ist hiermit Satz 1a bewiesen.

Aus Satz 1a folgt, indem wir

$$\zeta = \frac{1}{R^2 \pi} + q^* \Psi_R \text{ in } K_R$$
$$= 0 \qquad \text{außerhalb } K_R$$

in (7) einsetzen,

$$\frac{1}{R^2 \pi} \iint\limits_{K_R} \varphi^\nu\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R q^* \varphi^\nu\, dx\, dy \to \frac{1}{R^2 \pi} \iint\limits_{K_R} u\, dx\, dy + \iint\limits_{K_R} \Psi_R q^* u\, dx\, dy.$$

Wir erhalten somit aus (16), (17), (18) den

Satz 1b. *Die Grenzfunktion $u(x, y)$ besitzt in G_R die Darstellung*

$$(14) \qquad u(x_0, y_0) = \frac{1}{R^2 \pi} \iint_{K_R} u\, dx\, dy + \iint_{K_R} \Psi_R (q^* u - k f)\, dx\, dy .$$

Auf Grund der Betrachtungen aus Kap. IV, § 3, S. 251 f. folgt wegen der Differenzierbarkeitseigenschaften von q^*, k, f hieraus:

Satz 1c. *Die Funktion u besitzt in G stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung.*

Ebenso entnimmt man aus den in Kap. IV, § 3 dargestellten Mittelwerteigenschaften

Satz 1d. *Die Funktion u genügt der Differentialgleichung*

$$(14) \qquad \Delta u - q^* u = -k f$$

bzw.

$$(6) \qquad L[u] = -f,$$

wenn wir die Transformation (8), (9) *wieder rückgängig machen.*

Diesen letzten Teil von Satz 1 können wir jedoch auch ohne Berufung auf Kap. IV folgendermaßen beweisen, wenn wir uns auf die schon in Satz 1c ausgesprochene Stetigkeit der zweiten Ableitungen von u stützen. Wenn wir in der Relation (7) für ζ eine Funktion aus $\dot{\mathfrak{D}}$ einsetzen, welche stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, so können wir sie mit Hilfe der Greenschen Umformung in die Gestalt

$$H[\varphi^\nu, L[\zeta]] - H[f, \zeta] \to 0$$

setzen. Wenden wir nunmehr Satz 1a an, wobei wir $L[\zeta]$ statt ζ schreiben, so erhalten wir unmittelbar

$$H[u, L[\zeta]] - H[f, \zeta] = 0 .$$

Nunmehr aber dürfen wir die Greensche Umformung wiederum in der entgegengesetzten Richtung vornehmen, da u stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt. Wir erhalten damit

$$H[L[u] + f, \zeta] = 0$$

und gewinnen nunmehr die Relation $L[u] = -f$ wegen der Willkürlichkeit von ζ als unmittelbare Folge des Fundamental-Lemmas der Variationsrechnung (vgl. Bd. I, Kap. IV, S. 159).

2. Konvergenzeigenschaften der Integrale D und H. Für unsere Variationsintegrale D und H beweisen wir einen Satz von allgemeinem Charakter, welcher verschiedene Konvergenzeigenschaften im Sinne der H-Metrik bzw. D-Metrik verknüpft und welcher zusammen mit Satz 1 in den §§ 2 und 3 angewandt wurde.

Satz 2. *Es sei φ^ν eine Folge aus $\mathfrak{D}$ mit*

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \tag{24}$$

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{25}$$

Es sei ferner u eine in G stetig differenzierbare Funktion, für welche mit jedem abgeschlossenen Teilgebiet G' und jedem ζ aus $\mathfrak{H}$ die Relation

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0 \tag{26}$$

gilt. Dann liegt u in $\mathfrak{D}$ und es gilt[1]

$$H[\varphi^\nu - u] \to 0, \tag{27}$$

$$D[\varphi^\nu - u] \to 0. \tag{28}$$

Wir beweisen den Satz in drei Schritten. Zunächst

Satz A. Es sei ψ^ν eine Folge aus $\mathfrak{H}$ und es gelte für jedes stetige ζ aus $\mathfrak{H}$

$$H[\psi^\nu, \zeta] \to 0 \tag{29}$$

sowie

$$H[\psi^\nu - \psi^\mu] \to 0. \tag{30}$$

Dann gilt

$$H[\psi^\nu] \to 0. \tag{31}$$

Beweis. Nach § 1, Satz 4 sind die Ausdrücke $H[\psi^\nu]$ beschränkt. Es folgt ferner aus

$$H[\psi^\nu] = H[\psi^\nu - \psi^\mu] + 2H[\psi^\nu, \psi^\mu] - H[\psi^\mu]$$

die Ungleichung

$$H[\psi^\nu] \leqq H[\psi^\nu - \psi^\mu] + 2H[\psi^\nu, \psi^\mu].$$

Nun wählen wir zu gegebenem ε zunächst μ nach (30) so groß, daß für $\nu > \mu$

$$H[\psi^\nu - \psi^\mu] < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird, sodann bei festem μ den Index ν so groß, daß für $\zeta = \psi^\mu$ mit Rücksicht auf (29) gilt

$$|H[\psi^\nu, \psi^\mu]| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann aber wird

$$H[\psi^\nu] < \varepsilon,$$

womit wegen der Willkür von ε die Behauptung (31) bewiesen ist. Entsprechend beweisen wir

---

[1] Mit anderen Worten: *Aus der starken Konvergenz der Folge φ^ν in sich im Sinne der D- und der H-Metrik und aus der schwachen Konvergenz der Funktionen φ^ν gegen die Grenzfunktion u im Sinne der H-Metrik für jedes abgeschlossene Teilgebiet von G folgt die starke Konvergenz der φ^ν gegen u sowohl in der H-Metrik als auch in der D-Metrik.*

Satz B. Es sei ψ^ν eine Folge aus $\mathfrak{D}$, für welche mit jedem ζ aus $\mathfrak{H}$

$$H[\psi^\nu, \zeta] \to 0 \tag{32}$$

gilt, und welche außerdem im Sinne der D-Metrik in sich konvergent ist:

$$D[\psi^\nu - \psi^\mu] \to 0. \tag{33}$$

Dann gu

$$D[\psi^\nu] \to 0. \tag{34}$$

Wir beweisen den Satz, indem wir getrennt zeigen, daß

$$H[\psi_x^\nu] \to 0, \qquad H[\psi_y^\mu] \to 0 \tag{35}$$

gilt.

Diese Relationen folgen aus Satz A unmittelbar, wenn wir

$$H[\psi_x^\nu, \zeta] \to 0, \qquad H[\psi_y^\nu, \zeta] \to 0 \tag{36}$$

für jedes ζ aus $\mathfrak{H}$ beweisen können. Wir bemerken nun:

Hilfssatz. Die Relationen (36) folgen für alle ζ in $\mathfrak{H}$, wenn sie bestehen für alle mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehenen Funktionen $\zeta = \omega$ aus $\mathfrak{H}$, welche höchstens in einem Quadrate Q im Inneren von G von Null verschieden sind.

Beweis. Wenn die Relationen (36) für alle Funktionen ω bestehen, gelten sie auch für jede Summe ζ' von endlich vielen solchen Funktionen. Nun werden wir zeigen, daß wir für jedes ζ aus $\mathfrak{H}$ ein ζ' der beschriebenen Form finden können, so daß

$$H[\zeta' - \zeta] \leqq \varepsilon^2 \tag{37}$$

ist mit beliebig klein vorgeschriebenem ε. Dann aber ist

$$\begin{aligned} |H[\psi_x^\nu, \zeta]| &\leqq |H[\psi_x^\nu, \zeta']| + |H[\psi_x^\nu, \zeta' - \zeta] \\ & H[\psi_x^\nu, \zeta']| + \sqrt{H[\psi_x^\nu] H[\zeta' - \zeta]}, \end{aligned}$$

und da beide Terme rechts nach Voraussetzung beliebig klein gemacht werden können, indem wir ε hinreichend klein und ν hinreichend groß wählen, strebt somit die linke Seite für $\nu \to \infty$ gegen Null. Entsprechendes gilt für $H[\psi_y^\nu, \zeta]$.

Nunmehr beweisen wir die in (37) behauptete Approximierbarkeit von ζ durch eine Summe ζ' von Funktionen ω in zwei Schritten. Zunächst approximieren wir ζ durch eine Funktion ζ^*, welche nur in einer endlichen Anzahl von Quadraten Q_ν in G von Null verschieden und in jedem dieser Quadrate konstant ist: Sei ε wieder eine beliebig kleine Schranke, dann schöpfen wir das aus G durch Weglassung der Unstetigkeitspunkte und Unstetigkeitslinien von ζ entstehende Gebiet durch eine endliche Anzahl von Quadraten so aus, daß für das Restgebiet B die Ungleichung

$$H_B[\zeta] \leqq \varepsilon^2$$

besteht. Die Quadrate unterteilen wir in neue Quadrate Q_ν so fein, daß in jedem dieser Teilquadrate die Schwankung von ζ kleiner als ε wird; nunmehr definieren wir ζ^* in jedem der Q_ν als den Mittelwert von ζ und $\zeta^* = 0$ in B. Dann wird offenbar

$$H[\zeta^* - \zeta] \leqq \varepsilon^2 + \varepsilon^2 A,$$

wo A eine Schranke für den Inhalt von G ist. Dies aber drückt die Approximierbarkeit von ζ durch ζ^* aus.

Um nun zweitens die Approximierbarkeit von ζ^* durch ein ζ' und damit auch die von ζ durch ζ' einzusehen, genügt es, eine Funktion, welche in einem Quadrat Q_ν konstant etwa gleich 1, sonst 0 ist, im Sinne der H-Metrik durch eine Funktion ω zu approximieren, die außerhalb dieses Quadrates verschwindet. Dies aber ist offenbar mit einer stückweise linearen Funktion ω möglich. Unser Hilfssatz ist somit bewiesen.

Um jetzt Satz B zu beweisen, betrachten wir irgendein Quadrat Q in G und in Q eine Funktion ω, welche stetig und stückweise stetig differenzierbar in G ist und außerhalb Q verschwindet. Durch Produktintegration ergibt sich sofort

$$H[\psi^\nu_x, \omega] = -H[\psi^\nu, \omega_x], \quad H[\psi^\nu_y, \omega] = -H[\psi^\nu, \omega_y].$$

Aus Voraussetzung (32), angewandt auf $\zeta = \omega_x$ und $\zeta = \omega_y$ folgt

$$H[\psi^\nu_x, \omega] \to 0, \quad H[\psi^\nu_y, \omega] \to 0.$$

Damit aber sind die Relationen (36) für alle Funktionen $\zeta = \omega$ bewiesen, somit nach unserem Hilfssatz für alle Funktionen ζ aus $\mathfrak{H}$. Nach unserer anfänglichen Bemerkung folgt hieraus unmittelbar Satz B.

Satz 2 ist nun eine einfache Folgerung der Sätze A und B, indem wir diese Sätze auf die Funktionen

$$\psi^\nu = \varphi^\nu - u$$

zunächst nur für echte Teilgebiete G' von G anwenden. Es folgt sofort für jedes Teilgebiet G'

$$H_{G'}[\varphi^\nu - u] \to 0$$
$$D_{G'}[\varphi^\nu - u] \to 0.$$

Hieraus ergibt sich sofort auf Grund von Satz 4 aus § 1

$$H_{G'}[\varphi^\nu] \to H_{G'}[u]$$
$$D_{G'}[\varphi^\nu] \to D_{G'}[u].$$

Da die Größen $H_{G'}[\varphi^\nu] < H[\varphi^\nu]$ und $D_{G'}[\varphi^\nu] < D[\varphi^\nu]$ beschränkt sind, folgt nunmehr die Existenz von $H[u]$ und $D[u]$, d. h. u in $\mathfrak{D}$. Daraufhin aber schließen wir aus (26), daß für das *ganze* Gebiet G die Relation

$$H[\varphi^\nu - u, \zeta] \to 0$$

besteht. Wir können also jetzt die Sätze A und B auf das Gesamtgebiet G anwenden und erhalten damit die Behauptung des Satzes 2.

Mit den Resultaten dieses Paragraphen sind nicht nur die Existenzbeweise bei der ersten Randbedingung (§§ 2, 3) abgeschlossen. Wir werden diese Resultate ebenso für die Existenzbeweise bei anderen Randbedingungen (§§ 6, 7) verwenden.

§ 6. Zweite und dritte Randbedingung. Randwertaufgabe.

1. Greensche Formel und Randbedingungen. Um zu der in § 1 angekündigten allgemeinen Formulierung von Randbedingungen zweiter und dritter Art zu gelangen, betrachten wir ein Gebiet G mit dem Rande Γ und in diesem Gebiet eine Folge von abgeschlossenen Teilbereichen G_ε mit den stückweise glatten Rändern Γ_ε derart, daß jeder Punkt von Γ_ε vom Rande Γ einen Abstand kleiner als ε besitzt. Auf das Gebiet G_ε wenden wir die Greensche Formel für den Ausdruck

$$E_{G_\varepsilon}[\varphi, \psi]$$

an unter der Voraussetzung, daß φ zu $\mathfrak{F}$ und ψ zu $\mathfrak{D}$ gehört, aber ohne diese Funktionen Randbedingungen zu unterwerfen. Die Greensche Formel lautet

$$E_{G_\varepsilon}[\varphi, \psi] + H_{G_\varepsilon}[L[\varphi], \psi] = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left(p \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \sigma \varphi\right) \psi \, d s,$$

wobei $\frac{\partial}{\partial \nu}$ Differentiation nach der äußeren Normale auf Γ_ε und s die Bogenlänge auf Γ_ε bedeutet, während

$$\sigma = a \frac{\partial x}{\partial \nu} + b \frac{\partial y}{\partial \nu}$$

gesetzt ist. Lassen wir nunmehr $\varepsilon \to 0$ streben, so streben die beiden Terme der linken Seite der Greenschen Formel gegen bestimmte Grenzwerte; es existiert also auch der Limes der rechten Seite. Wir führen für diesen Grenzwert die Bezeichnung

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left(p \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \sigma \varphi\right) \psi \, d s$$

ein und *nennen* ihn wiederum ein *Randintegral* über den Rand Γ von G, obwohl auf dem Rande selbst über das Verhalten der Funktion ψ und der Ableitungen von φ sowie über die Existenz der Richtung und der Bogenlänge der Randkurve nichts vorausgesetzt ist.

Diese Definition kann ausgedrückt werden, indem wir die Greensche Formel in der Gestalt

$$E[\varphi, \psi] = -H[L[\varphi], \psi] + \int\limits_{\Gamma} \left(p \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \sigma u\right) \psi \, d s \tag{1}$$

für φ in $\mathfrak{F}$, ψ in $\mathfrak{D}$ schreiben.

Nunmehr sind wir imstande, die zweite und dritte Randbedingung für eine Funktion φ aus $\mathfrak{F}$ zu formulieren. Sie lautet: Für jedes ψ aus $\mathfrak{D}$ soll mit den obigen Definitionen

$$E[\varphi, \psi] = -H[L[\varphi], \psi] \tag{2}$$

gelten. Wir drücken diese Randbedingung für eine Funktion aus, indem wir sagen: es soll am Rande die Bedingung

$$\int_{\Gamma} \left(p \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \sigma \varphi\right) \psi \, d s = 0 \tag{3}$$ [1]

bestehen. Dann ist dieser Randbedingung ein Sinn beigelegt, auch wenn die Funktion σ und normale Ableitungen von φ am Rande gar keine Bedeutung im einzelnen mehr haben. Ist $\sigma = 0$, so spricht man von der zweiten, sonst von der dritten Randbedingung. Jedoch wird diese traditionelle Unterscheidung bei unserer Behandlung gegenstandslos, da z. B. bei Transformationen $\sqrt{p}\, \varphi = \psi$ die zweite Randbedingung für φ in die dritte für ψ übergeht.

Es wird sich zeigen, daß unsere Randbedingung in diesem schwachen Sinne insofern genau die richtige Einschränkung einer, wörtlich genommen, unerfüllbaren Randbedingung ist, als sie für die zu betrachtenden Gebiete die Lösung der Rand- und Eigenwertprobleme ermöglicht, und als dabei die Lösung des Randwertproblems eindeutig, die Lösung des Eigenwertproblems vollständig wird.

Wir werden gelegentlich von folgender Definition Gebrauch machen.

Definition. Alle Funktionen φ aus $\mathfrak{F}$, für welche die Randbedingung (3) erfüllt ist, bilden den Raum $\mathfrak{F}_\sigma$.

Die Greensche Formel (2) für jede Funktion φ aus $\mathfrak{F}_\sigma$ und ψ aus $\mathfrak{D}$ gilt dann definitionsgemäß.

2. Formulierung des Randwertproblems und Variationsproblems. Wir stellen das folgende

Randwertproblem III. *Eine dem Raume $\mathfrak{F}_\sigma$ angehörige, also die Randbedingung*

$$\int \left(p \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right) \zeta \, d s = 0 \tag{4}$$

[1] Wir beschränken uns hier auf die homogene Randbedingung, während man allgemeiner in Analogie zu § 2 die Randbedingung in der Form

$$p \frac{\partial}{\partial \nu} (\varphi - g) + \sigma (\varphi - g) = 0$$

zu stellen hätte, wobei g eine vorgeschriebene Funktion aus $\mathfrak{D}$ ist. Jedoch ist der Verzicht auf diese allgemeinere Formulierung dadurch motiviert, daß wir, wenn g dem Raum $\mathfrak{F}$ angehört, durch Einführung der Funktion $\psi = \varphi - g$ zu einem entsprechenden Differentialgleichungsproblem für $v = u - g$ mit einer homogenen Randbedingung gelangen. Es ist also bis auf Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für g die homogene Randbedingung nicht wesentlich allgemeiner.

Es sei darauf hingewiesen, daß für den Existenzbeweis die hier gewählte Form des Variationsausdruckes der aus Bd. I, Kap. VI vorzuziehen ist, weil sie explizite keine Randintegrale enthält.

mit allen ζ aus $\mathfrak{D}$ befriedigende, Funktion u soll gefunden werden, welche in G der Differentialgleichung

$$L[u] = -f \tag{5}$$

genügt. Dabei ist f eine gegebene in $G+\Gamma$ stetige Funktion mit stückweise stetigen ersten Ableitungen.

Im speziellen Falle, daß in G überall $a = b = q = 0$ ist, also

$$E[\varphi] = D[\varphi] \tag{6}$$

gilt, sind dabei die gegebenen Funktionen f und die gesuchte Funktion u noch den Bedingungen

$$\iint_G k f\,dx\,dy = 0, \tag{7}$$

$$\iint_G k u\,dx\,dy = 0 \tag{8}$$

zu unterwerfen.

Die Notwendigkeit der Bedingung (7) ergibt sich sofort, indem wir annehmen, daß es eine Lösung u des Randwertproblems III gibt. Durch Anwendung der Greenschen Formel (2) mit $\varphi = u, \psi = 1$ erhalten wir wegen $D[u, 1] = 0$ und $L[u] = -f$ sofort (7), womit diese Bedingung (7) als notwendig erwiesen ist. Da wegen $L[c] = 0$ zugleich mit u auch $u + c$ für jedes konstante c eine Lösung des Problems ist, ist die Zusatzbedingung (8) keine Einschränkung. Sie dient dazu, diese Konstante c zu fixieren und damit die gewünschte Eindeutigkeit für die Lösung des Problems herzustellen.

Wir werden unser Randwertproblem lösen, indem wir es als äquivalent mit dem folgenden Variationsproblem erkennen und dieses Variationsproblem direkt lösen.

Variationsproblem III. *Gesucht ist unter allen Funktionen φ aus $\mathfrak{D}$ eine solche, für welche der Ausdruck*

$$E[\varphi] - 2H[f, \varphi] \tag{9}$$

einen möglichst kleinen Wert d besitzt. Dabei ist im Falle $a = b = q = 0$ noch die Zusatzbedingung (7) für die gegebene Funktion f und die weitere Zusatzbedingung

$$\iint_G k\varphi\,dx\,dy = 0 \tag{10}$$

für die zugelassenen Funktionen φ zu stellen.

Randbedingungen werden nicht gestellt. Vielmehr erfüllt die Lösung des Variationsproblems von selbst die vorgeschriebenen Randbedingungen. Sie heißen deshalb *„natürliche Randbedingungen"*[1].

Vom Variationsproblem aus sind Nebenbedingungen (7) und (10) sofort durch die Bemerkung motiviert, daß im Falle $a = b = q = 0$

[1] Zu diesem Begriff siehe Bd. I, Kap. IV, § 5.

durch Addition einer Konstanten zu φ der Ausdruck $D[\varphi]$ nicht geändert wird, während durch Addition von c der Ausdruck $-2H[f,\varphi]$ und damit auch der Variationsausdruck (9) beliebig groß negativ gemacht werden kann, es sei denn, daß die Bedingung (7) besteht. Damit eine untere Grenze des Variationsproblems existiert, dieses Problem somit sinnvoll wird, ist daher die Bedingung (7) notwendig.

3. Einschränkung der Klasse zulässiger Gebiete. Um die Existenz einer unteren Grenze in unserem Variationsproblem III sicher zu stellen und dann das Variationsproblem zu lösen, ist es nicht möglich, beliebige — zusammenhängende — offene Gebiete oder sogar allgemein offene Punktmengen G zugrunde zu legen, wie bei der ersten Randbedingung; für beliebige solche Bereiche G braucht, wie wir in § 8 an Beispielen sehen werden, die Hauptungleichung aus § 2 bzw. der Rellichsche Auswahlsatz, auf denen unsere Schlüsse im Falle der ersten Randbedingung beruhten, nicht mehr zu gelten.

Um die Theorie für die Randwertaufgabe bei der zweiten und dritten Randbedingung durchführen zu können, formulieren wir daher einschränkende Forderungen für die zugelassenen Gebiete G. Die erste Forderung verlangt die Gültigkeit der in § 3, Nr. 1, S. 488 für ein Quadrat bewiesenen Poincaréschen Ungleichung, wenn statt eines Quadrates Q unser Gebiet G zugrunde gelegt wird. Die zweite Forderung verallgemeinert die Hauptungleichung I aus § 2, welche dort nur für den Raum $\mathring{\mathfrak{D}}$ ausgesprochen war, auf den Raum $\mathfrak{D}$. Genau formuliert: Wir stellen

Forderung 1 *(Poincarésche Ungleichung). Es soll zu dem Gebiete G eine Konstante γ geben, so daß für jedes φ aus $\mathfrak{D}$*

$$H[\varphi] \leqq \frac{1}{\iint\limits_G k\,dx\,dy}\left[\iint\limits_G k\,\varphi\,dx\,dy\right]^2 + \gamma\,D[\varphi] \tag{11}$$

gilt.

Forderung 2. *Im Falle, daß a, b, q nicht überall in G gleichzeitig Null sind, soll es zum Gebiete G eine Konstante γ geben, so daß für alle Funktionen φ aus $\mathfrak{D}$ die Ungleichung*

$$H[\varphi] \leqq \gamma\,E[\varphi] \tag{12}$$

besteht.

In § 8 werden wir zeigen, daß beide Forderungen für eine sehr allgemeine, alle praktisch vorkommenden Fälle enthaltende Klasse $\mathfrak{N}$ von Gebieten gilt. Von jedem Gebiet G, welches die beiden hier angegebenen Forderungen erfüllt, wollen wir sagen, es besitze die Eigenschaft $\mathfrak{P}$.

Nunmehr formulieren wir den

Satz 1. *Für Gebiete G mit der Eigenschaft $\mathfrak{P}$ besitzt der Variationsausdruck*

$$E[\varphi] - 2H[f,\varphi] \tag{9}$$

für φ in $\mathfrak{D}$ eine untere Grenze; das Variationsproblem ist also sinnvoll. Im Falle $a = b = q = 0$ ist dabei (7) als Nebenbedingung zu stellen.

Zum Beweise beachten wir, daß in beiden betrachteten Fällen, sowohl wenn $a = b = q = 0$ überall in G gilt und φ die Bedingung (10) befriedigt wegen Forderung 1, als auch im anderen Falle wegen Forderung 2 eine Ungleichung $H[\varphi] \leqq \gamma E[\varphi]$ für alle Funktionen φ aus $\mathfrak{D}$ besteht. Dann aber ist

$$2\,|H[f,\varphi]| \leqq 2\sqrt{H[f]\,H[\varphi]} \leqq 2\sqrt{H[f]\,\gamma E[\varphi]} \leqq \frac{1}{2} E[\varphi] + 8\gamma H[f],$$

also

$$E[\varphi] - 2H[f,\varphi] \geqq \frac{1}{2} E[\varphi] - 8\gamma H[f] \geqq -8\gamma H[f].$$

4. Äquivalenz von Minimumproblem und Randwertproblem. Eindeutigkeit. Nunmehr können wir unser Minimumproblem und damit das Randwertproblem in fast wörtlich derselben Weise behandeln wie bei fester Randbedingung. Zunächst folgt genau wie in § 2

Satz 2. *Die Lösung des Randwertproblems III löst das Minimumproblem.*

Ferner

Satz 3. *Die Lösung des Randwertproblems III ist eindeutig bestimmt.*

Denn die Differenz u zweier Lösungen löst das Randwertproblem für die Differentialgleichung

$$L[u] = 0.$$

Aus der Greenschen Formel (2) für $\varphi = \psi = u$ folgt dann

$$E[u] = 0$$

und somit auf Grund unserer Ungleichungen (11) oder (12)

$$H[u] = 0,$$

also u identisch Null.

5. Lösung des Variationsproblems und Randwertproblems. Die Lösung des Variationsproblems und damit auch des Randwertproblems kann nunmehr genau wie in § 2 gewonnen werden, nachdem die Existenz einer unteren Grenze und damit einer Minimalfolge φ^ν gesichert ist. Für diese Minimalfolge ergeben sich mit demselben Beweis die Relationen

$$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - H[f, \zeta^\nu] \to 0 \tag{13}$$

für alle ζ^ν aus $\mathfrak{D}$, für die $E[\zeta^\nu] \leqq M$ ist. Hieraus und aus den Ungleichungen (11) bzw. (12) folgt

$$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \tag{14}$$

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \tag{15}$$

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0. \tag{16}$$

Diese Tatsachen beweist man wörtlich wie die formal mit ihnen identischen Relationen (10), (11), (12) aus § 2. Der Unterschied hier ist nur,

daß die Funktionen φ nicht mehr dem Raum $\mathring{\mathfrak{D}}$ anzugehören brauchen, sondern beliebig in $\mathfrak{D}$ liegen dürfen.

Nunmehr liefert die Anwendung der Sätze 1 und 2 aus § 5 wörtlich wie in § 2 bzw. § 3 eine Grenzfunktion u mit folgenden Eigenschaften: u gehört zum Bereiche $\mathfrak{F}$ und es ist $L[u] = -f$; es gilt

$$E[\varphi^\nu - u] \to 0, \quad D[\varphi^\nu - u] \to 0, \quad H[\varphi^\nu - u] \to 0.$$

Hieraus folgt

$$E[\varphi^\nu] \to E[u], \quad \text{also} \quad E[u] = d.$$

Aus der Greenschen Formel

$$E[\varphi^\nu, \zeta] - H[f, \zeta] = 0$$

für alle ζ aus $\mathfrak{D}$, folgt nach (14), (16) und § 1 Satz 4

$$E[u, \zeta] - H[f, \zeta] = 0.$$

Diese Relation ist aber mit unserer Randbedingung (4) gleichwertig. Somit löst die Funktion u auch unser Randwertproblem.

§ 7. Das Eigenwertproblem bei zweiter und dritter Randbedingung.

Wir stellen zunächst gemäß unseren Bemerkungen zu Beginn des vorigen Paragraphen wiederum eine einschränkende Forderung an das Gebiet G:

Forderung 3 *(Rellichscher Auswahlsatz). Für das Gebiet G soll gelten: In jeder Folge von Funktionen φ^ν aus $\mathfrak{D}$, für welche die Ausdrücke*

$$E[\varphi^\nu], \quad H[\varphi^\nu]$$

beschränkt sind, existiert eine Teilfolge, für welche

$$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

gilt.

Derartige Gebiete wollen wir Gebiete der Eigenschaft $\mathfrak{R}$ nennen. Wir werden in § 8 erkennen, daß dieselbe dort gekennzeichnete Klasse $\mathfrak{N}$ von Gebieten, welche die Eigenschaft $\mathfrak{P}$ besitzt, auch die Eigenschaft $\mathfrak{R}$ hat, so daß dann für diese Gebietsklasse sowohl die Theorie der Randwertaufgabe als auch die Theorie des Eigenwertproblems gültig ist.

Das Eigenwertproblem lautet

Eigenwertproblem IV. Es sind Parameter λ und in G nicht identisch verschwindende Funktionen u zu finden, welche zu $\mathfrak{F}_\sigma$ gehören, also die Randbedingung [vgl. (4) § 6]

$$\int \left(p \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right) \zeta \, ds = 0 \tag{1}$$

für alle ζ aus $\mathfrak{D}$ befriedigen, und welche der Differentialgleichung

$$L[u] + \lambda u = 0 \tag{2}$$

genügen.

Der erste (kleinste) Eigenwert $\lambda = \lambda_1$ dieses Problems und die zugehörige Eigenfunktion $u = u_1$ ergibt sich als Lösung zu dem folgenden

Eigenwert-Variationsproblem IV. *Unter allen Funktionen φ aus $\mathfrak{D}$, für welche die Nebenbedingung*

(3) $$H[\varphi] = 1$$

erfüllt ist, wird eine solche gesucht, für welche der Ausdruck

(4) $$E[\varphi]$$

einen möglichst kleinen Wert λ besitzt.

Randbedingungen werden für das Eigenwertvariationsproblem wiederum nicht gestellt. Die geforderte Eigenschaft (1) ist eine *natürliche Randbedingung.*

Daß das Problem sinnvoll ist, d. h. daß eine untere Grenze λ des obigen Integrals (4) unter der Nebenbedingung (3) existiert, ist wegen unserer Definitheitsvoraussetzungen aus § 1 selbstverständlich. Für eine Minimalfolge φ^ν folgt wörtlich wie in § 3 das Bestehen der Variationsrelation:

(5) $$E[\varphi^\nu, \zeta^\nu] - \lambda H[\varphi^\nu, \zeta^\nu] \to 0$$

nunmehr aber für jede beliebige Folge von Funktionen ζ^ν aus $\mathfrak{D}$ (nicht notwendigerweise aus dem eingeschränkten Bereich $\mathring{\mathfrak{D}}$), sobald mit festem M Schranken

$$E[\zeta^\nu] \leqq M, \quad H[\zeta^\nu] \leqq M$$

bestehen. Hieraus ergibt sich wie in § 3 die Relation

(6) $$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] - \lambda H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0.$$

Nunmehr können wir die Lösung des Variationsproblems genau wie in § 3 durchführen; denn gemäß der Forderung 3 gilt für die Funktionenfolge φ^ν wegen der Beschränktheit von $E[\varphi^\nu]$ der Rellichsche Satz. Wir können also eine Teilfolge auswählen, so daß für sie

(7) $$H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$$

gilt. Wegen der Relation (6) folgt daraus sofort auch

(8) $$E[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \qquad D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0.$$

Die Relationen (5), (7), (8) reichen aber aus, um aus den Sätzen 1 und 2 von § 5 genau wie früher in § 3 die Existenz einer Grenzfunktion u in $\mathfrak{G}$ zu erschließen, welche stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, der Differentialgleichung (2) genügt, und für welche

(9) $$E[\varphi^\nu - u] \to 0, \qquad H[\varphi^\nu - u] \to 0$$

gilt. Somit folgen aus Satz 4 von § 1 die Relationen

$$E[u] = \lambda, \quad H[u] = 1.$$

Es ist also u Lösung unseres Eigenwert-Variationsproblems IV. Daher gilt — was man auch aus (5) und (9) folgern kann — mit willkürlichem ζ aus $\mathfrak{D}$ die Variationsgleichung

$$E[u, \zeta] - \lambda H[u, \zeta] = 0. \tag{10}$$

Aus ihr ergibt sich nunmehr unter Berücksichtigung der Differentialgleichung (2), daß u die vorgeschriebene Randbedingung (1) erfüllt. Damit ist das Eigenwertproblem gelöst, insofern es sich um die Konstruktion der ersten Eigenfunktion $u = u_1$ und des ersten Eigenwertes $\lambda = \lambda_1$ handelt.

Es sei bemerkt, daß im Falle $a = b = q = 0$ dieser Eigenwert gleich Null und die Eigenfunktion konstant ist.

Die weiteren Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$ und zugehörigen Eigenfunktionen $u_2, u_3, \ldots$ erhält man in wörtlich derselben Weise wie in § 3, 3 als Lösungen der folgenden *Variationsprobleme:* Unter allen Funktionen φ aus $\mathfrak{D}$, welche den Bedingungen

$$H[\varphi] = 1$$

und

$$H[\varphi, u_\nu] = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-1$$

genügen, soll eine solche gefunden werden, für welche der Ausdruck

$$E[\varphi]$$

einen möglichst kleinen Wert besitzt. Die Lösung dieses Problems ergibt als kleinsten Wert den Eigenwert $\lambda = \lambda_n$ und als die Lösung Eigenfunktion $u = u_n$. Wie in § 3, 3 folgt das System der Orthogonalitätsrelationen

$$H[u_n, u_m] = \begin{cases} 1 \\ 0, \end{cases} \qquad E[u_n, u_m] = \begin{cases} \lambda_n & \text{für} \quad n = m \\ 0 & \text{für} \quad n \neq m, \end{cases}$$

sowie die Tatsache, daß λ_n mit wachsendem n über alle Grenzen wächst und endlich der

Vollständigkeitssatz. Für jede Funktion φ aus $\mathfrak{D}$ bestehen mit ihren Fourierschen Koeffizienten

$$c_n = H[\varphi, u_n]$$

die Vollständigkeitsrelationen

$$H[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \qquad E[\varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2.$$

§ 8. Diskussion der bei der zweiten und dritten Randbedingung zugrunde gelegten Gebiete.

1. Gebiete vom Typus $\mathfrak{N}$. Die Existenzsätze der §§ 6, 7 waren wesentlich von der Forderung abhängig, daß für die betrachteten Gebiete G die Poincarésche Ungleichung und die Hauptungleichung bzw. der Rellichsche Auswahlsatz gilt, ohne daß weitere Randbedingungen

für die zugelassenen Funktionen φ gestellt werden. Wir wollen nunmehr eine alle normalerweise vorkommenden Gebiete umfassende Klasse $\mathfrak{N}$ von Gebieten angeben, für welche beide Eigenschaften $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ erfüllt sind.

Wir definieren zunächst als Normalgebiet ein solches, welches einem Gebiet

$$0 < x < a, \; 0 < y < f(x) \tag{1}$$

kongruent ist, wobei $f(x)$ eine für $0 \leqq x \leqq a$ stetige und positive Funktion bedeutet. Zu einem Normalgebiet gehören zwei Zahlen b, c, so daß

$$0 < b \leqq f(x) \leqq c \tag{2}$$

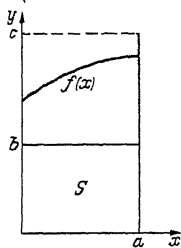



Abb. 54.

gilt (a, b sind dabei Zahlen, die nicht mit den Koeffizienten a, b in dem Ausdruck $L[u]$ verwechselt werden sollen).

Das Rechteck

$$0 < x < a, \; 0 < y < b \tag{3}$$

bzw. das betreffende ihm kongruente Rechteck des Normalgebiets nennen wir den Sockel S des Normalgebietes.

Definition: G heißt ein Gebiet vom Typ $\mathfrak{N}$, wenn es folgende Eigenschaften hat:

1. G ist die Summe einer endlichen Anzahl von Normalgebieten, welche einander überdecken dürfen.

2. (Forderung des Zusammenhangs.) Ist Q irgendein Quadrat im Inneren von G, so soll es möglich sein, G aus Normalgebieten so zusammenzusetzen, daß man jedes dieser Normalgebiete durch eine endliche Anzahl von Schritten mit Q innerhalb G durch eine Kette von Normalgebieten in folgendem Sinne verbinden kann: Der Sockel S jedes Gebietes dieser Kette soll im nächsten Normalgebiet und der Sockel des letzten dieser Normalgebiete soll im Quadrat Q liegen.

Aufgabe 1. Man zeige, daß die Forderung 2 für jedes — zusammenhängende — Gebiet, das der Forderung 1 genügt, von selbst erfüllt ist. (Hierzu nehme man nötigenfalls geeignete Unterteilungen der ursprünglichen Normalgebiete vor.)

Aufgabe 2. Man zeige, daß jedes konvexe Gebiet ein Gebiet vom Typ $\mathfrak{N}$ ist.

Aufgabe 3. Man zeige, daß die Vereinigungsmenge von zwei Gebieten $\mathfrak{N}$, falls sie wieder ein zusammenhängendes Gebiet darstellt, zum Typus $\mathfrak{N}$ gehört.

Hilfssatz 1 (Integralabschätzung für Normalgebiete).

Für jedes Normalgebiet B mit dem Sockel S und für jede Funktion φ aus $\mathfrak{D}_B$ gilt

$$H_B[\varphi] \leqq \frac{2\,c\,k_1}{b\,k_0} H_S[\varphi] + 2\,c^2 \frac{k_1}{p_0} D_B[\varphi], \tag{4}$$

wobei sich die Integrale H_B, D_B auf das Normalgebiet, das Integral H_S auf den Sockel bezieht und k_0, p_0 untere Schranken für k bzw. p, k_1 eine obere Schranke für k ist.

Beweis. Es sei x_1, y_1 ein Punkt aus dem Normalgebiet B und $0 < y_0 < b$; dann gilt

$$|g(x_1, y_1)|^2 \leqq 2|g(x_1, y_0)|^2 + 2|g(x_1, y_1) - g(x_1, y_0)|^2$$
$$\leqq 2|g(x_1, y_0)|^2 + 2c\int_0^{f(x_1)} g_y^2(x_1, y)\,dy.$$

Wir integrieren nach x_1, y_1 über G, nach y_0 über $0 < y_0 < b$; dann entsteht

$$\frac{b}{k_1} H_B[\varphi] \leqq 2\frac{c}{k_0} H_S[\varphi] + 2\frac{bc^2}{p_0} D_B[\varphi],$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Es sei nunmehr G irgendein Gebiet vom Typus $\mathfrak{N}$ bestehend aus den Normalgebieten B.

Durch Anwendung des Hilfssatzes für jedes Normalgebiet einer Kette von Normalgebieten $B_0, B_1, \ldots, B_\nu, \ldots$, dessen letzter Sockel in Q enthalten ist, gewinnen wir Ungleichungen der Form

$$H_{B_\nu}[\varphi] \leqq \tau_1^\nu D_{B_\nu}[\varphi] + \tau_2^\nu H_{S_\nu}[\varphi] \leqq \tau_1^\nu D[\varphi] + \tau_2^\nu H_{B_{\nu+1}}[\varphi],$$

wobei τ_2^ν, τ_1^ν Konstanten sind. Durch sukzessive Anwendung auf alle Normalgebiete einer Kette ergibt sich

$$H_{B_0}[\varphi] \leqq \tau_1 D[\varphi] + \tau_2 H_Q[\varphi]$$

mit konstantem τ_1, τ_2. Durch Summation über sämtliche das Gebiet G zusammensetzende Normalgebiete B_0 erhält man nun unmittelbar folgenden

Hilfssatz 2. Für jedes Gebiet G des Typus $\mathfrak{N}$ und jedes Quadrat Q in G gibt es zwei Konstanten τ, ϱ, so daß bei beliebigem φ aus $\mathfrak{D}$

$$H[\varphi] \leqq \tau D[\varphi] + \varrho H_Q[\varphi] \tag{5}$$

gilt.

Aus dieser Ungleichung ziehen wir die Folgerung, daß das Gebiet die in § 6 geforderten Eigenschaften $\mathfrak{P}$ besitzt, daß also für die Gebiete vom Typus $\mathfrak{N}$ die Randwertaufgabe aus § 6 lösbar ist.

Wir beweisen zunächst:

Satz 1. *Für ein Gebiet G vom Typ $\mathfrak{N}$ gilt die Poincarésche Ungleichung*

$$H[\varphi] \leqq \frac{1}{\iint_G k\,dx\,dy}\left[\iint_G k\varphi\,dx\,dy\right]^2 + \gamma D[\varphi] \tag{6}$$

mit jedem φ aus $\mathfrak{D}$, wobei γ eine nur vom Gebiet G abhängige Konstante bedeutet.

Zum Beweise beachten wir zunächst, daß nach § 3, 1 mit einer Konstanten γ_0, eine Poincarésche Ungleichung jedenfalls für ein Quadrat Q in G besteht:

$$H_Q[\psi] \leqq \gamma_0 D_Q[\psi], \tag{7}$$

vorausgesetzt, daß ψ die Nebenbedingung

$$\iint_Q k\psi\,dx\,dy = 0 \tag{8}$$

erfüllt. Nunmehr folgt aus unserem Hilfssatz 2 die Ungleichung

$$H[\psi] \leqq (\tau + \varrho\gamma_0)\,D[\psi] \tag{9}$$

unter dieser Nebenbedingung (8). Ist nun φ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{D}$, so können wir die Konstante $c = c_0$ derart bestimmen, daß der Ausdruck $H[\varphi - c]$ möglichst klein wird. Es ergibt sich sofort

$$= \frac{1}{\iint k\,dx\,dy}\iint k\varphi\,dx\,dy$$

und somit für jede beliebige Funktion φ und jede Konstante c die Ungleichung

$$H[\varphi] - \frac{1}{\iint_G k\,dx\,dy}\left[\iint_G k\varphi\,dx\,dy\right]^2 = H[\varphi - c_0] \leqq H[\varphi - c]. \tag{10}$$

Da wir nun stets eine Konstante c so bestimmen können, daß $\psi = \varphi + c$ der Bedingung (8) genügt, so folgt sofort mit Rücksicht auf Ungleichungen (9) und (10) die Relation (6), welche mit $\gamma = \tau + \varrho\gamma_0$ die Behauptung des Satzes 1 ausdrückt.

Um die Eigenschaft $\mathfrak{P}$ zu verifizieren, haben wir nun noch zu zeigen:

Satz 2. *Wenn die Funktionen a, b, q im Gebiet G vom Typ $\mathfrak{N}$ nicht sämtlich identisch verschwinden, so gibt es eine Konstante γ, so daß für jedes φ aus $\mathfrak{D}$ die Hauptungleichung*

$$H[\varphi] \leqq \gamma\, E[\varphi]$$

gilt.

Wir beachten die schon in § 1, Nr. 2 gemachte Voraussetzung

$$A(\xi,\eta,\zeta) = p(\xi^2 + \eta^2) + 2a\xi\zeta + 2b\eta\zeta + q\zeta^2 \geqq \varkappa(\xi^2 + \eta^2), \tag{11}$$

wobei $\varkappa$ eine von dem Ort in G unabhängige Konstante ist. Wegen

$$A = \left(\sqrt{p}\,\xi + \frac{a}{\sqrt{p}}\zeta\right)^2 + \left(\sqrt{p}\,\eta + \frac{b}{\sqrt{p}}\zeta\right)^2 + \left(q - \frac{a^2 + b^2}{p}\right)\zeta^2 \tag{12}$$

und der in (11) ausgedrückten Definitheit von A folgt $q - \frac{a^2 + b^2}{p} \geqq 0$. Es muß also, wenn an einer Stelle die Funktion q verschwindet, dort auch zugleich a und b verschwinden. Somit muß es ein abgeschlossenes Quadrat Q innerhalb G geben, in welchem q positiv ist.

Wir behaupten, daß in diesem Teilbereich der Ausdruck $q - \frac{a^2+b^2}{p}$ oberhalb einer positiven Konstanten $\varkappa_0$ liegen muß. Würde er nämlich an einer Stelle verschwinden, ohne daß a und b dort gleichzeitig verschwinden, so würden wir für $\zeta = 1$ aus den Gleichungen

$$\sqrt{p}\,\xi + \frac{a}{\sqrt{p}} = 0, \quad \sqrt{p}\,\eta + \frac{b}{\sqrt{p}} = 0$$

ein Wertsystem ξ und η mit $\xi^2 + \eta^2 > 0$ erhalten, für welches A an dieser Stelle verschwindet, im Gegensatz zur Voraussetzung (11).

Es gibt somit für das Gebiet Q eine feste untere Schranke $\varkappa_0$ für $q - \frac{a^2+b^2}{p}$, somit gilt in Q

$$A \geqq \varkappa_0 \zeta^2 \tag{13}$$

und daher

$$E[\varphi] \geqq \frac{\varkappa_0}{k_1} H_Q[\varphi]. \tag{14}$$

Aus der Ungleichung (5) von Hilfssatz 2 und § 1, Satz 1 ergibt sich nun

$$H[\varphi] \leqq \left(\frac{\tau}{\varkappa} + \frac{\varrho k_1}{\varkappa_0}\right) E[\varphi], \tag{15}$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Endlich beweisen wir zur Begründung der Eigenwerttheorie folgenden

Satz 3. *Die Gebiete vom Typ $\mathfrak{N}$ besitzen die Eigenschaft $\mathfrak{R}$.* Wir zeigen hierzu

Satz 4 *(Friedrichssche Ungleichung). Zu jedem positiven ε gibt es eine Anzahl von Koordinatenfunktionen $\omega_1, \ldots, \omega_N$ aus $\mathfrak{H}$, so daß für jede Funktion φ aus $\mathfrak{D}$ die Ungleichung*

$$H[\varphi] \leqq \sum_{\nu=1}^{N} H^2[\omega_\nu, \varphi] + \varepsilon D[\varphi] \tag{16}$$

besteht.

Da aus diesem Satze wörtlich wie in § 3 der Rellichsche Auswahlsatz (vgl. S. 489) für Funktionen φ aus $\mathfrak{D}$ folgt, so ist mit Satz 4 auch die Eigenschaft $\mathfrak{R}$ für Gebiete $\mathfrak{N}$ bestätigt.

Zum Beweise des Satzes 4 bemerken wir zunächst, daß wir uns auf ein Normalgebiet B beschränken dürfen. Denn durch Addition der entsprechenden endlich vielen Ungleichungen für die aus Gebieten B sich zusammengesetzten Normalgebiete ergibt sich sofort eine entsprechende Ungleichung für das Gesamtgebiet G, da jeder einzelne Punkt des Gebietes G nur eine beschränkte Anzahl von Malen überdeckt wird. Dabei sind als Koordinatenfunktionen für das Gebiet G die sämtlichen Koordinatenfunktionen der einzelnen Normalgebiete zu verstehen, die außerhalb dieser Normalgebiete als identisch Null definiert werden.

Der Beweis für ein Normalgebiet, der durch die Ungleichungen (1) und (2) beschriebenen Art beruht auf der Verwendung der Poincaréschen Ungleichung (1a) aus § 3,1 für ein Quadrat Q der Seitenlänge σ

$$(17)\qquad H_Q[\varphi] \leqq \frac{1}{\sigma^2 k_0}\Big[\iint_Q k\varphi\, dx\, dy\Big]^2 + \sigma^2 \frac{k_1}{p_0} D[\varphi]$$

und auf der schon früher benutzten Bemerkung, daß hierin der Faktor des D-Integrals mit σ^2 gegen Null strebt.

Wir nehmen zunächst eine feinere Einteilung von B in Quadrate und andere Normalgebiete vor, indem wir mit einer passend groß gewählten ganzen Zahl M und

$$\sigma = \frac{a}{M}$$

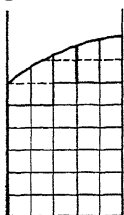



Abb. 55.

die geraden Linien

$$x = \mu\sigma, \qquad y = \nu\sigma, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots, M$$

ziehen. So entsteht eine Quadrateinteilung der Ebene in Quadrate Q der Seitenlänge σ. Nun teilen wir das Normalgebiet B folgendermaßen in einander nicht überdeckende Normalgebiete K_j ein: Jedes der eben betrachteten Quadrate von der Seitenlänge σ sei eines der K_j, wenn dieses Quadrat und das benachbarte darüberliegende Quadrat zu B gehört. Wenn ein zu B gehöriges Quadrat diese Eigenschaft nicht hat, so wird es mit demjenigen Teil des darüberliegenden Quadrates, welches noch zu B gehört, zu einem Normalgebiet K_j vereinigt und als dessen Sockel betrachtet.

Wir beachten nun, daß wegen der gleichmäßigen Stetigkeit der das Normalgebiet B definierenden Funktion $f(x)$ eine nur von σ abhängige Größe $\delta(\sigma)$ mit $\delta(\sigma) \underset{\sigma \to 0}{\to} 0$ existiert, so daß

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqq \delta(\sigma) \quad \text{für} \quad |x_1 - x_2| \leqq \sigma$$

gilt. Man hat demgemäß für die eben betrachteten nicht quadratischen feineren Normalgebiete K_j die in der Definition auf S. 516 genannten Größen a, b, c durch σ, σ, $2\sigma + \delta(\sigma)$ zu ersetzen.

Nunmehr beweisen wir den

Hilfssatz: Für alle unsere Normalgebiete K_j und ihre zugehörigen Sockelquadrate Q_j — welche für die Gebiete der ersten Art mit diesen Gebieten selbst identisch sind — gilt eine Ungleichung der Form

$$(18)\qquad H_{K_j}[\varphi] \leqq \frac{\tau}{\sigma} H_{Q_j}[\varphi] + \varrho\, D_{K_j}[\varphi]$$

wobei ϱ und τ nur von σ abhängige Größen sind, welche mit σ zugleich gegen Null streben, und wobei φ irgendeine Funktion aus $\mathfrak{D}$ bedeutet.

Die Behauptung gilt trivialerweise mit $\varrho = 0$, $\tau = \sigma$, wenn K_j mit Q übereinstimmt. Für die übrigen Gebiete K_j gilt gemäß Hilfssatz 1 auf S. 516

$$H_{K_j}[\varphi] \leqq \frac{2(2\sigma+\delta)\,k_1}{\sigma k_0} H_{Q_j}[\varphi] + (2\sigma+\delta)^2 \frac{k_1}{p_0} D_{K_j}[\varphi],$$

was unsere Behauptung mit

$$\varrho = (2\sigma+\delta)^2 \frac{k_1}{p_0}, \qquad \tau = 2(2\sigma+\delta)\frac{k_1}{k_0}$$

ausdrückt.

Nunmehr wenden wir in der Ungleichung (18) auf das Quadrat Q_j die Poincarésche Ungleichung (17) an und erhalten

$$H_{K_j}[\varphi] \leqq \frac{\tau}{\sigma^3 k_0}\left[\iint\limits_{Q_j} k\varphi\,dx\,dy\right]^2 + \left(\tau\sigma\frac{k_1}{p_0} + \varrho\right) D_{K_j}[\varphi] \tag{19}$$

und nunmehr durch Summation

$$H[\varphi] \leqq \sum_j \frac{\tau}{\sigma^3 k_0} \left.\iint\limits_{Q_j} k\varphi\,dx\,dy\right]^2 + \left(\tau\sigma\frac{k_0}{p_1} + \varrho\right) D_{K_j}[\varphi]. \tag{20}$$

Diese Ungleichung aber enthält die Behauptung des Satzes 4, indem wir

$$\varepsilon = \left(\tau\sigma\frac{p_1}{k_0} + \varrho\right)$$

setzen, was mit σ beliebig klein wird, und indem wir für jedes der betrachteten Quadrate Q_j eine Funktion ω_j definieren, die außerhalb Q_j identisch verschwindet und in dem Quadrat Q_j den Wert

$$\omega_j = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma^3 k_0}}$$

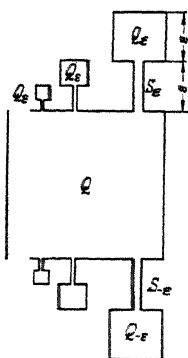
besitzt.

Abb. 56.

2. Notwendigkeit von einschränkenden Bedingungen für das Gebiet. Daß tatsächlich Einschränkungen für das Gebiet G nötig sind, welche sich auf die Verbindbarkeit verschiedener Teile des Gebietes beziehen, erkennt man aus den folgenden beiden Gegenbeispielen.

1. Beispiel eines Gebietes, für welches die Poincarésche Ungleichung nicht gilt, die also nicht vom Typ $\mathfrak{P}$ ist. Wie in Abb. 56 konstruieren wir ein Gebiet G, welches aus einem Quadrat Q

$$0 < x < 2; \qquad -1 < y < 1$$

dadurch gebildet ist, daß wir symmetrisch unendlich viele Paare von Quadraten Q_ε und $Q_{-\varepsilon}$ mit $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ anfügen, welche durch immer dünner werdende Hälse an das Quadrat Q angeschlossen sind. Die angehefteten Quadrate Q_ε und $Q_{-\varepsilon}$ mögen die Seitenlänge ε haben, ebenso die geradlinigen Verbindungshälse S_ε und $S_{-\varepsilon}$. Die Breite dieser

Verbindungshälse sei ε^4 und für die zugehörigen Quadrate möge $\varepsilon_\nu \to 0$ gelten und $\sum \varepsilon_\nu < \frac{1}{2}$ sein. Wir betrachten eine Funktionenfolge φ_ε für $\varepsilon = \varepsilon_\nu$, wobei

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{in } Q_\varepsilon, \quad = -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{in } Q_{-\varepsilon}, \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}(y-1) \text{ in } \varphi_\varepsilon, \quad = -\frac{1}{\varepsilon^2}(-y-1) \text{ in } \varphi_{-\varepsilon}, \\ &= 0 \quad \text{in } Q \end{aligned}$$

ist. Offenbar gilt mit $k = p = 1$

$$H[\varphi_\varepsilon] = 2 + \tfrac{2}{3}\varepsilon^3, \qquad D[\varphi_\varepsilon] = 2\varepsilon, \qquad \iint_G \varphi_\varepsilon \, dx\, dy = 0.$$

Es gibt also keine Konstanten γ, mit welchen bei allen Funktionen der Funktionenfolge φ_ε die Poincarésche Ungleichung erfüllt ist.

2. Beispiel eines Gebietes, das nicht vom Typ $\mathfrak{R}$ ist. Es sei G ein „Kamm", bestehend aus dem Quadrat R

$$0 < x < 1, \qquad 1 < y < 0$$

und den „Zähnen"

$$\frac{1}{2^{m+1}} < x < \frac{1}{2^m}, \qquad 0 \leqq y < 1; \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Wir betrachten die Folge

$$\begin{aligned} \varphi^m(x, y) &= [illegible]_{m+1} \quad \text{in } [illegible]_{m+1} < x < \frac{1}{2^m}, \ \frac{1}{2} < y < 1, \\ &= \frac{2}{m+1}\, y \ \text{in } \frac{1}{2^{m+1}} < x < \frac{1}{2^m}, \ 0 < y < \frac{1}{2}, \\ &= 0 \ \text{konst.} \end{aligned}$$

Für die Folge gilt

$$\tfrac{1}{2} < H[\varphi^m] < 1, \qquad D[\varphi^m] = 2. \tag{21}$$

Offenbar besteht für jedes Quadrat Q im Inneren von G die Relation

$$\iint_Q \varphi^m \, dx\, dy \to 0.$$

Also gilt (vgl. Beweis von Satz 1a aus § 5) für jede Funktion ζ aus $\mathfrak{H}$

$$H[\varphi^m, \zeta] \to 0. \tag{22}$$

Dies aber widerspricht dem Rellichschen Auswahlsatz. Denn wählen wir eine Teilfolge der φ^m, für die $H[\varphi^m - \varphi^n] \to 0$ gilt, und bestimmen wir zu gegebenem positiven $\varepsilon < \frac{1}{3}$ die Zahl n so groß, daß für $m > n$

$$H[\varphi^m - \varphi^n] \leqq \varepsilon,$$

sodann nach (22) m so groß, daß

$$H[\varphi^m, \varphi^n] \leqq \varepsilon$$

wird, so entsteht nach (21) der Widerspruch

$$\varepsilon \geqq H[\varphi^m - \varphi^n] \geqq 1 - 2\varepsilon.$$

Man zeige: Das Gebiet des Beispieles 1 ist auch nicht vom Typus $\mathfrak{P}$, während das Gebiet des zweiten Beispieles wohl vom Typus $\mathfrak{R}$ ist. Ferner: Für das erste Gebiet ist die zweite Randwertaufgabe bei $a = b = q = 0$ nicht lösbar, und für beide Gebiete ist das System der Eigenfunktionen unvollständig.

§ 9. Ergänzungen und Aufgaben.

Es sollen hier in einer weniger systematischen und nicht durchweg ausgeführten Form — zum Teil in Gestalt von Aufgaben — einige Hinweise auf Erweiterungen und Anwendungen der vorangehenden Theorie gegeben werden.

1. Die Greensche Funktion von Δu. In Kapitel IV haben wir unter Beschränkung auf spezielle Gebiete die Greensche Funktion für die erste Randbedingung konstruiert, wobei die Randwerte Null im präzisen Sinne angenommen werden sollten. Die Theorie von § 2 erlaubt nun die Konstruktion der Greenschen Funktion für einen beliebigen Bereich G, wenn wir die Randbedingung im Sinne dieses Kapitels formulieren. Wir betrachten z. B. den Fall von zwei unabhängigen Variablen. Es seien x, y die Koordinaten des Punktes P; der Punkt Q mit den Koordinaten sei ξ, η die vorgeschriebene singuläre Stelle der Greenschen Funktion, es sei $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ und g irgendeine Funktion aus $\mathfrak{D}$, welche in einem Randstreifen von G, d. h. jedenfalls in allen Punkten, welche vom Rande Γ einen hinreichend kleinen Abstand haben, mit $\frac{1}{2\pi}\log r$ übereinstimmt. Dann betrachten wir das Variationsproblem I aus § 2 mit $f = 0$. Ist w seine Lösung, so ist

$$K(P, Q) = -\frac{1}{2\pi}\log r + w$$

die gesuchte Greensche Funktion.

Wir können diese Greensche Funktion auch mit einer etwas verschiedenen, in anderen Fällen bequemer anwendbaren Methode konstruieren: Hierzu bilden wir die Funktion

$$\begin{aligned} T(r) &= -\frac{1}{2\pi}\left(\log\frac{r}{R} + \frac{3}{4} - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right) && \text{für } r \leqq R, \\ &= 0 && \text{für } r \geqq R, \end{aligned}$$

welche für $r = 0$ die für die Greensche Funktion vorgeschriebene Singularität besitzt, und für welche T, T_r für $r = R$ verschwindet sowie

$$\begin{aligned} f = \Delta T &= \frac{2}{\pi}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) && \text{für } r \leqq R, \\ &= 0 && \text{für } r \geqq R \end{aligned}$$

stetig ist.

Die Funktion f besitzt stückweise stetige erste Ableitungen in G und ist stetig in $G+\Gamma$, genügt also den Voraussetzungen bei unserem Problem I aus § 2. R sei so klein gewählt, daß der Kreis K_R mit dem Radius R um Q noch ganz zu G gehört. Dann betrachten wir das Variationsproblem mit $p=k=1$:

$$D[\varphi]-2H[f,\varphi]$$

zum Minimum zu machen, unter der Bedingung: φ in $\mathring{\mathfrak{D}}$. Die Lösung v, welche nach § 2 existiert und zu $\mathfrak{F}$ gehört, genügt der Differentialgleichung

$$\Delta v+f=\Delta v+\Delta T=0$$

und die Funktion

$$u=v+T$$

ist offenbar die gesuchte Greensche Funktion. Sie hängt von der speziellen Wahl des Radius R nicht ab; denn die Differenz zweier, zu verschiedenen Werten R_1 und R_2 gehörigen Funktionen u würde eine zu $\mathring{\mathfrak{D}}$ gehörige überall in G reguläre Lösung der Potentialgleichung sein, muß also zufolge § 2 identisch verschwinden.

Es sei daran erinnert, daß — für einfach zusammenhängende Gebiete G — die Konstruktion der Greenschen Funktion fast unmittelbar die konforme Abbildung von G auf den Einheitskreis liefert (vgl. Bd. **I**, S. 327).

Die zuletzt dargelegte Methode kann auch ebenso zur Konstruktion der Greenschen Funktion für die zweite Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu}=0$ benutzt werden.

Wir wählen hierzu für f die Funktion

$$f=\Delta T-c,$$

wobei die Konstante c so bestimmt wird, daß

$$\iint_G f\,dx\,dy=0$$

ist. Dann besitzt das Variationsproblem

$$D[\varphi]-2H[\varphi,f]$$

zum Minimum zu machen bei Zulassung aller Funktionen φ aus $\mathfrak{D}$, eine Lösung v aus $\mathfrak{F}$, so daß

$$\Delta v+\Delta T-c=0$$

ist und die Funktion

$$u=v+T+d$$

mit irgendeinem konstanten d genügt der Differentialgleichung

$$\Delta u=c,$$

ist also die gesuchte Greensche Funktion. Wir können sie, da d willkürlich ist, durch die Zusatzforderung

$$\iint_G u\,dx\,dy$$

eindeutig festlegen. Daß sie dann von dem gewählten Radius R nicht abhängt, erkennt man folgendermaßen: Für die in G zu $\mathfrak{F}$ gehörige Differenz $w = u_{R_1} - u_{R_2}$ von zwei solchen Funktionen, welche zu verschiedenen Radien R_1, R_2 gehören, ergibt sich

$$\Delta w = k, \quad k = c_{R_1} - c_{R_2} = \text{konst.}, \quad \iint w\,dx\,dy = 0.$$

Auf Grund der Greenschen Formel folgt

$$D[w] = -H[w, \Delta w] = -k \iint_G w\,dx\,dy = 0.$$

Also ist $w =$ konst. und daher wegen der Zusatzbedingung $w = 0$.

2. Dipolsingularität. Für die geometrische Funktionentheorie, insbesondere die Theorie der konformen Abbildung, sind von besonderer Wichtigkeit solche Potentialfunktionen, welche an einer gegebenen Stelle eine Singularität vom Charakter eines Dipoles haben und die zweite Randbedingung erfüllen[1]. Sind r und ϑ Polarkoordinaten um den Dipol, so ist die Singularität durch

$$\frac{1}{r}\cos\vartheta = \frac{x}{r^2}$$

dargestellt. Wir können diese Dipolpotentiale wiederum nach der Methode von Nr. 1 durch ein Variationsproblem charakterisieren und somit ihre Existenz aus der Theorie der vorangehenden Paragraphen schließen: Zunächst definieren wir eine Singularitätenfunktion

$$\begin{aligned} T(r) &= \left(\frac{R}{r} - 3\frac{r}{R} + 3\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \left(\frac{r}{R}\right)^5\right)\cos\vartheta \quad \text{für } r \leqq R, \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } r \geqq R, \end{aligned}$$

so daß sie außer bei $r = 0$ mit den Ableitungen zweiter Ordnung stetig ist. Die Funktion

$$\begin{aligned} f = \Delta T &= \frac{24}{R^3}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)x \quad \text{für } r \leqq R, \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{für } r \geqq R, \end{aligned}$$

für welche offenbar

$$\iint_G f\,dx\,dy = 0$$

gilt, ist stetig und hat stückweise stetige erste Ableitungen, erfüllt also alle Voraussetzungen, welche in § 6 gestellt wurden; somit besitzt das Variationsproblem:

$$D[\varphi] - 2H[f, \varphi]$$

[1] Vgl. Courant: Crelles Journ. Bd. 165, S. 249ff. und Hurwitz-Courant: Funktionentheorie, Teil III.

durch eine Funktion aus $\mathfrak{D}$ zum Minimum zu machen, eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte Lösung w. Die Funktion

$$u = w + T$$

ist die gesuchte Potentialfunktion. Zufolge der Bemerkungen in der folgenden Nr. 3 besitzt die zu u konjugierte Potentialfunktion v an jedem nicht punktförmigen stetigen Randstück konstante Randwerte.

Daß die Funktion u unabhängig vom Radius R ist, ergibt sich wiederum folgendermaßen: Die Differenz w zweier solcher Funktionen ist in G überall regulär, gehört zu $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{D}$ und erfüllt die Differentialgleichung $\Delta w = 0$ sowie die zweite Randbedingung. Daher ist wegen der Greenschen Formel

$$D[w] = 0,$$

also $w =$ konst., wie zu beweisen war.

Da R beliebig klein genommen werden darf, schließe man hieraus folgende, zusammen mit der Singularität $\frac{1}{r}\cos\vartheta$ die Funktion u kennzeichnende Eigenschaft: Ist ζ irgendeine in einer Umgebung von $r = 0$ verschwindende Funktion aus $\mathfrak{D}$, so gilt

$$D[u, \zeta] = 0.$$

3. Randverhalten bei $\Delta u = 0$ und zwei unabhängigen Veränderlichen für die zweite Randbedingung. Gehört f zu $\dot{\mathfrak{D}}$, so gibt es zu der Lösung von

$$\Delta u = -f$$

im Randstreifen S, wo $f = 0$ ist, eine konjugierte Potentialfunktion v.

Es gilt dann der Satz: Bei der zweiten Randbedingung besitzt die konjugierte Potentialfunktion v längs jeder zusammenhängenden nicht punktförmigen Randpunktmenge stetige, und zwar konstante Randwerte [1]. Für geradlinige oder kreisbogenförmige Randstücke gilt: Die Lösung u läßt sich durch Spiegelung über diese Randstücke hinaus analytisch fortsetzen, und auf diesen Randstücken mit der Bogenlänge s ist

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial s} = 0.$$

4. Stetige Abhängigkeit vom Gebiet. Die grundsätzlich wichtige Frage nach der stetigen Abhängigkeit der Lösungen von Randwertproblemen vom Gebiet kann im Falle der Differentialgleichung

$$\Delta u = -f$$

mit f in $\dot{\mathfrak{D}}$ und bei der zweiten Randbedingung durch folgenden Satz beantwortet werden. Es sei $G_1, G_2, \ldots, G_n$ eine Folge von Gebieten, welche monoton gegen das Gebiet G konvergieren, d. h. für welche G_n

---

[1] Zum Beweise vgl. COURANT: Crelles Journ. Bd. 165, S. 255 ff. bzw. HURWITZ-COURANT: Funktionentheorie, Abschnitt III.

in G_{n+1} und jeder Punkt von G in allen außer höchstens endlich vielen G_n liegt. Ist der Punkt O mit $r = 0$ allen Gebieten G_n gemeinsam, ist f eine Funktion aus $\mathfrak{D}_G$ und u_n die Lösung des Randwertproblems für G_n, die in O verschwindet, und die zweite Randbedingung erfüllt, ist endlich u die entsprechende Lösung für G, so ist

$$u = \lim_{n \to \infty} u_n$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig für jedes innere Teilgebiet von G.

Beweis[1]. Die Funktionen u_n sind Lösungen des Variationsproblems:

$$D_{G_n}[\varphi] - 2\,H_{G_n}[f, \varphi]$$

zum Minimum zu machen bei Zulassung von Funktionen φ aus $\mathfrak{D}_{G_n}$. Die Minima seien d_n. Entsprechend sei d das Minimum für das Gebiet G, u die zugehörige Lösung. Von einem gewissen n ab, sobald nämlich außerhalb G_n überall $f = 0$ gilt, haben wir offenbar für jede Funktion φ aus $\mathfrak{D}_G$

$$D_G[\varphi] - 2\,H_G[f, \varphi] \geqq D_{G_n}[\varphi] - 2\,H_{G_n}[f, \varphi];$$

also gilt dann

$$d_n \leqq d.$$

Andererseits erkennt man, daß die Funktionen $u_n - u_m$ für $m > n$ in G_n reguläre und beschränkte Potentialfunktionen sind. Hieraus entnimmt man leicht (vgl. Kap. IV, S. 249), daß sich eine Teilfolge u_n auswählen läßt, welche in jedem abgeschlossenen Teilgebiet G' von G gegen eine Grenzfunktion v konvergiert, so daß auch die ersten Ableitungen von u_n gegen die von v streben und die Konvergenz gleichmäßig ist. Daraus aber folgt für jedes Teilgebiet G'

$$D_{G'}[v] - 2\,H_G[f, v] \leqq \lim_{n \to \infty} \{D_{G_n}[u_n] - 2\,H_{G_n}[f, u_n]\} \leqq d,$$

also z. B. auch $D_{G_m}[v] - 2\,H_{G_m}[f, v] \leqq d$. Indem wir nun m gegen unendlich streben lassen, erhalten wir $D_G[v] - 2\,H_G[f, v] \leqq d$; somit liegt v in $\mathfrak{D}_G$, ist also zulässig, und die letzte Relation ist mit dem Minimumcharakter von d nur verträglich, wenn das Gleichheitszeichen gilt. Wir haben also

$$D_G[v] - 2\,H_G[f, v] = d$$

und somit ist $v = u$ die Lösung des Problems für G. Daß nicht nur eine Teilfolge u_n, sondern die Folge selbst gegen u strebt, folgt jetzt sofort aus der eindeutigen Bestimmtheit von u.

5. Übertragung der Theorie auf unendlich ausgedehnte Gebiete G.

Die Lösung der Rand- und Eigenwertprobleme läßt sich auch auf den Fall übertragen, daß G sich ins Unendliche erstreckt. Dabei müssen über

[1] Vgl. HURWITZ-COURANT: Funktionentheorie, 1931, S. 471 ff.

das Verhalten der Koeffizienten a, b, q im Unendlichen einschränkende Voraussetzungen gemacht werden. Wir fordern, daß

$$A(\xi, \eta, \zeta) = p(\xi^2 + \eta^2) + 2a\xi\zeta + 2b\eta\zeta + q\zeta^2 \geqq \varkappa(r)\zeta^2$$

gilt, wobei $\varkappa(r)$ eine mit r gegen Unendlich strebende Funktion von $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist. Offenbar strebt dann auch q mit r gegen Unendlich.

Alsdann besteht wieder die Hauptungleichung

$$H[\varphi] \leqq \gamma E[\varphi]$$

und der Rellichsche Auswahlsatz für Funktionen φ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$. Man beweise sie und führe mit ihrer Hilfe die Theorie der Rand- und Eigenwertprobleme bei der ersten Randbedingung durch.

Zur Behandlung des Randwert- bzw. Eigenwertproblemes bei der zweiten und dritten Randbedingung muß man die Natur des Gebietes G noch einschränken, um die Forderungen $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{R}$ aus §§ 6, 7 zu erfüllen. Wir fordern etwa, daß der Durchschnitt von G mit jedem endlichen Kreise von Typ $\mathfrak{N}$ ist. Man führe unter dieser Voraussetzung die Theorie durch.

Ein geläufiges Beispiel ist die Theorie des *harmonischen Oszillators*. Hier haben wir $p = 1$, $a = b = 0$, $q = c r^2$, wo c eine positive Konstante, das Gebiet die volle Ebene ist. Die Differentialgleichung des Eigenwertproblemes lautet

$$\Delta\varphi - c r^2 \varphi + \lambda\varphi = 0.$$

6. Anwendung der Methode auf Differentialgleichungen vierter Ordnung. Transversaldeformation und Schwingungen von Platten.

Zur Behandlung der Rand- und Eigenwertprobleme für den Differentialausdruck

$$\Delta\Delta u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$$

(vgl. Bd. I, S. 263 ff.) führe man neben den Räumen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$, $\mathring{\mathfrak{D}}$ noch die Räume $\mathfrak{K}$, $\dot{\mathfrak{K}}$, $\mathring{\mathfrak{K}}$ folgendermaßen ein: $\mathfrak{K}$ besteht aus allen einmal stetig, zweimal stückweise stetig differenzierbaren Funktionen φ aus $\mathfrak{D}$, für welche

$$K[\varphi] = \iint_G \{\varphi_{xx}^2 + 2\varphi_{xy}^2 + \varphi_{yy}^2\}\, dx\, dy$$

existiert.

$\dot{\mathfrak{K}}$ besteht aus allen φ in $\mathfrak{K}$, welche in einem Randstreifen identisch verschwinden. $\mathring{\mathfrak{K}}$ besteht aus allen Funktionen φ aus $\mathfrak{K}$, welche sich durch eine Folge φ^ν von Funktionen aus $\dot{\mathfrak{K}}$ so approximieren lassen, daß

$$H[\varphi^\nu - \varphi] \to 0, \quad D[\varphi^\nu - \varphi] \to 0, \quad K[\varphi^\nu - \varphi] \to 0$$

gilt.

Im Variationsproblem kann man an Stelle von K allgemein

$$K_\mu[\varphi] = (1 - \mu) K[\varphi] + \mu H[\Delta\varphi]$$

mit konstantem μ, $0 \leqq \mu < 1$, setzen, wobei der Eulersche Ausdruck unverändert bleibt, wohl aber die Randbedingungen, außer der ersten,

den Parameter μ enthalten. (In der Theorie der Platten bedeutet μ den Querdehnungskoeffizienten.) Die Durchführung der Lösung bleibt für alle Werte von μ dieselbe (auch für $\mu = 1$, bis auf die Feststellung der präzisen Annahme der Randwerte der Ableitungen).

Man beweise die Identität

$$K_\mu[\varphi] = K[\varphi]$$

für φ in $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Man beweise ferner die Hauptungleichungen

$$H[\varphi] \leqq \gamma D[\varphi] \leqq \gamma_1 K[\varphi]$$

mit konstanten γ und γ_1 sowie den Rellichschen Auswahlsatz für Funktionen φ aus $\mathring{\mathfrak{K}}$. Dabei besagt der Auswahlsatz, daß aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Integrale $K[\varphi^\nu]$, $D[\varphi^\nu]$ und $H[\varphi^\nu]$ die Möglichkeit einer Auswahl von Funktionen φ^ν mit $D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ und $H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0$ besteht. (Es wird sogar die Folge φ^ν selbst gleichmäßig konvergieren; siehe unten.)

Randwert- und Eigenwertproblem bei der ersten Randbedingung lassen sich nunmehr — bei Ersetzung von $\mathring{\mathfrak{D}}$ durch $\mathring{\mathfrak{K}}$ — ebenso formulieren und lösen wie in §§ 2, 3.

Bei der Durchführung übertragen sich alle Schlüsse aus §§ 2, 3, 5, 6, 7 mit Ausnahme von Satz 1 aus § 5, der eine Sonderbehandlung erfordert. Zunächst beachte man, daß hier eine Minimalfolge in jedem echten Teilgebiet G' von G gleichmäßig konvergiert, woraus sich die Konstruktion einer Grenzfunktion und Satz 1a von § 5 unmittelbar ergibt.

Um die zweimalige stetige Differenzierbarkeit der Grenzfunktion u nachzuweisen, wird man für u eine Integraldarstellung der Form (13) § 5 ableiten müssen. Hierzu verwende man an Stelle des Analogons der Funktion Ψ_R eine Funktion

$$\eta(r) \frac{1}{8\pi} r^2 \log r,$$

wo $\eta(r)$ eine hinreichend oft — etwa achtmal — stetig differenzierbare Funktion ist, welche für $r < \frac{R}{2}$ den Wert 1 hat und für $r > R$ verschwindet. Man führe die entsprechende Modifikation der Schlußweisen von 5, Nr. 1 durch[1].

[1] Das erste Randwertproblem der Platte wurde von der Variationsrechnung her zum ersten Male von G. Fubini gelöst. (Vgl. Il principio di minimo e i teoremi di existenza .... Rendiconti Palermo, 1907.) Sowohl Randwert- als auch Eigenwertproblem wurde von W. Ritz behandelt [Crelles Journal Bd. 135 (1909) und Ann. Physik 1909, sowie gesammelte Abhandlungen passim]. Vgl. im übrigen auch für andere Randbedingungen zur hier gegebenen Darstellung insbesondere K. Friedrichs: Math. Ann. Bd. 98 (1927) S. 206 f.

Daß die vorgeschriebenen Randwerte für u und die Ableitungen u_x, u_y tatsächlich exakt angenommen werden, folgt ähnlich wie in § 4; und zwar gelten jene Betrachtungen unmittelbar für die Funktion u selbst; da jedoch die Existenz von $D[\Delta\varphi]$ nicht feststeht, muß man sich für die Ableitungen auf eine leicht zu beweisende Ungleichung der folgenden Form stützen:

$$D_{K_h}[\Delta\varphi] \leqq c h^2 H_{K_{2h}}[\Delta\Delta\varphi] + \frac{c}{h^2} H_{K_{2h}}[\Delta\varphi],$$

wobei c eine Konstante ist und K_h, K_{2h} die in § 4 angegebene Bedeutung haben.

Die Behandlung der zweiten Randbedingung und dritten läßt sich entsprechend wie in §§ 6, 7, 8 bei beliebigem μ aus $0 \leqq \mu < 1$ durchführen.

7. Erste Randwert- und Eigenwertaufgabe der Elastizitätstheorie bei zwei Dimensionen. Die Theorie der elastischen Deformationen ist ein anderes Beispiel, für welches sich die ganze Theorie der §§ 1—5 fast ohne weiteres übertragen läßt. Nur die Überlegungen von § 5, Nr. 1 müssen modifiziert werden, da es sich hier um andere Singularitäten der Grundlösung handelt. Wir beschränken uns auf zwei Dimensionen, d. h. tangentiale Deformationen einer Platte. Zur Formulierung der Probleme ist es zweckmäßig, Abkürzungen einzuführen.

Wir bezeichnen (statt x, y) Punkte x_1, x_2 einfach mit x, schreiben für Doppelintegrale $\iint \ldots dx_1\,dx_2 = \int \ldots dx$ und für ein System von zwei Funktionen $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ einfach $\varphi(x) = \{\varphi_1(x_1\, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)\}$; ferner für die Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_\beta} = \varphi_{\alpha,\beta}.$$

Wir betrachten wiederum einen offenen Bereich G mit dem Rande Γ und in ihm die beiden quadratischen Formen

$$H[\varphi] = \int_G \{\varphi_1^2 + \varphi_2^2\}\, dx,$$

$$D[\varphi] = \int_G \{\varphi_{1,1}^2 + \varphi_{1,2}^2 + \varphi_{2,1}^2 + \varphi_{2,2}^2\}\, dx.$$

Die Räume $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\dot{\mathfrak{D}}$, $\mathring{\mathfrak{D}}$ sind ebenso definiert wie in § 1. Der Deformationsvektor der über G ausgebreiteten Platte sei $\varphi(x)$; er liege in $\mathfrak{D}$. Am Rande Γ sei eine Deformation gegeben durch ein Funktionssystem $g(x)$ derart, daß verlangt wird:

$$\varphi - g \text{ liege in } \mathring{\mathfrak{D}}.$$

Die doppelte potentielle Energie der Deformation φ ist mittels zweier positiver Elastizitätskonstanten a, b durch

$$E[\varphi] = \int \{a(\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2 + a(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2 + b(\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2\}\, dx$$

gegeben.

Der zu $E[\varphi]$ gehörige Variationsausdruck ist bis auf den Faktor 2 für einen Funktionsvektor $\varphi(x)$ mit stückweise stetigen zweiten Ableitungen

$$L[\varphi] = \{a\,\Delta\,\varphi_1 + b(\varphi_{1,11} + \varphi_{2,21}), \quad a\,\Delta\,\varphi_2 + b(\varphi_{1,12} + \varphi_{2,22})\}.$$

Er drückt die Dichte der Kräfte aus, welche durch die Deformation entstehen, und ist selbst wieder ein Funktionsvektor.

Nun gilt der Satz: Zu gegebenem g in $\mathring{\mathfrak{D}}$ existiert ein Deformationsvektor u in $\mathfrak{D}$, so daß $u - g$ in $\mathring{\mathfrak{D}}$ liegt, daß u stückweise stetige zweite Ableitungen besitzt, daß

$$L[u] = 0$$

und daß

$$E[\varphi] > E[u]$$

gilt für $\varphi \neq u$ in $\mathfrak{D}$ und $\varphi - g$ in $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Zum Beweise stützt man sich zunächst auf die Greensche Formel: für ψ in $\mathring{\mathfrak{D}}$, φ in $\mathfrak{D}$, $L[\varphi]$ in $\mathfrak{H}$ gilt

$$E[\varphi, \psi] = H[L[\varphi], \psi],$$

wie man zunächst für ψ in $\dot{\mathfrak{D}}$ und nachträgliches Abschließen beweist.

Weiterhin besteht genau wie in § 2 wieder eine Hauptungleichung der Form:

$$H[\varphi] \leqq \gamma E[\varphi], \tag{1}$$

gültig für alle φ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$.

Der Beweis dieser Hauptungleichung ergibt sich im folgenden Zusammenhange: Zunächst stellen wir eine Identität auf, welche die Integrale der drei in $E[\varphi]$ vorkommenden Ausdrücke $(\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2$, $(\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2$, $(\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2$ mit dem Integral des vierten Ausdruckes $(\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1})^2$ zum Ausdruck $D[\varphi]$ zusammensetzt:

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_G \{(\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2 + (\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2 + (\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2 + \\ &\qquad + (\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1})^2\}\,dx = 2D[\varphi]. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Aus ihr folgt sofort: Ist $2c$ die größere der beiden Zahlen a und b, so gilt für alle φ aus $\mathfrak{D}$

$$E[\varphi] \leqq c\,D[\varphi]. \tag{3}$$

Weiter benutzen wir die Identität

$$\begin{aligned} &\int_G \{\varphi_{1,1} - \varphi_{2,2})^2 + (\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1})^2 - (\varphi_{1,1} + \varphi_{2,2})^2 - \\ &\qquad - (\varphi_{1,2} - \varphi_{2,1})^2\}\,dx = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Sie gilt für alle φ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$. Zunächst beweise man (4) für φ aus $\dot{\mathfrak{D}}$. Die linke Seite von (4) ist

$$= -2\int_G \{\varphi_{1,1}\,\varphi_{2,2} - \varphi_{1,2}\,\varphi_{2,1}\}\,dx = -2\int_\Gamma \varphi_1\,d\,\varphi_2 = 0,$$

weil der Integrand die Funktionaldeterminante der im Randstreifen verschwindenden Funktionen φ_1, φ_2 ist. Durch Abschließen erweitert man den Gültigkeitsbereich von $\dot{\mathfrak{D}}$ auf $\mathring{\mathfrak{D}}$. Sodann folgt unmittelbar aus (2) und (4) sowie der Definition von $E[\varphi]$ für φ in $\mathring{\mathfrak{D}}$ die Ungleichung

$$a\, D[\varphi] \leqq E[\varphi] \tag{5}$$

und aus ihr (1) wegen der früheren Hauptgleichung aus § 2.

Nunmehr betrachten wir eine Minimalfolge φ^ν des Variationsproblemes:

$$E[\varphi]$$

zum Minimum zu machen mit Funktionssystemen φ aus $\mathfrak{D}$, für welche $\varphi - g$ in $\mathring{\mathfrak{D}}$ liegt. Genau wie in § 2 ergibt sich für alle Systeme ζ aus $\mathring{\mathfrak{D}}$

$$E[\varphi^\nu, \zeta] \to 0$$

und auf Grund von (5) und (1)

$$D[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0, \quad H[\varphi^\nu - \varphi^\mu] \to 0.$$

Die Übertragung der weiteren Schlüsse aus § 2 beruht einmal auf Satz 2 aus § 5, der hier unverändert gilt. Sowie auf Satz 1 aus § 5, dessen Beweis sich hier mit der Methode aus Nr. 8 dieses Ergänzungsparagraphen erbringen läßt. Man führe den Beweis durch, indem man an Stelle der Singularitätenfunktion $\log r$ den folgenden Grundlösungstensor benutzt:

$$\begin{pmatrix} \alpha \log r - \beta \dfrac{y_1^2}{r^2}, & \beta \dfrac{y_1 y_2}{r^2} \\ -\beta \dfrac{y_1 y_2}{r^2}, & \alpha \log r - \beta \dfrac{y_2^2}{r^2} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\alpha = \frac{a+b}{\left(\frac{a}{2}+b\right)}, \qquad \beta = \frac{b}{a\left(\frac{a}{2}+b\right)}$$

mit $y_i = x_i - x_i^0$, $r^2 = y_1^2 + y_2^2$ gesetzt ist.

Man führe ferner die Eigenwerttheorie des Differentialgleichungsproblemes $L[u] + \lambda u$ mit erster Randbedingung durch. Ebenso zeige man, daß die Aussagen über die Annahme der vorgeschriebenen Randwerte aus § 4 hier ebenfalls gelten.

Eine weitere Aufgabe ist die Übertragung der Methode auf drei Dimensionen.

8. Andere Methode zur Konstruktion der Grenzfunktion. Die Methode zur Konstruktion der Grenzfunktion aus § 5 und zum Beweise des Satzes 1a in § 5 beruht wesentlich auf der explizit bekannten Gestalt der charakteristischen Singularität für die Grundlösungen des Differentialausdruckes Δu. Wir wollen hier kurz eine andere Methode skizzieren, welche formal weniger einfach erscheint, sich jedoch auch auf solche

Fälle übertragen läßt, wo die Singularität der Grundlösung komplizierter ist (vgl. das Beispiel aus der Elastizitätstheorie in der vorangehenden Nummer 7). Es genügt, die Methode für den in § 5 behandelten Fall darzustellen. Das Wesentliche dabei ist einmal die Konstruktion einer Grenzfunktion und sodann für sie die Gewinnung einer Integraldarstellung, aus welcher sich die gewünschten Differenzierbarkeitseigenschaften ergeben.

Wir führen mit $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ eine Funktion $\eta(r)$ ein, welche viermal stetig differenzierbar ist und für welche

$$\begin{aligned} \eta(r) &= 0 \quad \text{für } r \geqq R \\ &= 1 \quad \text{für } r \leqq \frac{R}{2} \end{aligned}$$

gilt. Dann setzen wir

$$S(x_0, y_0;\ x, y) = \eta(r) \frac{1}{2\pi} \log r.$$

Diese vom Parameterpunkt x_0, y_0 abhängige *„Parametrixfunktion"* S gehört als Funktion von x, y zu $\mathfrak{H}$, aber nicht zu $\mathfrak{D}$, obwohl sie stetige erste Ableitungen außer bei $x = x_0$, $y = y_0$ besitzt. Dagegen ist $\Delta\varphi$, wobei sich die Differentiation auf x, y bezieht, wieder eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in G.

Mit G_R sei wieder das Gebiet aller Punkte x_0, y_0 bezeichnet, für welche der Kreis $r \leqq R$ ganz im Inneren von G liegt. Für x_0, y_0 aus G_R verschwindet S samt Ableitungen in einem Randstreifen. Mit ζ_{2R} wollen wir stets eine Funktion bezeichnen, die außerhalb G_{2R} identisch verschwindet.

Wir führen nun mittels der Funktion φ folgende drei Operationen ein:

$$\begin{aligned} U[\varphi] &= \iint_G S(x, y; x_1, y_1)\, \varphi(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1 \\ &= \iint_G \varphi(x_0, y_0)\, S(x_0, y_0;\ x, y)\, dx_0\, dy_0 \end{aligned}$$

$$V[\varphi] = \iint_G \{S_{x_1}(x, y;\ x_1, y_1)\varphi_{x_1}(x_1, y_1) + S_{y_1}(x, y;\ x_1, y_1)\varphi_{y_1}(x_1, y_1)\}\, dx_1\, dy_1$$

$$W[\varphi] = \iint_G \Delta_1\, S(x, y; x_1, y_1)\, \varphi(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1,$$

wo der Index 1 in Δ_1 bedeutet, daß sich die Operation Δ auf die Variablen x_1, y_1 bezieht. Diese Operationen erzeugen aus Funktionen φ aus $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ in G_R definierte Funktionen, welche zum Raume $\mathfrak{D}_{G'}$, bzw. $\mathfrak{H}_{G'}$, bzw. $\mathfrak{D}_{G'}$ für jedes abgeschlossene Teilgebiet G' von G gehören. Dies ist ohne weiteres ersichtlich, wenn für die Operationen U und W die Funktion φ stetig, für die Operation V stetig differenzierbar ist; dann sind die erzeugten Funktionen selbst stetig differenzierbar bzw. stetig. Man zeige sodann, daß sie stückweise stetig differenzierbar bzw. stückweise stetig bleiben, wenn für φ nur stückweise Stetigkeit bzw. stückweise stetige Differenzierbarkeit

vorausgesetzt wird, und gewinne schließlich die obige Behauptung. Verschwindet φ außerhalb G_{2R}, so sind diese Funktionen im ganzen Gebiet G definiert und verschwinden außerhalb G_R, gehören also bzw. zu $\dot{\mathfrak{D}}$, $\dot{\mathfrak{H}}$, $\dot{\mathfrak{D}}$.

Man beweise für unsere Operationen die folgenden Identitäten:

1. Für φ in $\mathfrak{H}$, ζ_{2R} in $\dot{\mathfrak{H}}$

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, U[\varphi]] = H[U[\zeta_{2R}], \varphi]. \tag{1}$$

2. Für φ in $\mathfrak{D}$, ζ_{2R} in $\dot{\mathfrak{D}}$

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, V[\varphi]] = D[U[\zeta_{2R}], \varphi]. \tag{2}$$

Diese Identitäten drücken lediglich Integrationsvertauschungen aus.

3. Für φ aus $\mathfrak{F}$ gilt

$$V[\varphi] = -U[\Delta\varphi],$$

wie man durch partielle Integration erkennt.

4. Für φ aus $\mathfrak{D}$ gilt die Darstellungsformel

$$\varphi = V[\varphi] - W[\varphi], \tag{4}$$

die sich durch Integration über Gebiete ergibt, welche durch Ausschluß von Kreisen $r < \varepsilon$ entstehen, wenn man dann den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ vornimmt.

Es sei nun φ^ν eine Folge, welche den Voraussetzungen des Satzes 1 aus § 5 genügt. Dann ordnen wir ihr die Folge

$$\bar{\varphi}^\nu = U[f - q^*\varphi^\nu] - W[\varphi^\nu] \tag{5}$$

zu. Man zeige, daß sie gleichmäßig in G_R gegen eine dort stetige Grenzfunktion u strebt. Mit dieser Funktion u gilt dann:

Satz 1a. Für ζ_{2R} aus $\dot{\mathfrak{H}}$ ist

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - u] \to 0. \tag{6}$$

Es genügt offenbar

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu] \to 0$$

nachzuweisen. Nun ist nach (4)

$$\varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu = V[\varphi^\nu] - U[f - q^*\varphi^\nu],$$

also nach (2) und (1)

$$H_{G_R}[\zeta_{2R}, \varphi^\nu - \bar{\varphi}^\nu] = D[U[\zeta_{2R}], \varphi^\nu] - H[U[\zeta_{2R}, f - q^*\varphi^\nu].$$

Da $U[\zeta_{2R}]$ aber zu $\dot{\mathfrak{D}}$ gehört, strebt die rechte Seite nach Voraussetzung (10) von § 5 gegen Null; damit gilt (6) und Satz 1a ist bewiesen.

Setzen wir in Satz 1a

$$\zeta_{2R} = \Delta\,\varphi(x_0, y_0; x, y) \quad \text{bzw.} \quad \zeta_{2R} = q^*(x, y)\, S(x_0, y_0; x, y),$$

so entsteht mit x_0, y_0 in G_{3R}

$$W[\varphi^\nu] \to W[u], \quad U[q^*\varphi^\nu] \to U[q^* u]$$

oder nach (5)

$$\bar{\varphi}^\nu \to U[f - q^* u] - W[u].$$

D. h. für u besteht in G_{3R} die Darstellung

$$u = U[f - q^* u] - W[u]. \tag{7}$$

Aus ihr schließe man die Sätze 1b und 1c, d. h. zweimalige stetige Differenzierbarkeit von u und die Relation $\Delta u - q^* u = -f$, somit den Satz 1 aus § 5[1].

§ 10. Das Problem von Plateau.

In diesem letzten Paragraphen wollen wir eine Lösung des schon früher (Kap. III, § 7, S. 174 und § 2, S. 134) formulierten Plateauschen Problemes auf Grund von Variationsmethoden geben. Dabei wird von den vorangehenden Ausführungen dieses vorliegenden Kapitels nur die in § 1, Nr. 1 bewiesene elementare Minimumeigenschaft der Potentialfunktion für den Kreis benutzt[2].

1. Problemstellung und Ansatz zur Lösung. Wir definieren entsprechend den Ausführungen in Kap. III, § 2 und 7 eine Minimalfläche im Raume der rechtwinkeligen Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ oder des Ortsvektors $\mathfrak{x}$ als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, welche durch zwei Parameter u, v folgendermaßen dargestellt werden kann: Im Variabilitätsbereich B der u, v-Ebene seien die Koordinaten x_j reguläre Potentialfunktionen von u und v:

$$\Delta x_j = 0$$

oder kurz

$$\Delta \mathfrak{x} = 0, \tag{1}$$

welche zudem noch den Bedingungen

$$E - G = 0, \quad F = 0 \tag{2}$$

mit

$$E = \mathfrak{x}_u^2 = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u}\right)^2, \quad G = \mathfrak{x}_u^2 = \sum_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial v}\right)^2, \quad F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}$$

genügen.

[1] Vgl. zu dieser Methode u. a. COURANT: Math. Ann. Bd. 97.

[2] Die erste allgemeine Lösung des Plateauschen Problemes wurde 1932 unabhängig von J. DOUGLAS und T. RADÓ gegeben. Literatur siehe vor allem bei RADÓ: On the problem of Plateau. Erg. Math. Bd. 2. 1933, und DOUGLAS: Bull. Amer. math. Soc. 1933, S. 227ff. Die vorliegende Darstellung beruht auf den Abhandlungen von R. COURANT: Nat. Ac. Sci. Wash., Juni 1936, S. 368ff. und Ann. Math. Bd. 38 (1937) S. 679ff.

DOUGLAS geht von einem neuartigen Minimumproblem für ein Funktional aus, welches das Dirichletsche Integral unter Beschränkung auf Potentialfunktionen durch ein Randintegral ausdrückt, während hier ohne diese Beschränkung das Dirichletsche Integral selbst als Grundlage dient. RADÓ benutzt konforme Abbildung von Polyedern als wesentliches Hilfsmittel.

Für $m = 3$ ist dies die in Kap. III gegebene Definition. Unsere Bedingungen drücken aus, daß der Bereich B der u, v-Ebene auf die Minimalfläche konform abgebildet ist; speziell für $m = 2$ handelt es sich einfach um die konforme Abbildung von B auf einen ebenen Bereich der x_1, x_2-Ebene.

Setzt man

$$w = u + iv$$

so ist

$$x_j = \Re f_j(w) \tag{3}$$

der Realteil einer in B analytischen Funktion $f_j(w)$. Die Bedingungen (2) drücken für die analytische Funktion von w

$$\varphi(w) = (E - G) - 2iF = \sum f_j'(w)^2 \tag{4}$$

die Forderung aus:

$$\varphi(w) = 0. \tag{5}$$

Das Problem von PLATEAU in der einfachsten Form — die wir hier allein behandeln wollen — verlangt nun, eine Minimalfläche zu konstruieren, welche von einer vorgegebenen doppelpunktfreien stetigen Kurve Γ des $\mathfrak{x}$-Raumes berandet wird. Mit anderen Worten, es wird gefordert, den Potentialvektor $\mathfrak{x}$ gemäß (1) und (2) so zu bestimmen, daß durch ihn der Rand des Gebietes B stetig auf die Kurve Γ abgebildet wird.

Als Gebiet B wählen wir den Einheitskreis $u^2 + v^2 < 1$ mit dem Rand C:

$$u^2 + v^2 = 1$$

und den Polarkoordinaten r, ϑ. Es wird somit gefordert, daß der Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(r, \vartheta)$ für $r = 1$ eine stetige Abbildung von C auf Γ vermittelt, wobei selbstverständlich verschiedene Punkte von Γ Bilder verschiedener Punkte auf C sind, die Abbildung von C auf Γ also „monoton" ist[1].

Wir betrachten zur Orientierung zunächst den Spezialfall $m = 2$. Das Problem wird hier gleichbedeutend mit dem der konformen Abbildung des Einheitskreises B auf das durch Γ begrenzte einfach zusammenhängende Gebiet G der x_1, x_2-Ebene. Um die Lösung dieser Aufgabe zu kennzeichnen, kann man mit RIEMANN von dem folgenden Variationsproblem ausgehen:

Es seien $x = x_1(u, v)$, $y = x_2(u, v)$ zwei im abgeschlossenen Einheitskreis $u^2 + v^2 \leqq 1$ stetige und im Inneren mit stückweise[2] stetigen Ableitungen versehene Funktionen, so daß durch dieses Funktionenpaar, — bzw. den Ortsvektor $\mathfrak{x}(u, v)$ mit den Komponenten x_1 und x_2 — der

[1] Eindeutige Umkehrbarkeit der Abbildung wird nicht ausdrücklich im Problem gefordert — ergibt sich vielmehr als Konsequenz von selbst (vgl. z. B. COURANT, Ann. of Math. Bd. 38, S. 696).

[2] Vgl. Fußnote auf S. 473.

Einheitskreis B auf das Gebiet G abgebildet wird, wobei der Rand C des Einheitskreises stetig in den Rand Γ von G übergeht. Dann soll das Integral

$$\iint_B \{(x_u - y_v)^2 + (x_v + y_u)^2\}\, du\, dv \tag{6}$$

durch passende Wahl des Funktionenpaars x, y bzw. des Vektors $\mathfrak{x}(u, v)$ zum Minimum gemacht werden. Für dasjenige Funktionenpaar, welches eine konforme Abbildung von B auf G liefert, also die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, wird offenbar das Minimum, nämlich der Wert Null, erreicht.

Wir können den Integranden in (1) in der Form schreiben

$$x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 - 2(x_u y_v - x_v y_u).$$

Beachten wir nun, daß das Integral des zweiten Bestandteiles den doppelten Flächeninhalt des Gebietes G darstellt, also von der speziellen Wahl des Vektors $\mathfrak{x}$ unabhängig bekannt ist, so erkennen wir, daß wir statt des obigen Variationsproblems auch das äquivalente setzen können: Unter den obigen Bedingungen soll das „Dirichletsche Integral"

$$D[\mathfrak{x}] = \iint_B (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2)\, du\, dv$$

zum Minimum gemacht werden. Die Lösung dieses Minimumproblems muß, wenn wir für den Augenblick die Möglichkeit der konformen Abbildung als bekannt ansehen, durch einen Potentialvektor $\mathfrak{x}$ mit

$$\Delta \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_{vv} = 0 \tag{7}$$

geliefert werden, welcher außerdem wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen noch die Konformitätsbedingungen

$$\mathfrak{x}_u^2 - \mathfrak{x}_v^2 = E - G = 0 \qquad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = F = 0 \tag{8}$$

erfüllt.

An diesem letzten Variationsproblem ist das Eigentümliche, daß die Eulersche Differentialgleichung die Gleichung (7) ist. Die geforderte Randabbildung von C in Γ entspricht einer festen Relation zwischen den Randwerten von x und y, und der bei der Randabbildung verbleibende Freiheitsgrad muß seinen Ausdruck in einer weiteren „natürlichen" Randbedingung finden, die mit den Zusatzbedingungen (8) äquivalent ist.

In der Tat haben diese Zusatzbedingungen nur scheinbar den Charakter von zwei neuen, für das ganze Gebiet G geforderten Bedingungen (vgl. Kap. III, § 2). Da nämlich für jeden Potentialvektor $\mathfrak{x}$ der Ausdruck (4) eine analytische Funktion der komplexen Variablen

$$w = u + iv$$

ist, so genügt es z. B., das Verschwinden des Realteils dieser Funktion am Rande zu fordern, um damit, abgesehen von einer additiven Konstanten, das identische Verschwinden von $\varphi(w)$ und damit die Bedingung (2) im ganzen Gebiet zu sichern.

Diese Bemerkung legt es nun nahe, den Zusammenhang umzukehren und dann nicht nur den Riemannschen Abbildungssatz von dem eben formulierten Variationsproblem anzugreifen, sondern sofort das folgende ganz entsprechende Variationsproblem für einen Vektor $\mathfrak{x}(u, v)$ mit m Komponenten $x_i(u, v)$ $(i = 1, \ldots m)$ zu betrachten:

Im Einheitskreis B der u, v-Ebene betrachten wir Vektoren $\mathfrak{x}$ mit den m Komponenten $x_i(u, v)$, welche im Inneren des Einheitskreises stückweise stetige Abbildungen haben, im abgeschlossenen Einheitskreis $B + C$ stetig sind und den Rand C des Einheitskreises auf eine vorgeschriebene Kurve Γ des m-dimensionalen $\mathfrak{x}$-Raumes stetig abbilden. Unter diesen Vektoren ist ein solcher gesucht, für welchen das Dirichletsche Integral

$$D[\mathfrak{x}] = \iint_B (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2)\, du\, dv$$

einen Minimumwert d annimmt.

Wir werden im folgenden zeigen, daß dieses Variationsproblem eine Lösung besitzt, und daß diese Lösung durch einen Potentialvektor $\mathfrak{x}$ mit $\Delta \mathfrak{x} = 0$ gegeben wird, welcher außerdem noch die Bedingungen (4) befriedigt. Somit werden wir durch Behandlung unseres Variationsproblems das Plateausche Problem der Bestimmung einer einfach zusammenhängenden, d. h. als stetiges Bild der Kreisscheibe definierten, Minimalfläche zu gegebener Berandung Γ lösen. Wir machen dabei noch ausdrücklich die Voraussetzung, daß unser Variationsproblem sinnvoll ist, d. h., daß zu der vorgeschriebenen Berandung Vektoren $\mathfrak{x}$ mit endlichem Dirichletschen Integral existieren, was z. B. bei stückweise glattem Rand Γ der Fall ist.

2. Beweis der Variationsrelationen. Wir zeigen zunächst: Unter der Voraussetzung, daß das Variationsproblem durch einen Vektor $\mathfrak{x}(u, v)$ gelöst wird, müssen für diesen Vektor die eine Minimalfläche charakterisierenden Bedingungen (1) und (2) gelten. Dabei stützen wir uns auf die elementare Tatsache (§ 1, Nr. 1), daß die Lösung der Randwertaufgabe der Potentialtheorie für einen Kreis gleichzeitig auch das Dirichletsche Minimumproblem löst und die einzige Lösung dieses Problemes ist.

Aus dieser Tatsache folgt durch Anwendung auf jede einzelne Komponente x_j, daß die Lösung unseres Variationsproblems ein Potentialvektor $\mathfrak{x}$ sein muß, d. h., daß die Gleichung (1) besteht. Die eigentliche Schwierigkeit besteht in der Gewinnung der Bedingung (2). Zu diesem Zweck nutzen wir den Minimumcharakter des Potentialvektors $\mathfrak{x}$ aus,

indem wir im Einheitskreis B konzentrische Polarkoordinaten r, ϑ einführen, und den Minimalvektor $\mathfrak{x}(r, \vartheta)$ durch einen anderen variierten Vektor $\mathfrak{z}(r, \vartheta)$ ersetzen, den wir folgendermaßen definieren

$$\mathfrak{z}(r, \vartheta) = \mathfrak{x}(r, \varphi)$$

mit

$$\varphi = \vartheta + \varepsilon \lambda(r, \vartheta).$$

Dabei ist $\lambda(r, \vartheta)$ eine in einer Umgebung von $r = 0$ identisch verschwindende, sonst willkürliche Funktion mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen im abgeschlossenen Einheitskreis, ε ein kleiner Parameter. Da offenbar $\mathfrak{z}$ die Zulassungsbedingungen unseres Variationsproblems befriedigt, so gilt

$$D[\mathfrak{z}] \geqq d.$$

Nun können wir das Integral $D(\mathfrak{z})$ folgendermaßen ausdrücken, indem wir r und φ an Stelle von r und ϑ als unabhängige Veränderliche einführen

$$\begin{aligned}
D[\mathfrak{z}] &= \iint_B (\mathfrak{z}_u^2 + \mathfrak{z}_v^2)\, du\, dv = \int_0^1\!\!\int_0^{2\pi} \left(\mathfrak{z}_r^2 + \frac{1}{r^2}\mathfrak{z}_\vartheta^2\right) r\, dr\, d\vartheta \\
&= \int_0^1\!\!\int_0^{2\pi} \left\{ (\mathfrak{x}_r + \varepsilon \lambda_r \mathfrak{x}_\varphi)^2 + \frac{1}{r^2}(1 + \varepsilon\lambda_\vartheta)^2 \mathfrak{x}_\varphi^2 \right\} \frac{1}{1 + \varepsilon\lambda_\vartheta}\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^1\!\!\int_0^{2\pi} \left(\mathfrak{x}_r^2 + \frac{1}{r^2}\mathfrak{x}_\varphi^2\right) r\, dr\, d\varphi \\
&\quad + \varepsilon \int_0^1\!\!\int_0^{2\pi} \left\{ 2\,\mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_\varphi \lambda_r + \left(\frac{\mathfrak{x}_\varphi^2}{r^2} - \mathfrak{x}_r^2\right)\lambda_\vartheta \right\} r\, dr\, d\varphi \\
&\quad + \varepsilon^2 R\,.
\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist gleich d. Der Koeffizient R von ε^2 bleibt, wie man leicht mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung erkennt, beschränkt in ε, da er wegen der Beschränktheit von λ_r, λ_ϑ unmittelbar mittels $D[\mathfrak{x}] = d$ abgeschätzt werden kann. Daher erhalten wir wegen $D[\mathfrak{z}] \geqq d$ durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ und $\varphi \to \vartheta$

$$\lim \int_0^1\!\!\int_0^{2\pi} \left\{ 2\,\mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_\varphi \lambda_r + \left(\frac{\mathfrak{x}_\varphi^2}{r^2} - \mathfrak{x}_r^2\right)\lambda_\vartheta \right\} r\, dr\, d\vartheta = 0$$

oder, da der Bestandteil dieses Doppelintegrales, welcher von einem Randstreifen $t \leqq r \leqq 1$ abhängt, mit $1 - t$ gleichmäßig in ε gegen Null strebt und in dem anderen Bestandteil der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf,

$$\lim_{t \to 1} \int_0^t\!\!\int_0^{2\pi} \left\{ 2\,\mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_\vartheta \lambda_r + \left(\frac{\mathfrak{x}_\vartheta^2}{r^2} - \mathfrak{x}_r^2\right)\lambda_\vartheta \right\} r\, dr\, d\vartheta = 0.$$

Diese Gleichung transformiert sich mit Hilfe der üblichen Produktintegration auf Grund der Gültigkeit der Potentialgleichung $\Delta \mathfrak{x} = 0$ für das Innere in die Limesrelation für den Rand

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \lambda(r, \vartheta)\, r\, \mathfrak{x}_r\, \mathfrak{x}_\vartheta\, d\vartheta = 0,$$

wobei t wieder durch r ersetzt ist.

Nun gilt mit der oben in (4) eingeführten analytischen Funktion $\varphi(w) = (E - G) - 2iF$, wie eine einfache Rechnung zeigt, die Beziehung

$$(9) \qquad 2r\, \mathfrak{x}_r\, \mathfrak{x}_\vartheta = \Im(w^2 \varphi(w)),$$

wobei mit dem Symbol $\Im$ der imaginäre Anteil bezeichnet wird. Es ist also, da auch $w^2 \varphi(w)$ eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $u + iv$ ist, der Ausdruck

$$2r\, \mathfrak{x}_r\, \mathfrak{x}_\vartheta = p(r, \vartheta) = p(u, v)$$

eine Potentialfunktion in B, welche mit willkürlichem in $B + C$ zweimal stetig differenzierbarem $\lambda(r, \vartheta)$ die Relation

$$(10) \qquad \lim_{r \to 1} \int^{2\pi} \lambda(r, \vartheta)\, p(r, \vartheta)\, d\vartheta \to 0$$

erfüllt.

Da nun der Wert der Potentialfunktion

$$p(\varrho, \varphi)$$

in irgendeinem festen inneren Punkt von B mit den Koordinaten ϱ, φ eine lineare Kombination der Form (10) ist, so schließen wir, daß p in B identisch verschwindet. Genauer: wir wählen für λ eine Funktion, welche in der Nachbarschaft von Q identisch verschwindet, und für r hinreichend nahe an 1 mit der normalen Ableitung der Greenschen Funktion für den konzentrischen Kreis und Q als Singularität identisch ist, d. h. mit

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{r^2 - 2r\varrho\cos(\varphi - \vartheta) + \varrho^2}.$$

Dann wird aus der Gleichung (10) unmittelbar $\lim_{r \to 1} p(\varrho, \varphi) = 0$, d. h. es ist $\Im(w^2 \varphi(w)) = p(u, v) = 0$ identisch in B.

Hieraus folgt, daß auch der reelle Teil der analytischen Funktion $w^2 \varphi(w)$ konstant in B ist, und daher

$$w^2 \varphi(w) = c = \text{konst.}$$

oder

$$\varphi(w) = \frac{c}{w^2}.$$

Da nun die analytische Funktion $\varphi(w)$ im Punkt $w = 0$ regulär ist, muß $c = 0$ oder

$$\varphi(w) = 0$$

sein, womit der gewünschte Beweis für die Relation (4) geliefert ist.

3. Existenz der Lösung des Variationsproblems. Es bleibt zu beweisen, daß unser ursprüngliches Variationsproblem eine Lösung $\mathfrak{x}$ besitzt. Zur Konstruktion dieser Lösung betrachten wir eine Minimalfolge $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ von zulässigen Vektoren, d. h. eine Folge, für welche

$$\lim_{\nu \to \infty} D[\mathfrak{x}_\nu] = d$$

gilt. Indem wir jeden dieser Vektoren durch einen Potentialvektor mit denselben Randwerten ersetzen, erhalten wir auf Grund des Dirichletschen Prinzips für einen Kreis erst recht eine Minimalfolge.

Ferner machen wir die folgende Bemerkung: *Das Dirichletsche Integral ist invariant gegen konforme Abbildung.* D. h., wird durch zwei Funktionen $u = u(u', v')$ und $v = v(u', v')$ der Bereich B konform auf einen Bereich B' abgebildet, so gilt für jeden Vektor $\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{x}'(u', v')$

$$\iint_B (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2)\, du\, dv = \iint_{B'} (\mathfrak{x}'^2_{u'} + \mathfrak{x}'^2_{v'})\, du'\, dv'.$$

Dies folgt sofort zufolge der für Konformität charakteristischen Relationen $u'_u = v'_v$, $u'_v = -v'_u$.

Nun kann man stets durch eine konforme — lineare — Transformation des Einheitskreises in sich irgend drei Punkte auf der Peripherie in drei feste Punkte überführen. Da bei einer solchen Abbildung der Integralwert $D(\mathfrak{x}) = D(\mathfrak{x}')$ erhalten bleibt, so dürfen wir also in unserem Variationsproblem, ohne die untere Grenze d zu ändern, die Zusatzbedingung stellen, daß drei vorgegebene Punkte auf C in drei vorgegebene Punkte auf Γ übergehen. Nunmehr stellen wir eine solche Dreipunktebedingung, welche für die vorangehenden Überlegungen unnötig war, und erbringen dann den Existenzbeweis, indem wir zeigen: *Die Randwerte der Vektoren $\mathfrak{x}_\nu$ bilden eine Folge gleichgradig stetiger Funktionen des Winkels ϑ.*

Ist dies gezeigt, so kann man nämlich nach Bd. I, Kap. II, § 2 eine solche Teilfolge der Vektoren $\mathfrak{x}_\nu$ auswählen, für welche die Randwerte gleichmäßig gegen einen Grenzvektor konvergieren. Das Entsprechende gilt dann für die zugehörigen Potentialvektoren (vgl. Kap. IV, § 3), und somit wird als deren Grenzwert ein Potentialvektor $\mathfrak{x}$ in B definiert, welcher die vorgeschriebene Randabbildung liefert. Da in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von B auch die Ableitungen der entsprechenden Potentialvektoren $\mathfrak{x}_\nu$ gleichmäßig gegen die Ableitungen des Grenzvektors konvergieren, so folgt für diesen Vektor sofort

$$D[\mathfrak{x}] \leqq d$$

und, da $\mathfrak{x}$ ein zulässiger Vektor, also wegen des Minimumcharakters, $D[\varphi] \geqq d$ ist, die gewünschte Beziehung

$$D[\mathfrak{x}] = d.$$

Unser Beweis ist also zu Ende geführt, sobald wir die gleichgradige Stetigkeit der Randwerte von $\mathfrak{x}_\nu$ gezeigt haben. Diese folgern wir aus folgendem

Lemma:

Es sei $\mathfrak{x}$ ein im Variationsproblem zugelassener Vektor, für welchen

$$D[\mathfrak{x}] \leqq M$$

gilt. Es sei R ein beliebiger Randpunkt des Einheitskreises B. Dann gibt es zu jedem $\delta < 1$ auf der Peripherie C des Einheitskreises zwei Punkte A und B auf verschiedenen Seiten in derselben Entfernung ϱ von R mit

$$\delta \leqq \varrho \leqq \sqrt{\delta},$$

so daß

$$|\mathfrak{x}(A) - \mathfrak{x}(B)|^2 \leqq \frac{2M\pi}{\log\frac{1}{\delta}}$$

gilt. Die Endpunkte A und B des R enthaltenden Bogens werden also durch den Vektor $\mathfrak{x}$ auf zwei beliebig nahe gelegene Punkte auf Γ abgebildet, wenn δ hinreichend klein gewählt wird.

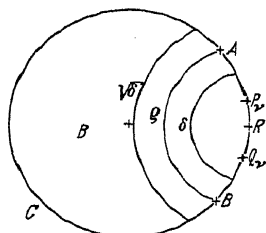



Abb. 57.

Aus dem Lemma ergibt sich die gleichgradige Stetigkeit folgendermaßen: Wäre die Folge der Vektoren $\mathfrak{x}_\nu$ am Rande ungleichgradig stetig, so müßte es einen Randpunkt R und um ihn für unendlich viele ν Intervalle $P_\nu R Q_\nu$ geben, deren Endpunkte mit wachsenden ν gegen R streben und durch die Vektoren $\mathfrak{x}_\nu$ auf zwei solche Punkte P'_ν, Q'_ν von Γ abgebildet werden, deren Abstand oberhalb einer positiven Schranke α liegt. Bei festgewähltem δ und hinreichend großem ν liegen P_ν und Q_ν innerhalb des Bogens ARB. Dann würde also, wenn M eine Schranke von $D[\mathfrak{x}_\nu]$ bedeutet, durch den Vektor $\mathfrak{x}_\nu$ dieser Bogen ARB auf einen Bogen von Γ abgebildet werden, dessen Endpunkte näher als

$$\varepsilon(\delta) = \sqrt{\frac{2\pi M}{\log\frac{1}{\delta}}}$$

liegen, der aber einen Bogen mit einem Durchmesser größer als α als Teilbogen enthält.

Nun gehört zu jeder stetigen doppelpunktfreien Kurve Γ eine Größe $\eta(\varepsilon)$, welche mit ε gegen Null strebt, so daß irgend zwei Punkte P'

und Q' auf Γ mit einem Abstand kleiner als ε einen Bogen von Γ begrenzen, für welchen je zwei Punkte einen Abstand nicht größer als $\eta(\varepsilon)$ besitzen. Ist ε hinreichend klein, so wird demnach der komplementäre Bogen mit der Kurve Γ zusammenfallen, abgesehen von einem Reste mit einem Durchmesser nicht größer als $\eta(\varepsilon)$. Ist δ hinreichend klein gewählt, so wird auch der obige Ausdruck $\varepsilon(\delta)$ und somit η beliebig klein. Da das Bild des Bogens ARB bei der Abbildung durch den Vektor $\mathfrak{x}_\nu$ bei hinreichend großem ν einen Bogen vom Durchmesser größer als α enthält, bedeckt es die Kurve Γ abgesehen von einem Bogen von einem Durchmesser nicht größer als η. Dies widerspricht, wenn δ hinreichend klein gewählt wird, der Dreipunktebedingung.

Beweis des Lemmas. Es genügt wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{x}$ in $B + C$ offenbar das Lemma zu beweisen, wenn wir statt des Einheitskreises einen konzentrischen Kreis setzen, dessen Radius beliebig nahe unterhalb 1 liegt[1]. Führen wir um den Randpunkt R Polarkoordinaten r und ϑ ein, so wird mit $s = r\vartheta$

$$M \geqq \iint_B \mathfrak{x}_s^2 \, ds \, dr .$$

Für die nirgends negative Funktion

$$p(r) = \int \mathfrak{x}_s^2 \, ds,$$

wobei das Integral über denjenigen Bogen des Kreises mit dem Radius r um R erstreckt wird, welcher im Inneren des betrachteten konzentrischen Kreises liegt, haben wir also

$$\int_0^l p(r) \, dr < M,$$

wobei l eine feste Zahl < 2 bedeutet. Wir behaupten, daß es im Intervall $\delta < r < \sqrt{\delta}$ mit beliebigem $\delta < 1$ sicherlich einen Wert $r = r_0$ gibt, für welchen

$$p(r_0) \leqq \frac{\sigma}{r_0}$$

mit

$$\sigma = 2M$$

gilt. Es wäre nämlich sonst

$$\int_\delta^{\sqrt{\delta}} p(r) \, dr > \sigma \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\delta} \sigma = M$$

entgegen der Voraussetzung.

[1] Für einen solchen konzentrischen Kreis können wir ohne weiteres das Gebietsintegral $D[\mathfrak{x}]$ in das sogleich zu benutzende Doppelintegral auflösen.

Nunmehr betrachten wir den Kreisbogen mit $r = r_0$ und $r_0\, p(r_0) \leqq \sigma$. Sind P und Q zwei Punkte auf diesem Kreisbogen, so folgt in unmittelbar verständlicher Bezeichnung auf Grund der Schwarzschen Ungleichung

$$|\mathfrak{x}(P) - \mathfrak{x}(Q)|^2 = \int^{Q} \mathfrak{x}_s\, ds \quad \leqq \pi\, r_0\, p(r_0) \leqq \pi\, \sigma\,,$$

und diese Beziehung enthält die Behauptung des Lemmas.

Der Existenzbeweis für die Lösung des Plateauschen Problemes ist damit beendigt[1].

Ergänzende Literaturangaben.

Über neuere Entwicklungen wird zusammenfassend berichtet in

Conférences internationales sur les équations aux dérivées peratielles. L'enseignement mathématique, Bd. 35 (1936) S. 5—149. Beiträge von Hadamard, Doetsch, Vasilesco, Weinstein, Schauder, Leray.

Zur Theorie der hyperbolischen Differentialgleichungen seien folgende weiteren Abhandlungen erwähnt:

Holmgren, E.: Arkiv for Math., Astr. och Fys. 1, 5 und 6. Ferner Rellich: Math. Ann. Bd. 103, S. 249ff., wo eine Verallgemeinerung der Riemannschen Darstellungsformel für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung bzw. Differentialgleichungen höherer Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen gegeben wird.

Stellmacher: Zum Anfangswertproblem der Gravitationsgleichungen. Math. Ann. Bd. 115, S. 136ff.

Hier wird die Methode des Eindeutigkeitsbeweises von Kap. VI, § 4 auf das ausgeartete hyperbolische System der Relativitätsgleichungen übertragen.

Zum Begriff der Charakteristiken vergleiche noch: Rellich: Math. Ann. Bd. 109, S. 714ff., wo solche Fälle behandelt werden, in welchen die charakteristische Bedingung identisch erfüllt ist.

Zum Begriff der Differentialgleichung in einer Fläche und zum Prinzip von Huyghens (s. S. 371) vergleiche Beltrami: Ouevres Bd. 4, S. 528.

Zum Beweis für den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen (Anhang zu Kap. V) vgl. noch die bei E. Hopf: Math. Z. Bd. 34, S. 194ff. zitierten Arbeiten von S. Bernstein, Gevrey, Radó, Giraud.

[1] Das hier gelöste Plateausche Problem ist ein Spezialfall einer Aufgabe, welche in voller Allgemeinheit 1930 von Douglas formuliert wurde: Die Existenz einer Minimalfläche mit k gegebenen Randkurven und vorgeschriebenem topologischen Typus zu beweisen. Douglas hat zunächst den Fall von Minimalflächen vom Typus des Kreisringes und des Möbiusschen Bandes in zwei Arbeiten, Journ. Math. and Phys. Bd. 10, S. 316ff. und Transactions Am. Math. Soc. Bd. 34, S. 731ff. erledigt und neuerdings in Journ. Math. and Phys. Bd. 15 (Februar bzw. Juni 1936) S. 55ff., bzw. S. 106ff., das bei weitem schwierigere allgemeine Problem mit Hilfe der Theorie der Abelschen Funktionen und auf Grund der Methoden aus den eben genannten Arbeiten behandelt. In den auf S. 535, Fußnote 2, zitierten Arbeiten von R. Courant wird ebenfalls das allgemeine Problem von Douglas behandelt; die dort entwickelte Methode ist auch auf das Problem mit freien Rändern anwendbar.

Namen- und Sachverzeichnis.